I.E.S.-6

INSTITUTO DE EDUCACIÓN SUPERIOR

PROFESORADO DE EDUCACIÓN SECUNDARIA EN MATEMÁTICA

I.E.S. N°6- SEDE PERICO

MINISTERIO DE EDUCACIÓN

INSTITUTO DE EDUCACIÓN SUPERIOR N° 6 - SEDE PERICO

CURSO DE INGRESO

PROFESORADO DE EDUCACIÓN SECUNDARIA EN MATEMÁTICA

CUADERNILLO TEÓRICO- PRÁCTICO

AÑO 2026

GOBIERNO INSTITUCIONAL

Rector: Prof. Juan Carlos Flores

Vicerrector I: Prof. Sandra Coca

Vicerrector II: Prof. José Checa

Secretario Académico: Prof. Rubén Ramos
Coordinadora de Formación Inicial: Prof. Griselda Chaile
Coordinador de Capacitación: Prof. Juan Torrejón
Coordinador de Investigación: Prof. Jorge Farfán
Coordinador de Carrera: Lic. Ariel Martinez

DOCENTES DE LA CARRERA

Prof. Acosta, Marcela

Prof. Arroyo, Valeria

Prof. Colque Olga

Prof. Farfán, Jorge M.

Prof. Flores, Jorgelina

Prof. Gutierrez, Gisela

Prof. Gutierrez, Marcos

Prof. Liquitay, Carlos

Prof. Llanos, Daniel

Prof. Lopez, Silvia

Prof. Mamani, Yolanda

Prof. Martinez, Ariel

Prof. Mealla, Silvina R.

Prof. Ontiveros, María

Prof. Rivera, Ivana

Prof. Tarifa, Irma M.

Prof. Torrejón, Juan

Prof. Vera, Gisela

Prof. Zambrano, Fabián

Prof. Zerpa Rosana

PRECEPTORA DE LA CARRERA
Prof. Cardozo Hilda

CENTRO DE ESTUDIANTES

Presidente: Sivila Nicolás

Vicepresidente: Gonzalez Nicole

Secretaria: Cabezas Fátima

Tesorera: Cisneros Gisela

Vocales: Soto Alfredo, Fernández Noelia, Balcázar Candela

Sentido del Centro de Estudiantes

El Centro de Estudiantes es el órgano democrático de representación del estudiantado dentro de una institución educativa. Su sentido principal es:

- Garantizar la participación activa de los estudiantes en la vida institucional.
- Representar y defender los derechos, intereses y necesidades del conjunto del alumnado.
- Promover la formación ciudadana, democrática y participativa, como parte de la formación integral.
- Constituir un espacio de organización colectiva, diálogo y construcción de propuestas.

En el nivel superior, el Centro de Estudiantes no es solo un espacio gremial, sino también formativo**,** ya que contribuye al desarrollo de responsabilidades, liderazgo, compromiso social y ejercicio de la ciudadanía.

Roles del Centro de Estudiantes

De acuerdo con los estatutos institucionales y las prácticas habituales en el nivel superior el Centro de Estudiantes asume los siguientes roles centrales**:**

◇ **1. Rol representativo**

- Representa al estudiantado ante las autoridades institucionales**.**
- Actúa como interlocutor válido en instancias de diálogo, consulta o participación (consejos, reuniones, comisiones).

◇ **2. Rol participativo y democrático**

- Canaliza la voz colectiva de los estudiantes.
- Promueve la participación en asambleas, elecciones y espacios deliberativos.
- Fomenta prácticas democráticas: elección de autoridades, debate, consensos y toma de decisiones colectivas.

◇ **3. Rol formativo**

- Contribuye a la formación ética, política y ciudadana de los estudiantes.
- Genera experiencias de organización, responsabilidad y trabajo colaborativo.
- Favorece el ejercicio de derechos y el cumplimiento de deberes como estudiantes.

◇ **4. Rol institucional**

- Colabora con la institución en actividades académicas, culturales, sociales y solidarias.
- Participa en acciones que fortalecen la identidad institucional y el sentido de pertenencia.

Funciones del Centro de Estudiantes

Entre las funciones más importantes, que suelen estar explicitadas en los estatutos de los Centros de Estudiantes de institutos superiores, se destacan:

📌 **Funciones representativas**

- Defender los derechos estudiantiles.
- Presentar inquietudes, reclamos y propuestas ante las autoridades.
- Acompañar situaciones colectivas que afecten al estudiantado (cursado, evaluaciones, condiciones institucionales).

📌 **Funciones organizativas**

- Convocar y organizar asambleas estudiantiles.
- Organizar elecciones del Centro de Estudiantes.
- Coordinar comisiones de trabajo (académica, cultura, deportes, extensión, etc.).

📌 **Funciones académicas**

- Promover actividades de apoyo al estudio: tutorías, jornadas, charlas, grupos de estudio.
- Colaborar en actividades académicas institucionales (jornadas, muestras, semanas académicas).

📌 **Funciones culturales y sociales**

- Impulsar actividades culturales, recreativas y deportivas.
- Promover acciones solidarias y de compromiso social con la comunidad.
- Favorecer la integración entre estudiantes de distintas carreras y años.

📌 **Funciones de comunicación**

- Informar al estudiantado sobre temas institucionales relevantes.
- Difundir decisiones, actividades y propuestas del Centro de Estudiantes.
- Facilitar la circulación de información entre estudiantes y autoridades.

COORDINADOR DE CARRERA

El Coordinador de Carrera es el referente académico-pedagógico responsable de articular, acompañar y supervisar el desarrollo integral de una carrera dentro del Instituto de Educación Superior.

Su rol principal es garantizar la coherencia y calidad del trayecto formativo, actuando como nexo entre:

- el equipo directivo,
- los docentes,
- los estudiantes,
- y los marcos normativos vigentes.

Roles específicos

◇ 1. Rol académico-pedagógico

- Asegura la correcta implementación del diseño curricular vigente.
- Promueve la articulación entre los distintos campos de formación (general, específica y práctica).
- Supervisa la planificación, el desarrollo y la evaluación de las unidades curriculares.

◇ 2. Rol institucional

- Representa a la carrera ante el equipo directivo y otros espacios institucionales.
- Participa en instancias de planificación, evaluación y mejora institucional.
- Contribuye a la construcción del Proyecto Educativo Institucional (PEI) desde la especificidad de la carrera.

◇ 3. Rol de articulación y mediación

- Articula el trabajo entre docentes de la carrera.
- Favorece el diálogo y la resolución de situaciones académicas o pedagógicas.
- Canaliza demandas, propuestas y necesidades de docentes y estudiantes.

◇ 4. Rol de acompañamiento estudiantil

- Acompaña las trayectorias académicas de los estudiantes.
- Interviene en situaciones que afectan la regularidad, el cursado o la permanencia.
- Colabora en estrategias de inclusión, retención y egreso.

◇ 5. Rol de gestión académica

- Organiza y supervisa aspectos administrativos-académicos de la carrera.
- Participa en la planificación de la oferta académica y el cronograma anual.
- Colabora en procesos de evaluación institucional y acreditación de carreras.

Funciones del Coordinador de Carrera

Funciones académicas

- Garantizar el cumplimiento del diseño curricular aprobado.
- Coordinar la elaboración y revisión de programas de cátedra.
- Acompañar y supervisar las planificaciones docentes.

- Promover la articulación horizontal y vertical de contenidos.

Funciones con el equipo docente

- Convocar y coordinar reuniones de carrera**.**
- Favorecer el trabajo colaborativo entre docentes.
- Acompañar a docentes nóveles o suplentes.
- Canalizar propuestas de formación y actualización docente.

Funciones con los estudiantes

- Orientar a los estudiantes en cuestiones académicas y normativas.
- Intervenir en situaciones de conflicto académico o pedagógico.
- Acompañar procesos de equivalencias, pases y trayectorias discontinuas.
- Articular con el Centro de Estudiantes cuando corresponda.

Funciones vinculadas a la Práctica Profesional

- Coordinar, junto al equipo de práctica, el **Proyecto Anual de Prácticas**.
- Articular con instituciones asociadas (escuelas u organizaciones).
- Acompañar la implementación de residencias pedagógicas.
- Participar en instancias de evaluación del campo de la práctica.

Funciones administrativas-académicas

- Colaborar en la organización de inscripciones, correlatividades y cursado.
- Participar en la elaboración de informes académicos de la carrera.
- Contribuir a procesos de autoevaluación institucional.
- Elevar informes y propuestas al equipo directivo.

DENOMINACIÓN DE LA CARRERA: ***“Profesorado de Educación Secundaria en Matemática”***

DURACIÓN – Carga Horaria

Años Académicos	Total Horas Cátedra	Total Horas Reloj
Cuatro (4) años académicos	3904 hs	2602 h 40 min

Estructura Curricular por Año Académico
Profesorado de Educación Secundaria en Matemática

AÑO	ORDEN	CAMPO DE FORMACIÓN	UNIDAD CURRICULAR	FORMATO	HORAS CÁTEDRA SEMANALES			TOTAL HS CÁTEDRA	TOTAL HS RELOJ
					Anual	1°C	2°C		
1° AÑO	1	Gral.	Pedagogía	Materia	4			128	85 h 20 min
	2	Gral.	Psicología Educacional	Materia	4			128	85 h 20 min
	3	Gral.	Alfabetización Académica	Taller		4		64	42 h 40 min
	11	Esp.	Álgebra I	Materia	6			192	128 h
	12	Esp.	Geometría I	Materia	6			192	128 h
	13	Esp.	Introducción al Análisis Matemático	Materia	5			160	106 h 40 min
	25	P. Prof.	Práctica I	T. de Campo	4			128	85 h 20 min
			TOTAL DE HORAS DE 1° AÑO		**29**	**4**	**0**	**992**	**661 h 20 min**
2° AÑO	4	Gral.	Didáctica General	Materia	4			128	85 h 20 min
	5	Gral.	Filosofía	Materia	4			128	85 h 20 min
	6	Gral.	Historia de las Políticas Educativas en la Argentina	Seminario	4			128	85 h 20 min
	14	Esp.	Sujeto de la Educación	Materia		4		64	42 h 40 min
	15	Esp.	Álgebra II	Materia	5			160	106 h 40 min
	16	Esp.	Análisis Matemático I	Materia	5			160	106 h 40 min
	17	Esp.	Geometría II y su Didáctica	Taller	4			128	85 h 20 min
	26	P. Prof.	Práctica II	T. de Campo	4			128	85 h 20 min
			TOTAL DE HORAS DE 2° AÑO		**30**	**4**	**0**	**1024**	**682 h 40 min**
3° AÑO	7	Gral.	Educación Sexual Integral	Seminario			4	64	42 h 40 min
	8	Gral.	Integración de las TIC en la Enseñanza	Taller		4		64	42 h 40 min
	9	Gral.	Sociología de la Educación	Seminario		4		64	42 h 40 min
	18	Esp.	Didáctica de la Matemática	Materia	6			192	128 h
	19	Esp.	Historia y Epistemología de la Matemática	Seminario			4	64	42 h 40 min
	20	Esp.	Análisis Matemático II	Materia	5			160	106 h 40 min
	21	Esp.	Probabilidad y Estadística	Taller	6			192	128 h
	27	P. Prof.	Práctica III	Taller	6			192	128 h
			TOTAL DE HORAS DE 3° AÑO		**23**	**8**	**8**	**992**	**661 h 20 min**
4° AÑO	10	Gral.	Ética Profesional Docente	Seminario		4		64	42 h 40 min
	22	Esp.	Análisis Matemático III	Materia	4			128	85 h 20 min
	23	Esp.	Física Matemática	Materia	4			128	85 h 20 min
	24	Esp.	Matemática Aplicada	Taller	4			128	85 h 20 min
	29	UDI	Unidad Curricular de Definición Institucional				4	64	42 h 40 min
	28	P. Prof.	Residencia Pedagógica	Práct. Doc.	12			384	256 h
			TOTAL DE HORAS DE 4° AÑO		**24**	**4**	**4**	**896**	**597 h 20 min**
			TOTAL DE HORAS DE LA CARRERA					**3904**	**2602 h 40 min**

PERFIL DEL EGRESADO

De acuerdo a las capacidades profesionales de la formación inicial (Resolución CFE 337/18), el/la Profesor/a de Educación Secundaria en Matemática será capaz de:

Dominar los saberes a enseñar:

- Apropiarse de los conocimientos matemáticos para transformarlos en contenidos escolares adecuados al requerimiento de aprendizaje de los estudiantes.
- Formular argumentos matemáticos, validar y/o detectar inconsistencias en razonamientos propios o ajenos.
- Actuar de acuerdo con las características y diversos modos de aprender de los estudiantes.
- Atender la diversidad de los estudiantes, para favorecer aprendizajes matemáticos significativos en las distintas modalidades del sistema educativo.
- Desarrollar en sus alumnos bases del pensamiento matemático científico y capacidades para su aplicación en otros campos.

Dirigir la enseñanza y gestionar la clase.

- Fundamentar, adecuar e integrar sus prácticas, posibilitando el aprendizaje y la formación integral de sus alumnos.
- Comprender la complejidad de los procesos educativos en general y de los procesos de enseñanza-aprendizaje de la matemática en particular.
- Manejar distintas estrategias de resolución con conocimiento del espectro de problemas que se vinculan con los distintos conceptos matemáticos a enseñar.

Intervenir en la dinámica grupal y organizar el trabajo escolar.

- Propiciar climas favorables para la convivencia, el intercambio intelectual y la participación en la vida social.
- Encarar el trabajo en equipo como instancia de aprendizaje colectivo donde se entrecruzan saberes, posicionamientos, se complementan perfiles y se acuerdan acciones.

Intervenir en el escenario institucional y comunitario.

- Aplicar conocimientos matemáticos en el contexto que excedan el ámbito del aula.
- Integrar los recursos digitales en forma crítica y creativa.
- Participar de la vida y la gestión institucional, de proyectos específicos de mejora continua, de iniciativas comunitarias.

Comprometerse con el propio proceso formativo.

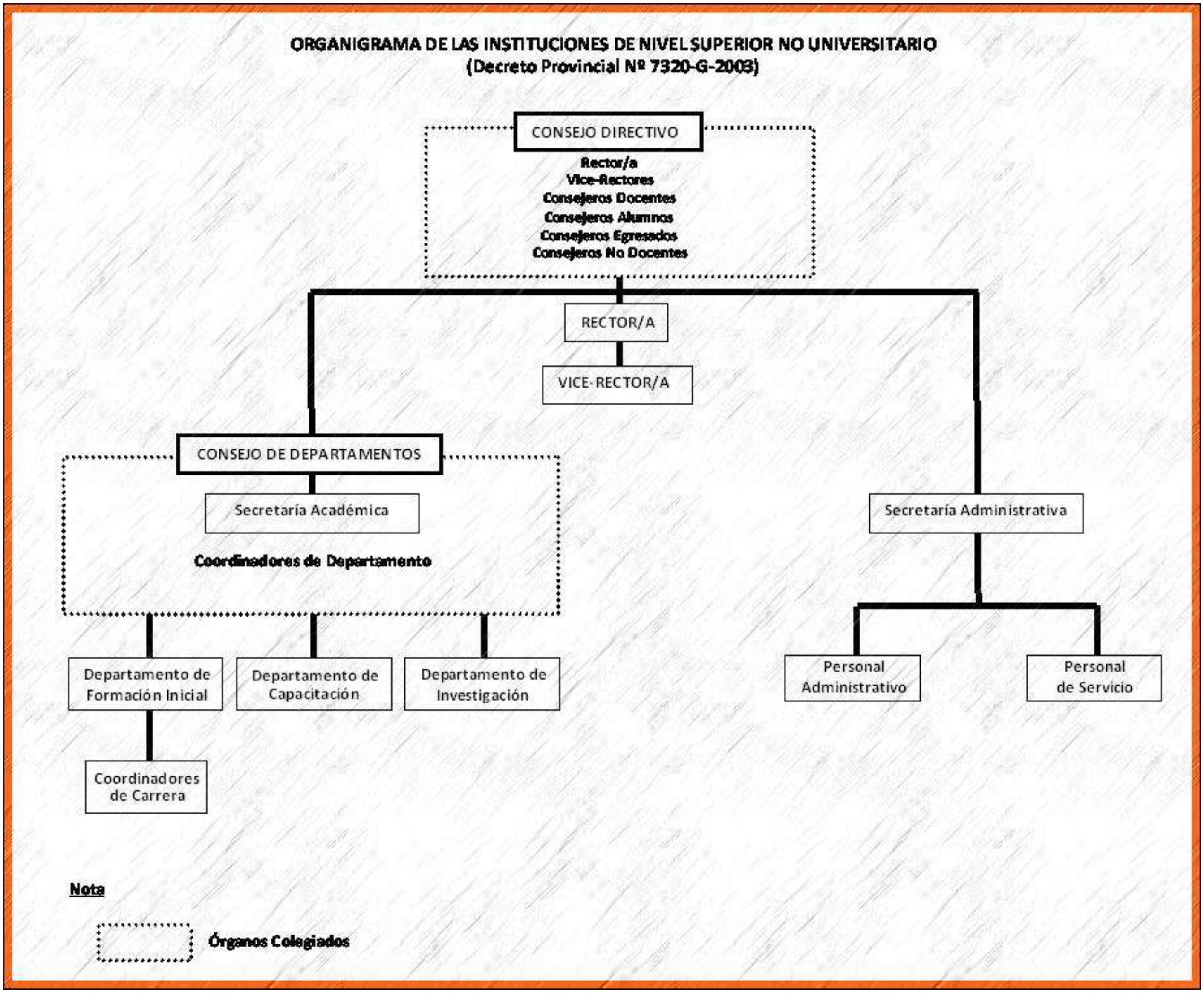
- Participar en las propuestas formativas del Instituto y de las escuelas asociadas, como Jornadas Académicas, Capacitaciones, Olimpíadas Matemáticas, entre otras.
- Desarrollar vínculos con organizaciones territoriales que de un modo u otro contribuyan a la gestión escolar, al desarrollo personal, social e intelectual de los estudiantes destinatarios de su práctica.
- Conocer y contextualizar políticas educativas respetando normas democráticas del sistema educativo.

CONDICIONES DE INGRESO

- Poseer Título de Nivel Medio
- Presentación de documentos personales y académicos según la normativa vigente.

REQUISITOS PARA LA INSCRIPCIÓN (luego de Aprobar el Curso de Ingreso 2026)

- Solicitud de Ingreso: completar Formulario (Nombres y apellidos, DNI / CUIL, e mail, celular, domicilio)
- Fotocopia de DNI ambos lados y legible
- Fotocopia de Acta/ Certificado de Nacimiento- Actualizado por Registro Civil
- Fotocopia de Título Nivel Secundario Autenticado Por Ministerio de Educación o Constancia de Finalización del Secundario con Título en trámite
- Carnet Sanitario otorgado por Ministerio de Salud San Salvador de Jujuy. (no de hospitales ni particulares)
- Planilla Prontuarial actualizada
- 2 foto tipo carnet "Actualizada"
- Carpeta Nepaco con broche
- Certificado CUD si lo tuviera, opcional.
- Seguro: a Confirmar el monto - de carácter Obligatorio- El alumno deberá Conservar el Recibo para poder hacer las Prácticas y o viajes de estudios.
- Cooperadora: se avisará el aporte- CPN Adriana Gonzales presidenta de Coop.


ORGANIGRAMA DE LAS INSTITUCIONES DE NIVEL SUPERIOR NO UNIVERSITARIO
(Decreto Provincial Nº 7320-G-2003)
CONSEJO DIRECTIVO
Rector/a
Vice-Rectores
Consejeros Docentes
Consejeros Alumnos
Consejeros Egresados
Consejeros No Docentes
RECTOR/A
VICE-RECTOR/A
CONSEJO DE DEPARTAMENTOS
Secretaría Académica
Coordinadores de Departamento
Secretaría Administrativa
Departamento de Formación Inicial
Departamento de Capacitación
Departamento de Investigación
Personal Administrativo
Personal de Servicio
Coordinadores de Carrera
Nota
Órganos Colegiados

PÁGINA DEL IES 6

PÁGINA EN FACEBOOK

https://www.facebook.com/share/19px2tPiGy/

Palabras de Bienvenida

Les damos la más cordial bienvenida al Profesorado de Educación Secundaria en Matemática. Iniciar esta carrera implica mucho más que comenzar estudios superiores: es asumir el desafío de formarse como futuros docentes**,** con compromiso, responsabilidad y vocación.

La Matemática no solo es un conjunto de contenidos y procedimientos; es una forma de pensar, analizar la realidad y construir conocimiento. A lo largo de esta carrera, ustedes profundizarán en los saberes matemáticos y, al mismo tiempo, aprenderán a enseñarlos**,** a comunicarlos y a vincularlos con las realidades diversas de la escuela secundaria.

Este trayecto formativo los invita a desarrollar una mirada crítica y reflexiva, a trabajar colaborativamente, a participar activamente de la vida institucional y a construir su identidad como docentes. El profesorado propone un recorrido que articula formación teórica, didáctica, tecnológica y práctica, con instancias de práctica profesional desde los primeros años, acompañando progresivamente su ingreso al mundo de la docencia.

Desde el Instituto de Educación Superior Nº 6, y desde nuestro equipo docente, los acompañaremos en este proceso de formación, brindando espacios de orientación, diálogo y aprendizaje compartido. Esperamos que este sea un tiempo de crecimiento académico y personal, de preguntas, de búsqueda y de construcción colectiva.

Les deseamos un muy buen comienzo, con la certeza de que la educación necesita docentes comprometidos, críticos y apasionados por enseñar Matemática.

¡Bienvenidos y bienvenidas a esta nueva etapa!

PROFESORADO DE EDUCACIÓN SECUNDARIA EN MATEMÁTICA
CRONOGRAMA CURSO DE INGRESO 2026

DIA	HORARIO	CONTENIDOS A DESARROLLAR	DOCENTES
Lunes 02/03/26	18:30 a 19:50	**Presentación de la Carrera. Módulo de Formación Específica** **Pág. 51 a 67**. Números Naturales. Números Enteros. Propiedades. Números primos. Máximo común divisor. Mínimo común múltiplo. Números Racionales. Expresiones Fraccionarias y Decimales. Números Irracionales. Números Reales. Orden en R. Potenciación y Radicación en R. **Ejercicios 1 a 27.**	**FARFÁN Jorge**
	20:00 a 21.30	**Ejercicios 1 a 27.**	Profesores Egresados.
Martes 03/03/26	18:30 a 19:50	**Pág. 68 a 82.** Operaciones en R. Números Complejos. Suma y Resta en C. Recta Real. Conjuntos e intervalos. Uniones e intersecciones de intervalos. Valor absoluto o módulo de un número real. Inecuaciones lineales. **Ejercicios 28 a 55.**	**LOPEZ Silvia**
	20:00 a 21.30	**Ejercicios 28 a 55.**	Profesores Egresados.
Miércoles 04/03/26	18:30 a 19:50	**Pág. 83 a 99**. Función Lineal. Ordenada al origen. Pendiente de la recta. Representación gráfica. **Ejercicios 56 a 66.**	**LIQUITAY Carlos**
	20:00 a 21.30	**Ejercicios 56 a 66.**	Profesores Egresados.
Jueves 05/03/26	18:30 a 19:50	Módulo de Formación General (Eje Nº 1) **Pág. 18 a 33**	**COLQUE Olga**
	20:00 a 21.30	Módulo de Formación General (Eje Nº 2) **Pág. 34 a 40**	**GUTIERREZ Gisela**
Viernes 06/03/26	18:30 a 19:50	Módulo de Formación General (Eje Nº 3) **Pág. 41 a 42**	**ONTIVEROS María**
	20:00 a 21.30	Módulo de Formación General (Eje Nº 4) **Pág. 43 a 48**	**MEALLA Silvina**
Lunes 09/03/26	18:30 a 19:50	**Pág. 100 a 111.** Sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas. Métodos analíticos para resolver sistemas de ecuaciones. Método de sustitución. Método de igualación. Método por reducción por sumas o restas. Clasificación de los sistemas según su solución. **Ejercicios 67 a 79.**	**GUTIERREZ Marcos**
	20:00 a 21.30	**Ejercicios 67 a 79.**	Profesores Egresados.
Martes 10/03/26	18:30 a 19:50	**Pág. 112 a 123.** Ecuaciones cuadráticas o de segundo grado. Clasificación de las Ecuaciones de Segundo Grado con una incógnita. Resolución de las Ecuaciones de Segundo Grado con una incógnita. Resolución de Ecuaciones Incompletas. Resolución de Ecuaciones Completas. El discriminante. Completar cuadrados. **Ejercicios 80 a 96.**	**MARTINEZ Ariel**
	20:00 a 21.30	**Ejercicios 80 a 96.**	Profesores Egresados.
Miércoles 11/03/26	18:30 a 19:50	**Pág. 124 a 133.** Función cuadrática. Representación Gráfica y Elementos de una Función Cuadrática. La Función Cuadrática Elemental. Variación del coeficiente “a“ en la Función Cuadrática. Desplazamiento Vertical de la	**TORREJÓN Juan**

		Función Cuadrática. Desplazamiento Horizontal de la Función Cuadrática. Forma Canónica de la Función Cuadrática. **Ejercicios 97 a 115.**	
	20:00 a 21.30	**Ejercicios 97 a 115.**	Profesores Egresados.
Jueves 12/03/26	18:30 a 19:50	**Pág. 134 a 144.** Aplicación de la Función Cuadrática en la Resolución de Problemas de máximos y mínimos. Las Raíces de la Función Cuadrática. Cómo graficar la Función Cuadrática a partir de su Forma Polinómica. Forma Factorizada de la Función Cuadrática. **Ejercicios 116 a 137.**	**MAMANÍ Yolanda**
	20:00 a 21.30	**Ejercicios 116 a 137.**	Profesores Egresados.
Viernes 13/03/26	18:30 a 19:50	**Pág. 145 a 153**. Polinomios. Operaciones con polinomios: suma, resta, multiplicación, división, regla de Ruffini. Valor Numérico de un Polinomio. Raíz de un Polinomio. Divisibilidad de Polinomios. Teorema del resto. **Ejercicios 138 a 153.**	**ZAMBRANO Fabián**
	20:00 a 21.30	**Ejercicios 138 a 153.**	Profesores Egresados.
Lunes 16/03/26	18:30 a 19:50	**Pág. 154 a 164**. Factorización de Polinomios. Algunos Casos "Especiales" de Factorización de Polinomio. Factor Común. Diferencia de Cuadrados. Factor Común por grupos. Trinomio Cuadrado Perfecto. Expresiones Racionales. Expresiones Racionales Irreducibles. Operaciones con Expresiones Racionales. Ecuaciones Racionales. **Ejercicios 154 a 170**.	**ACOSTA Marcela**
	20:00 a 21.30	**Ejercicios 154 a 170**.	Profesores Egresados.
Martes 17/03/26	18:30 a 19:50	**Pág. 165 a 177.** Geometría. Rectas Paralelas, Coincidentes y Secantes. Rectas Perpendiculares y oblicuas. Ángulos Orientados en el Plano Cartesiano. Sistemas de Medición de Ángulos: El Sistema Sexagesimal. El sistema radial. Relaciones entre Dos Ángulos. Ángulos entre rectas paralelas. Perímetro y Área. **Ejercicios 171 a 197.**	**MARTINEZ Ariel**
	20:00 a 21.30	**Ejercicios 171 a 197.**	Profesores Egresados.
Miércoles 18/03/26	18:30 a 19:50	**Pág. 178 a 190**. Ángulos interiores de un triángulo. Razones y Proporciones. El Teorema de Thales. Triángulos Semejantes. Criterios de Semejanza de Triángulos. El Triángulo Rectángulo. Triángulos Rectángulos y Semejanza. El Teorema de Pitágoras. **Ejercicios 198 a 222.**	**TORREJÓN Juan**
	20:00 a 21.30	**Ejercicios 198 a 222.**	Profesores Egresados.
Viernes 20/03/26	**18:30 a 20:00**	**EXAMEN DE INGRESO** **GRUPO Nº 1** **GRUPO Nº2**	**Docentes de la carrera** **Profesores Egresados.**

Módulo de Formación General

Los docentes tienen en sus manos buena parte del futuro de la sociedad. Esta desafiante tarea exige una preparación muy sólida, sobre todo en contextos de fuerte desigualdad y desintegración social. Por eso, su formación inicial es un pilar irremplazable para alcanzar una mejora profunda y sistémica de la educación.

INTRODUCCIÓN

La calidad educativa para todos los estudiantes de la formación inicial del IES N° 6 de Ciudad Perico, es de importancia primordial. Para contribuir a este objetivo, la Coordinación de esta carrera en colaboración con los profesores formadores pone a disposición un Módulo General, orientado a la mejora del ingreso a la carrera docente, los procesos de aprendizaje, y la gestión institucional.

Los diseños curriculares y las actuales exigencias de cambios estructurales, funcionales, organizativos y de aprendizaje que demandan la Ley de Educación Nacional 26.206/06 y las resoluciones del Consejo Federal de Educación, así como la agenda de calidad educativa, son un punto de partida de este aporte. Sabemos por la experiencia adquirida que el principal problema pedagógico que debe ocuparnos hoy es definir qué características debe tener y cómo instalar un trabajo didáctico que posibilite el acceso de todos los estudiantes a los aprendizajes fundamentales, sabiendo que siguen siendo muy desiguales las oportunidades de acceder a una variedad de experiencias significativas en términos culturales.

Este documento presenta las estrategias relativas a la formación de los jóvenes ingresantes como estudiantes y la reflexión de la organización para el estudio para desarrollar aprendizajes significativos, como así también un conjunto de lecturas que les permitirá caracterizar la función del docente de Nivel Secundario en la actualidad.

Somos conscientes que el futuro de la educación depende de contar con maestros y profesores sólidos, autónomos, críticos, creativos y comprometidos. *Desde las etapas fundacionales del sistema educativo argentino hasta nuestros días, los buenos docentes fueron determinantes para la formación de las nuevas generaciones. Hoy, diversos estudios internacionales demuestran que la calidad del aprendizaje depende de la calidad de la enseñanza. De hecho, los sistemas educativos que logran una educación de calidad con inclusión apuestan al fortalecimiento de los docentes como el principal motor de la mejora (Medraza, F. pág 13).* Siendo esta afirmación válida, necesitamos encontrar nuevos caminos que logren anclar nuestros puntos de partida y pensar en el modo de fortalecer el ingreso a la docencia, no como un punto acabado sino como el inicio de un proceso que debe ser sostenido a lo largo de la formación inicial.

PRESENTACIÓN

El presente módulo elaborado para el Curso de Ingreso del Ciclo Lectivo 2026 se denomina “Formación General y Pedagógica” y aborda contenidos o temáticas que te permitirán comprender cuestiones relacionadas con la carrera que elegiste en el IES 6 de Ciudad Perico.

Podrás aproximarte a descubrir que ser estudiante del nivel superior significa ser un sujeto ético, comprometido consigo mismo, con los otros, con el contexto, con la institución, como así también ser consciente de las propias limitaciones con el propósito de recurrir a los medios necesarios para superarlas y al mismo tiempo permitirse descubrir las potencialidades que se tienen. Así también abordarás algunas características propias del nivel educativo al que pertenece la carrera, es decir, el Nivel Superior, las actitudes y habilidades que son fundamentales para organizar el estudio y aprender y además, podrás reflexionar sobre cuestiones ligadas al significado de lo que implica ser docente como una profesión con características singulares, diferentes, en relación a otras profesiones.

El módulo introductorio está organizado en cuatro Ejes que comprenden:

EJE Nº 1 - Comenzar a construir un recorrido formativo propio, cuyos contenidos te ayudarán a comprender qué significa ser estudiante de nivel superior; qué estrategias de estudio puedes emplear para desarrollar habilidades básicas para aprender, cómo llegar al autoconocimiento y cómo organizar el tiempo para optimizar los estudios.

EJE Nº 2 - Conociendo el contexto Institucional

Este eje te permitirá abordar las normativas vigentes que regulan el funcionamiento de los Institutos de Educación Superior a nivel jurisdiccional e institucional

EJE Nº 3 - Acompañar la trayectoria de Formación: ¿Qué es la formación Inicial? Eje destinado a conocer el camino que debes recorrer, por eso se abordarán las trayectorias de formación y el lugar de las prácticas que deberás realizar.

EJE Nº 4 - Algunas reflexiones sobre la elección de la docencia: promoverá la elección que hiciste, con el compromiso de formarte para asumir las condiciones institucionales y la diversidad cultural de la sociedad, para garantizar el aprendizaje de los futuros estudiantes.

EJE Nº 1 COMENZAR A CONSTRUIR UN RECORRIDO FORMATIVO PROPIO

Ser estudiante del Nivel Superior

Si partimos de considerar que durante la escuela polimodal, media o secundaria se apropiaron de elementos básicos y orientaciones necesarias para incursionar y aprobar en las distintas asignaturas; ahora deberá mejorarlos, perfeccionarlos para convertirse en un buen estudiante de nivel superior, esto implica aprender a cuestionar, fundamentar, producir con autonomía personal.

Es importante reconocer que para que ocurra el aprendizaje, habrá que hacer esfuerzos para aprender. Para que esto ocurra debes estar motivado, interesado, abierto a las distintas oportunidades de aprendizaje, desarrollar la capacidad crítica y creativa para buscar y encontrar la información adecuada, analizarla y aplicarla a cada situación problemática concreta.

Lo central en los estudios superiores es el cambio de actitud, basada en la responsabilidad y el esfuerzo individual, la que posibilitará proyectarte en un futuro, en un proyecto de vida, para lo cual se pueden señalar tres elementos principales:

1.- Tiempo: varias horas del día para estudiar, aparte de las horas de asistir a clase

2.- Organización personal: se debe ser honesto en relación al lugar que ocupa el estudio dentro del espectro de actividades cotidianas, sin perder de vista que debe ocupar un lugar prioritario.

3.- Hábitos y técnicas de estudio: las técnicas son herramientas del trabajo estudiantil que te permitirán aprender con mayor facilidad, mayor cantidad y menor esfuerzo y tiempo. Estrategias de estudio como habilidad básica para aprender.

Alguna vez te hiciste las siguientes preguntas: ***¿Cómo estudio? ¿Estoy conforme con lo que aprendo al estudiar? ¿Cómo mejorar mi capacidad de estudio? ¿Reflexionamos acerca de la importancia de las estrategias de aprendizaje?***

El objetivo de este apartado es que aprendas a manejar diferentes estrategias que te ayudarán a ser más eficaz en tu estudio. Ser eficaz, significa poder hacer más cosas en menos tiempo, con menos esfuerzos y mejores resultados. Cuantas más herramientas conozcas, más libre serás para probarlas y elegir la que te resulte más práctica.

"Aprendamos juntos a aprender"

Abraham Lincoln escribió: 'Si me dieran ocho horas para talar un árbol... emplearía seis en afilar el hacha'.

Parece una sabia actitud aplicable a muchas áreas de la vida, y sobre todo a la actividad de estudiar y aprender.

Para estudiar, hay que aprender a estudiar… Estudiar no consiste simplemente en almacenar datos… Estudiar es situarse adecuadamente ante unos contenidos, interpretarlos, asimilarlos, retenerlos, para después poder expresarlos en una situación de examen o utilizarlos en la vida práctica.

El punto crucial es aprender a aprender. Y se aprende gracias a estrategias de aprendizaje y técnicas de estudio que nos sirven para toda la vida.

Las Técnicas de estudio son una serie de herramientas que ayudarán a mejorar el rendimiento escolar y facilitarán el proceso de estudio. Y de aquí se desprende la enorme importancia de los buenos métodos de estudio, o, en otras palabras, de aprender a estudiar bien desde un principio.

El estudio es:

- Un proceso consciente y deliberado. Por lo tanto, se requiere tiempo y esfuerzo.
- Es una actividad individual. Nadie presta las alas del entendimiento a otros.
- Estudiar involucra conectarse con un contenido, es decir, implica la adquisición de conceptos, hechos, principios, relaciones, procedimientos.
- Estudiar depende del contexto, lo cual quiere decir que la incidencia o la efectividad de una estrategia o de un proceso difieren en la medida en que existan variaciones en las condiciones de las tareas de aprendizaje. Por ejemplo, no estudiamos de la misma manera para un examen parcial o final que para una prueba escrita o para una presentación oral.
- Estudiar es un proceso orientado hacia metas, lo cual quiere decir que cuando estudiamos, lo hacemos en función de unos objetivos o metas pre-establecidos que pretendemos alcanzar en un determinado lapso.
- El estudio es un vehículo que nos ayuda a estructurar la personalidad mediante la adquisición de conocimiento, enriqueciendo el vocabulario, desarrollo de valores y destrezas.

En la Pedagogía actual cada vez se hace más hincapié en la idea de que el alumno debe jugar un papel activo en su propio aprendizaje, ajustándolo de acuerdo con sus necesidades y objetivos personales. Por tanto, se aboga por introducir estrategias de aprendizaje en el currículum de las carreras de la educación superior, para que el alumnado se beneficie aprendiendo a utilizarlas desde el inicio de su formación profesional. Una de estas estrategias que cada día suma más adeptos es la de enseñar al alumno a aprender a aprender y será a los docentes a quienes se les encomendará la tarea de "enseñar a aprender", y a los estudiantes a "aprender a aprender".

Aprender a aprender es tener conciencia de cómo uno aprende, de los mecanismos que está usando, de cuáles son las maneras más eficaces para aprender, donde se destaca la manera de entender, analizar y aprender las cosas del exterior por los medios que a cada uno le parezcan convenientes o cómodos, como por ejemplo el hacer esquemas, resúmenes, cuadros.

El aprendizaje es un proceso individual y cada persona debe optar por su método de estudio y aprendizaje. Por tanto, es necesario en cada proceso de aprendizaje descubrir, crear e inventar, los medios que le permiten una formación real y significativa.

La experiencia demuestra que existe un mayor interés e involucramiento de los estudiantes en su propio proceso de aprendizaje ya que este método de aprendizaje es mucho más participativo al dotar al que aprende de las herramientas intelectuales, afectivas y sicológicas que le permitan aprender el concepto, la forma y el sentir del mundo exterior, logrando que el conocimiento adquirido por el estudiante o la persona que lo adquiere sea significativo, de tal manera que lo pueda utilizar de forma efectiva y sepa dónde aplicarlo en el momento que lo amerite y que sea pertinente para sus vidas. En este proceso evolutivo del ser humano se desarrollan una serie de habilidades destrezas y actitudes a fin de optimizar los estilos propios para la adquisición y solución de otros procesos evolutivos para el mejoramiento continuo como persona única, libre, creativa, crítica y reflexiva.

A lo anterior debemos agregar que aprender a aprender constituye un proceso intelectual que una persona realiza, para darle sentido a sus capacidades cognitivas, lo importante del aprender a aprender, es que se asume un proceso de internalizar y descubrir los principios, reglas, glosarios, métodos, que usualmente están ocultos en grandes cantidades de hechos de la vida diaria, representando un proceso superior en que el estudiante sabe lo que aprende y la forma en que lo hace, controlando, de esta forma, su aprendizaje. Implica también el aprender a leer la realidad, el yo interior y las demás variables necesarias para realizar cambios transformadores, donde es posible darse cuenta de la oportunidad que se tiene todos los días de adquirir una nueva visión de las cosas, de ver el mundo desde otra óptica, de desaprender lo aprendido y asimilar lo novedoso, lo que es señal de humildad y disponibilidad para vivir.

En definitiva, eres tú el que elige mejorar o no, estudiar o no, ya que el que se beneficia o perjudica con la elección ¡eres tú! Para terminar la carrera que elegiste, debes manejar buenas herramientas de estudio, esto te ayudará a aprender más y mejor y a cumplir tus metas en la vida. Lo que queremos que tengas en cuenta es que lo que tú no hagas en este mundo, nadie lo puede hacer por ti. A continuación, te presentamos algunas herramientas y sugerencias que te servirán para aprender a organizarte y estudiar mejor.

Autoconocimiento

Todos nosotros tenemos puntos fuertes y puntos débiles. Somos muy buenos para hacer algunas cosas y no tanto para otras. Lo importante es que tengamos bien en cuenta cuáles son nuestras fortalezas y cuáles son nuestras debilidades para poder enfrentar éstas últimas y obtener mejores resultados. Te proponemos que te hagas los siguientes cuestionamientos: ***Cuáles son tus puntos fuertes y cuáles son tus puntos débiles*** respecto a:

⇐ Lectura y estrategias de estudio.

⇐ Planificación del estudio: tiempo y organización del material.

⇐ Lugar de estudio.

⇐ Comprensión y memorización.

⇐ Estado físico: incluye tu disposición corporal para el estudio.

Estudiar es cansador, se necesita energía. Responder a estas preguntas te ayudará a construir tu perfil personal de estudiante. Reflexionar sobre estas cualidades es el punto de partida para conocerte y saber por quién hay que empezar para aprender y estudiar mejor.

Organización del tiempo

Para que puedas ser eficaz en tu estudio, es importante que aprendas a organizar tu tiempo. Es decir, el tiempo que destinas cada día y en la semana a:

⇐ Asistir a clase.

⇐ Estudiar o hacer los trabajos prácticos

⇐ Estar con tu familia o pareja.

⇐ Trabajar si lo haces.

⇐ Estar con amigos.

⇐ Usar redes sociales: facebook o twiter.

⇐ Realizar deportes o hobbies.

⇐ Descansar.

Una vez que hayas pensado en estos aspectos, contesta***: ¿En qué ocupas la mayor parte del tiempo? ¿Qué día de la semana tienes mayor o menor tiempo para estudiar?*** Algunas sugerencias para organizar tus horarios personales:

⇐ Proponte bloques de estudio: por ejemplo, entre 2 o 3 horas de estudio con recreos de 15 minutos.

⇐ No estudies simultáneamente dos materias que te parecen difíciles. Estudia una después de la otra. Intercala materias que te parecen fáciles e interesantes con materias difíciles.

⇐ No hagas lo mismo durante mucho tiempo. Si te has cansado de leer, cambia de actividad, realiza un esquema, un resumen etc.

⇐ Anota en una agenda o celular las tareas que debes realizar.

⇐ Trata de no estudiar en horas en las que estás más cansado/a.

⇐ Duerme bien cada día de la semana.

Toma de apuntes en clase

La ventaja de la toma de apuntes:

Te ayuda a concentrarte y seguir la explicación del profesor.

Te permite anticipar lo que el profesor considera importante (es necesario prestar atención a los gestos y tono de voz).

Te ahorra tiempo de estudio.

Algunas sugerencias para tomar apuntes:

⇐ Anota ideas fundamentales, no copies todo al pie de la letra, salvo las definiciones, fechas y fórmulas.

⇐ Si te "pierdes", deja un espacio en blanco y sigue escribiendo, luego lo completarás.

⇐ Escribe cada idea por separado (un renglón por idea).

⇐ Subraya o recuadra el título para que se diferencie del resto.

⇐ Usa abreviaturas para poder escribir más rápido como las que utilizas para chatear. Tienes que entender bien tus propias abreviaturas, para eso úsalas siempre en tus propios apuntes y resúmenes, no en las producciones que debas entregar al profesor.

Método de estudio

LECTURA COMPRENSIVA:

La comprensión de textos incide directamente en el aprendizaje: las dificultades para comprender hacen que muchos alumnos mecanicen aún más, en el nivel superior, los procedimientos memorísticos que han adquirido en el trayecto escolar previo, fracasen ante situaciones donde deben aplicar creativamente sus conocimientos, desaprueben los exámenes y finalmente abandonen la carrera.

"Cuando los alumnos se enfrentan a un texto, lo hacen dentro de una experiencia más global en la que han tenido la oportunidad de atender a la explicación de un profesor o han participado en un debate. Así, siempre cabría plantearse si lo que no comprenden los alumnos es el texto en cuestión o la situación de aprendizaje y enseñanza en la que están inmersos…la capacidad de comprensión y de expresión…tiene tantos niveles como grados tiene el sistema educativo…cada grado escolar reclama un incremento correlativo de la competencia lingüística…que no puede depender de una única intervención que resuelva el problema para siempre" (Sánchez Miguel, Emilio:1998).

La heterogeneidad del alumnado que ingresa en el nivel superior nos permite decir que las habilidades de lecto – comprensión y manejos de fuentes de información depende de características individuales como: la habilidad intelectual, la motivación, las experiencias previas de estudio en los niveles anteriores de educación y las características de la tarea en los cursos. Estas habilidades cobran mayor importancia cuando más autonomía se requiere en la selección, organización, transformación e integración de la información, y resultan indispensables para tener un rendimiento académico satisfactorio.

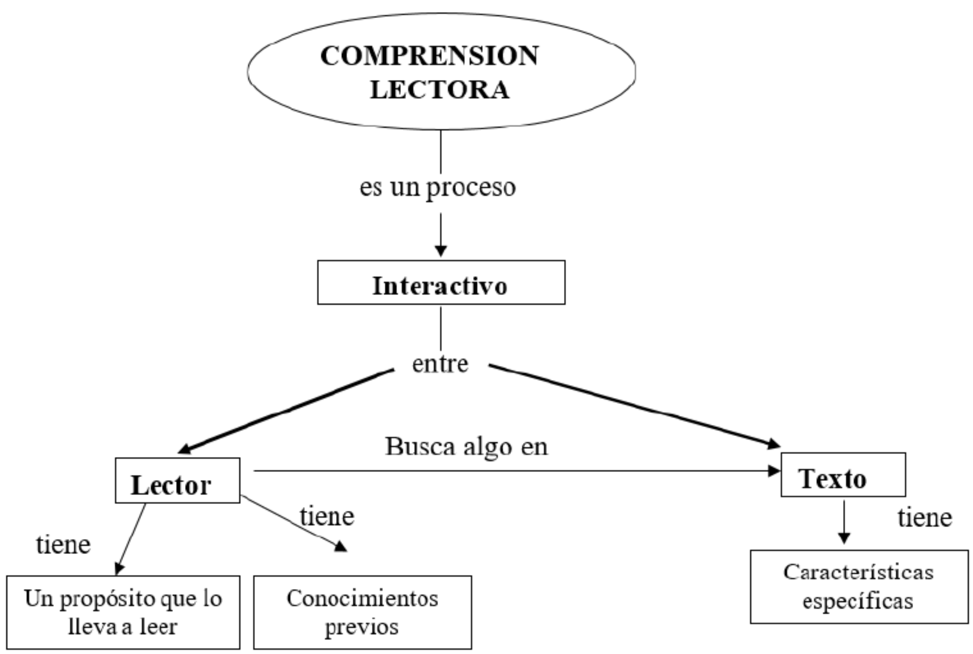
El nivel superior requiere lectores eficientes que puedan formular hipótesis, generar soluciones, comparar, analizar y describir hechos y procesos, clasificar, narrar, categorizar, reflexionar sobre los conocimientos adquiridos y los nuevos, todas operaciones que se realizan desde la observación y la experiencia, pero en mayor medida desde la información que se lee, y dada la masividad de estudiantes con que se desarrollan las clases, esta última es la predominante.

Ahora bien, ¿Qué significa comprender?

La comprensión de un texto que se lee es la meta de toda lectura: siempre que se lee se lo hace para entender. La lectura sin comprensión carece de sentido.

Un lector comprende un texto cuando puede encontrarle un significado, cuando puede ponerlo en relación con lo que ya sabe y con lo que le interesa. En consecuencia, la comprensión lectora surge de una interacción entre lo que dice el texto y lo que conoce y busca quien lee. Por ello, cuando un lector lee en busca de significado necesita coordinar informaciones que provienen de distintas “fuentes”: El Texto, su contexto y los conocimientos que él posee.

EL PROCESO DE COMPRENSIÓN LECTORA



Según lo dicho hasta aquí, la comprensión lectora implica:

- Tener como objetivo la comprensión de lo que se quiere leer

- A partir del título o encabezado realizar anticipaciones o hipótesis acerca del contenido del texto
- Mientras se va leyendo continuar formulando nuevas anticipaciones que son suposiciones acerca del significado de lo que dice el texto
- Relacionar lo que se lee con los conocimientos que tenemos
- A lo largo de la lectura el lector consulta significados de palabras o frases y puede seguir o volver atrás para comprender mejor y lograr una representación mental de lo principal del texto
- Al mismo tiempo, el lector realiza una valoración del texto, lo juzga como interesante, aburrido, positivo, negativo en relación a los conocimientos previos

Cada lector construye una interpretación de lo leído según sus conocimientos y según su propósito de lectura

Según lo que hemos indicado, la comprensión es la elaboración de un conjunto de significados más o menos coherentes con el texto leído y más o menos en consonancia con los conocimientos y propósitos del lector. Por ello, la comprensión de un texto no es la misma para todos los lectores, ya que varía de acuerdo a los conocimientos del tema y al objetivo de la lectura.

Tener un método de estudio significa planear los pasos a seguir a la hora de estudiar. Implica organizarse de manera tal que uno sepa qué va a hacer primero y qué después.

El método que se propone a continuación, lo puedes usar o no, o adaptarlo a tus posibilidades.

1.- Pre-lectura

¿Qué es? Es ojear o echar un vistazo sobre lo que tenemos que leer antes de empezar, para darte una idea de lo que vas a tratar. ¿Cómo se hace? Puedes seguir los siguientes pasos:

⇐ Lee los títulos, subtítulos, palabras en negrita. Mira los dibujos, las fotos y los esquemas que haya.

⇐ Hazte a ti mismo preguntas antes de empezar a leer el texto: ¿De qué te imaginas que se va a tratar lo que vas a leer? ¿Qué sabes acerca de este tema? (palabras o ideas que te vienen a la mente cuando piensas en este tema). Cada vez que tengas un texto para estudiar, es conveniente que contestes esas preguntas en tu pensamiento.

⇐ Realiza una lectura veloz

2.- Lectura y detección de ideas importantes

Luego de hacer la prelectura puedes comenzar a leer el texto buscando la información más importante. Si bien en el texto hay ideas principales en función de lo que el autor quiere decir, lo que consideremos nosotros importante dependerá de dos cuestiones:

⇐ El objetivo con el que leemos, es decir, el para qué leemos.

⇐ De lo que el profesor/a considera como importante en sus clases.

¿Cómo realizar una mejor lectura?

Algunas estrategias para optimizar la lectura son:

⇐ Ponte objetivos alcanzables antes de empezar: “En este rato voy a leer con atención y subrayar estas tres carillas”.

⇐ Lee los títulos antes de empezar e imagínate de qué se trata lo que leerás.

⇐ Subraya las frases que te parezcan claves (si las sacas del párrafo éste deja de tener sentido o éste cambia).

⇐ Para descubrir las palabras claves o temas importantes: fíjate si lo que estás leyendo tiene que ver con el título o subtítulo que hay en esa sección, piensa qué información nueva aporta lo que estás leyendo al tema que estás estudiando.

⇐ No subrayes adjetivos o artículos que están “adornando” las palabras claves.

⇐ Mira con atención los cuadros o dibujos que hay en los libros o apuntes, generalmente están para aclarar las ideas.

⇐ No te quedes con una palabra o frase que no entiendas. Trata de comprender en general qué es lo que el texto quiere decir. Puedes buscar en el diccionario o Google.

⇐ Reconócele importancia a tu opinión, a tu punto de vista, frente a todo lo que lees.

Formulación de preguntas al leer

Formular preguntas de los textos que lees te ayudará a ser un lector más activo. Para hacerlo puedes seguir los siguientes consejos:

⇐ Imagínate que eres un profesor/a que debe hacer preguntas a los alumnos sobre lo que estas estudiando.

⇐ Piensa preguntas que no se puedan responder con un “si” o un “no”, con una palabra o fecha.

⇐ No hagas muchas preguntas del estilo ¿Qué es? Éste tipo de preguntas son buenas solo cuando se trata de definiciones.

⇐ Trata de pensar preguntas que empiecen: ¿Por qué…? ¿Cómo…? ¿Cuál es la relación entre…? ¿Cuáles fueron las causas de…? ¿Cuáles fueron las consecuencias de…? ¿Cómo influyó en…?

⇐ Trata de hacer una pregunta por párrafo o cada dos párrafos.

⇐ Anota las preguntas al margen del texto donde crees que se encuentra la respuesta.

⇐ Al final del texto trata de hacer una pregunta general que relacione otras preguntas que has hecho.

⇐ Compara el estilo de tus preguntas con las preguntas que hace el/la profesor/a en los exámenes.

3.- Organización de la información

Luego de haber leído el texto es necesario que organices la información, utilizando alguna técnica de organización de la información. A continuación, te presentamos como hacer algunas de ellas.

3.1.- Esquema

¿Qué es?

Es un gráfico que muestra ideas principales de un texto ordenadas lógicamente. Nos permite ver con un simple vistazo cómo están relacionados los temas de un texto. Estudiar de un esquema claro organiza tus ideas y te permite recordar mejor los temas.

⇐ Mantiene fija la atención y fomentan el estudio activo.

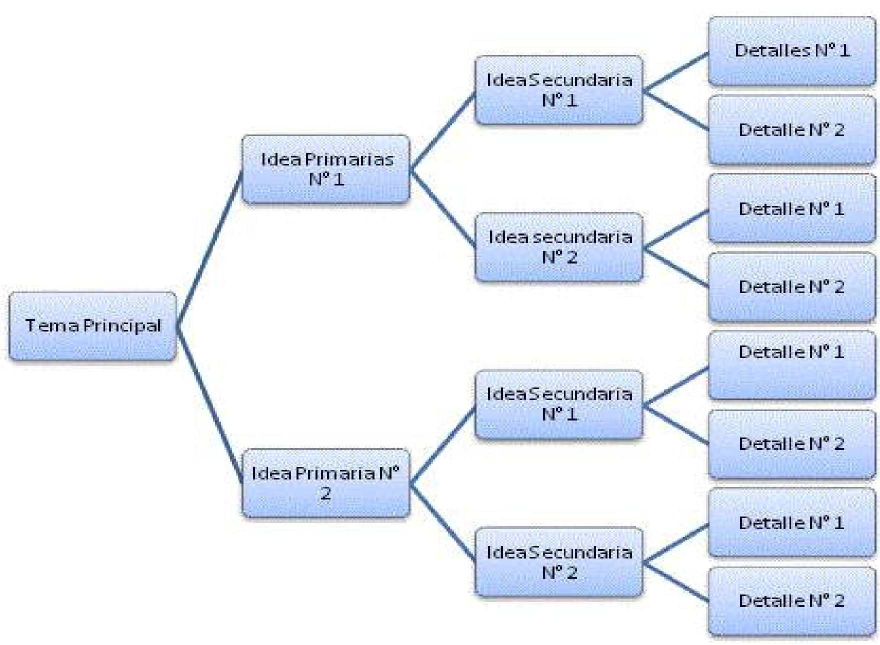
⇐ Ayudan a la memorización ya que organizan el recuerdo.

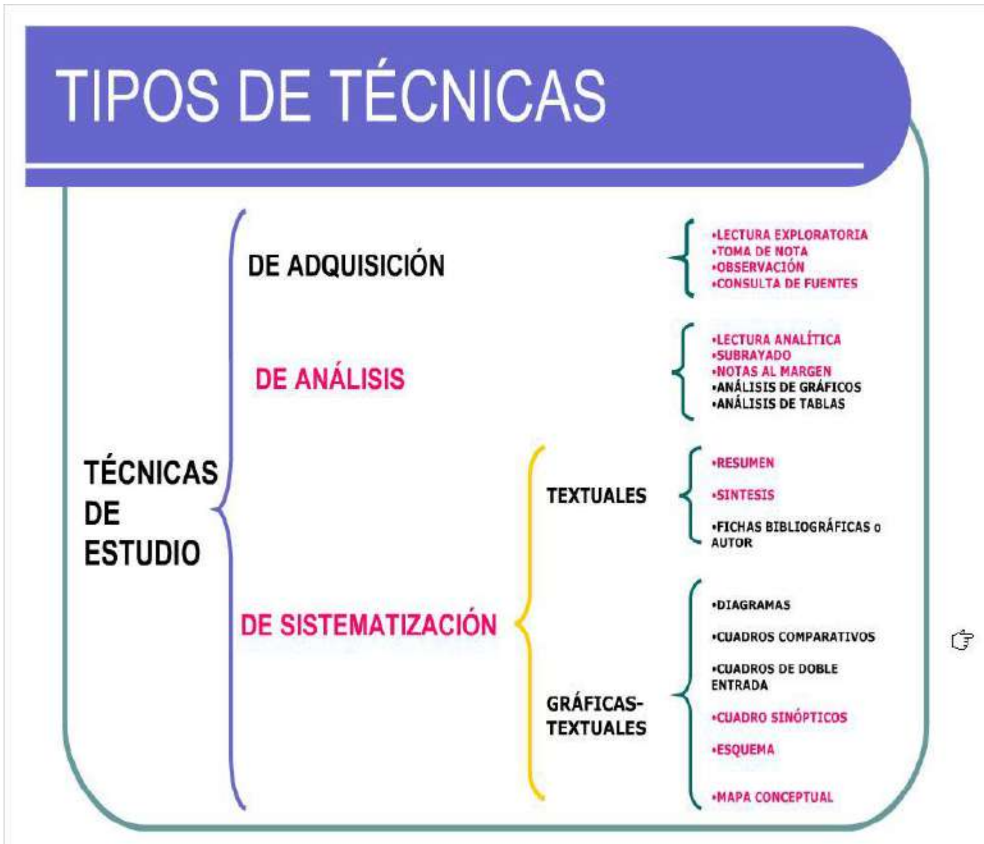
⇐ Desarrollan la capacidad de síntesis.

⇐ Hacen más personal el estudio.

¿Cómo se hace?

Para hacer un esquema es necesario detectar ideas principales y entender cómo se relacionan entre sí y reorganizarlas. Es necesario ver cuál es el tema central que engloba el resto de los temas. Existen diferentes tipos de esquemas. Se pueden hacer con flechas, con números o con letras. Ejemplos:





3.2.- Resumen

¿Qué es?

Resumir consiste en transformar un texto más largo en otro más corto, que contenga únicamente las ideas que consideren importantes. Implica expresar con sus propias palabras la información que presenta el texto, tal como ustedes la hayan entendido.

¿Cómo se hace?

Para hacer un resumen debes leer primero el texto y luego expresar las ideas que consideres importantes como si se las estuvieses explicando a un amigo. Para que tu resumen sea más organizado, y puedas recordar mejor el contenido, debes tratar de escribir cada idea en un renglón o párrafo diferente también puedes usar abreviaturas o símbolos. Idea general

1. Idea importante a) Idea secundaria b) Idea secundaria
2. Idea importante a) Idea secundaria b) Idea secundaria

3.3.- Cuadro comparativo

¿Qué es?

Es un cuadro en el que se comparan diferentes aspectos del mismo tema. Al hacerlo necesitamos organizar la información que no da el texto para poder compararla. Ésta técnica es de mucha utilidad para estudiar textos en los que se estudian los mismos aspectos en diferentes áreas.

Ejemplo: climas en diferentes regiones, etapas o procesos históricos, medidas.

Estudiar de esta manera nos permite estar preparados para las posibles preguntas de examen del estilo "compare…".

¿Cómo se hace?

Comparar significa buscar qué tiene de igual y qué tienen de distinto los temas que estamos comparando. Para hacer un cuadro comparativo es necesario reorganizar la información brindada por el texto y ser capaz de descubrir las categorías de comparación que son los ítems que vamos a comparar.

Veamos un ejemplo

CRITERIOS:	ENFOQUE TRADICIONAL	ENFOQUE EMERGENTE
Concepción del estudiante.	Ser pasivo. La mejor forma de preparar al niño para la vida es formar su inteligencia, su capacidad de resolver problemas y sus posibilidades de atención.	Ser activo. Se impone la obligación de tener una imagen justa del niño, trata a cada uno según sus aptitudes, permitiéndole al mismo dar lo mejor de si.
Concepción del docente.	Es considerado y respetado como autoridad.	Es un facilitador del aprendizaje motivador, orientador.
Relación maestro estudiante.	Relación de poder, sumisión.	Relación de afecto, amistad, convivencia.

<u>3.4.- Mapa mental</u>

¿Qué es?

Es una técnica que permite utilizar imágenes, colores, códigos y dibujos. Implica la puesta en juego de nuestra creatividad. Puede ser de utilidad para preparar exámenes finales y parciales o trabajos prácticos.

¿Cómo se hace?

Los pasos a seguir son:

⇐ Toma una hora de papel.

⇐ Dibuja en el centro una imagen o tema a tratar.

⇐ Dibuja flechas que salen del centro.

⇐ Escribe sobre cada flecha una idea básica organizadora y acompaña las palabras con imágenes.

⇐ Subdivide las flechas centrales en flechas que amplíen la idea básica organizadora.

3.5.- Elaborar fichas

Las fichas nos permiten procesar y sistematizar el contenido de un texto. Son párafos breves y coherentes que recogen la información leída y la clasifican temáticamente. Fichar un libro o un artículo es un intento por sintetizarlo de manera ordenada, atendiendo a los propósitos del autor y a las ideas en las cuales apoya sus propuestas. Su utilidad reside en que nos ayudan a manipular cantidades grandes de información que, agrupadas en temas, constituyen un insumo provechoso durante el proceso de escritura.

Las partes de una ficha son:

1. Los datos bibliográficos del texto consultado (deben incluir las páginas específicas).

2. El cuerpo de la ficha: un breve párrafo que describe el contenido de una parte del texto leído.

3. Un título que sintetiza el contenido.

Toma en cuenta las siguientes sugerencias para la elaboración de las fichas.

1. ¿Cómo organizar los datos bibliográficos?

La ficha debe citar el nombre del autor, el año de publicación, el título, la ciudad donde fue publicada la obra, el nombre de la casa editorial y, al final, la página o páginas de las que extrajiste la información. Escribe estos datos con mucha precisión; la ficha debe servir para referirse a un libro o artículo y para citarlo adecuadamente.

2. ¿Cómo redactar el contenido de la ficha?

Si se trata de una ficha de resumen, escribe el contenido con tus propias palabras, es decir, propón una paráfrasis del fragmento fichado. Para ello, deberás echar mano de supresiones, que eliminen las repeticiones, ampliaciones y descripciones innecesarias; y de generalizaciones, que agrupen ideas específicas en otras más generales que las contengan. Es importante que elabores un glosario de cada texto.

3. ¿Cómo formular el título?

Los textos tratan uno o varios temas: son acerca de algo. Los fragmentos en los que puede ser dividido suelen abordar aspectos específicos de ese asunto. ¿De qué trata el fragmento? El título debe responder esta pregunta. Debe ser, pues, una síntesis del pasaje del texto expresada en pocas y precisas palabras. Lo último que se escribe en la ficha es el título.

En la medida en que la lectura se vaya volviendo un hábito para ti, descubrirás tus propios recursos, suplirás algunos pasos, realizarás simultáneamente varias tareas y adquirís agilidad. Hay que animarse a hacerlo con detenimiento y constancia. Si nos mueve la curiosidad (y no solo la obligación), el trabajo se lleva de manera distinta; cuando nos llevan el entusiasmo y el interés intelectual, el ritmo es otro

En este apartado te hemos presentado diferentes técnicas o estrategias de aprendizaje para que organices tu estudio. No significa que las uses a todas, sino que las vayas poniendo en práctica para ver cuáles te dan mejor resultado. Debes saber que no todos estudiamos de la misma manera, por lo tanto, cada uno se siente más cómodo con técnicas diferentes, además no todos los textos permiten usar todas las técnicas.

<u>Autoevaluación y preparación para los exámenes</u>

Algunas sugerencias

⇐ Averigua bien de qué se trata el examen.

⇐ En los exámenes finales, ve con ropa adecuada (camisa blanca, pantalón azul o negro) y lleva tu documento y libreta.

⇐ Presta atención a los temas que el profesor resalta como importantes.

⇐ Chequea si tienes completos tus apuntes y textos.

⇐ Pregúntale al profesor cómo será el examen.

⇐ Utiliza un método: hacer pre-lectura, leer y detectar ideas importantes, organiza la información utilizando una técnica, fijar fechas, nombres, etc., prepara adecuadamente tu lugar de estudio. Conocer y aplicar estrategias de aprendizaje y actitudes de estudio responsable y diario, posibilitará llevar las materias al día para su mejor aprovechamiento y poder cumplir con las metas propuestas

Para culminar, te presentamos algunas ideas para que sigas reflexionando esta inserción a la vida de la educación superior:

⇐ El estudiante goza de mayor libertad, pero hay que saber manejarla.

⇐ El estudiante debería aprender a tolerar situaciones adversas que se pueden presentar, porque no todas las materias me agradaran de la misma manera, ni todo se va ajustar a mis necesidades, conveniencias, intereses, gustos.

⇐ Se debería aprovechar todas oportunidades que el Instituto de Formación Docente brinda para hacer uso responsable de las mismas.

⇐ Reconocer y advertir la importancia de adoptar una actitud de autoevaluación permanente, esto permitirá corregir aspectos negativos.

Ser estudiante del Profesorado significa ser un sujeto ético, comprometido consigo mismo, con los otros, con el medio, con la institución, además ser consciente de las propias limitaciones con el objetivo de recurrir a los medios necesarios para superarlas y al mismo tiempo poder descubrir las potencialidades que se poseen. Recuerda que la mejor manera de estudiar es HACIENDO.

<u>Guía para elaborar el Trabajo Práctico Nº 1</u>

Ahora a poner en práctica las estrategias de aprendizaje sugeridas en el presente módulo que, como estudiante de nivel superior, deberás desarrollar.

- Lectura veloz del texto completo
- Subrayado de ideas principales con un color y secundarias con otro color
- Elaboración de una ficha.

Los profesores como intelectuales transformativos

Henry A. Giroux

"Si creemos que el papel de la enseñanza no puede reducirse al simple adiestramiento en las habilidades prácticas sino que, por el contrario, implica la educación de una clase de intelectuales vital para el desarrollo de una sociedad libre, entonces la categoría de intelectual sirve para relacionar el objetivo de la educación de los profesores, de la instrucción pública y del perfeccionamiento de los docentes con los principios mismos necesarios para desarrollar una ordenación y una sociedad democráticas".

A continuación, trataré de defender la idea de que una manera de repensar y reestructurar la naturaleza del trabajo docente es la de contemplar a los profesores como intelectuales transformativos. La categoría de intelectual resulta útil desde diversos puntos de vista. En primer lugar, ofrece una base teórica para examinar el trabajo de los docentes como una forma de tarea intelectual, por oposición a una definición del mismo en términos puramente instrumentales o técnicos. En segundo lugar, aclara los tipos de condiciones ideológicas y prácticas necesarias para que los profesores actúen como intelectuales.

En tercer lugar, contribuye a aclarar el papel que desempeñan los profesores en la producción y legitimación de diversos intereses políticos, económicos y sociales a través de las pedagogías que ellos mismos aprueban y utilizan.

Al contemplar a los profesores como intelectuales, podemos aclarar la importante idea de que toda actividad humana implica alguna forma de pensamiento. Ninguna actividad, por rutinaria que haya llegado a ser, puede prescindir del funcionamiento de la mente hasta una cierta medida. Este es un problema crucial, porque al sostener que el uso de la mente es un componente general de toda actividad humana, exaltamos la capacidad humana de integrar pensamiento y práctica, y al hacer esto ponemos de relieve el núcleo de lo que significa contemplar a los profesores como profesionales reflexivos de la enseñanza. Dentro de este discurso, puede verse a los profesores como algo más que «ejecutores profesionalmente equipados para hacer realidad efectiva cualquiera de las metas que se les señale. Más bien (deberían) contemplarse como hombres y mujeres libres con una especial dedicación a los valores de la inteligencia y al encarecimiento de la capacidad crítica de los jóvenes».

La visión de los profesores como intelectuales proporciona, además, una fuerte crítica teórica de las ideologías tecnocráticas e instrumentales subyacentes a una teoría educativa que separa la conceptualización, la planificación y el diseño de los currículos de los procesos de aplicación y ejecución. Hay que insistir en la idea de que los profesores deben ejercer activamente la responsabilidad de plantear cuestiones serias acerca de lo que ellos mismos enseñan, sobre la forma en que deben enseñarlo y sobre los objetivos generales que persiguen.

Esto significa que los profesores tienen que desempeñar un papel responsable en la configuración de los objetivos y las condiciones de la enseñanza escolar. Semejante tarea resulta imposible dentro de una división del trabajo en la que los profesores tienen escasa influencia sobre las condiciones ideológicas y económicas de su trabajo. Este punto tiene una dimensión normativa y política que parece especialmente relevante para los profesores.

Si creemos que el papel de la enseñanza no puede reducirse al simple adiestramiento en las habilidades prácticas sino que, por el contrario, implica la educación de una clase de intelectuales vital para el desarrollo de una sociedad libre, entonces la categoría de intelectual sirve para relacionar el objetivo de la educación de los profesores, de la instrucción pública y del perfeccionamiento de los docentes con los principios mismos necesarios para desarrollar una ordenación y una sociedad democráticas.

Personalmente he sostenido que el hecho de ver a los profesores como intelectuales nos capacita para empezar a repensar y reformar las tradiciones y condiciones que hasta ahora han impedido que los profesores asuman todo su potencial como académicos y profesionales activos y reflexivos. Creo que es importante no sólo ver a los profesores como intelectuales, sino también contextualizar en términos políticos y normativos las funciones sociales concretas que realizan los docentes. De esta manera, podemos ser más específicos acerca de las diferentes relaciones que entablan los profesores tanto con su trabajo como con la sociedad dominante.

Un punto de partida para plantear la cuestión de la función social de los profesores como intelectuales es ver las escuelas como lugares económicos, culturales y sociales inseparablemente ligados a los temas del poder y el control. Esto quiere decir que las escuelas no se limitan simplemente a transmitir de manera objetiva un conjunto común de valores y conocimientos. Por el contrario, las escuelas son lugares que representan formas de conocimiento, usos lingüísticos, relaciones sociales y valores que implican selecciones y exclusiones particulares a partir de la cultura general. Como tales, las escuelas sirven para introducir y legitimar formas particulares de vida social. Más que instituciones objetivas alejadas de la dinámica de la política y el poder, las escuelas son de hecho esferas debatidas que encarnan y expresan una cierta lucha sobre qué formas de autoridad, tipos de conocimientos, regulación moral e interpretaciones del pasado y del futuro deberían ser legitimadas y transmitidas a los estudiantes.

Esta lucha es del todo evidente, por ejemplo, en las exigencias de los grupos religiosos de derechas, que tratan de imponer la oración en la escuela, de retirar determinados libros de las bibliotecas escolares y de incluir algunas enseñanzas religiosas en los currículos científicos. Naturalmente, también presentan sus propias demandas las feministas, los ecologistas, las minorías y otros grupos de interés que creen que las escuelas deberían enseñar estudios femeninos, cursos sobre el entorno o historia de los negros. En pocas palabras, las escuelas no son lugares neutrales, y consiguientemente tampoco los profesores pueden adoptar una postura neutral.

En el sentido más amplio, los profesores como intelectuales han de contemplarse en función de los intereses ideológicos y políticos que estructuran la naturaleza del discurso, las relaciones sociales de aula y los valores que ellos mismos legitiman en su enseñanza. Con esta perspectiva en la mente, quiero extraer la conclusión de que, si los profesores han de educar a los estudiantes para ser ciudadanos activos y críticos, deberían convertirse ellos mismos en intelectuales transformativos.

Un componente central de la categoría de intelectual transformativo es la necesidad de conseguir que lo pedagógico sea más político y lo político más pedagógico. Hacer lo pedagógico más político significa insertar la instrucción escolar directamente en la esfera política, al demostrarse que dicha instrucción representa una lucha para determinar el significado y al mismo tiempo una lucha en torno a las relaciones de poder. Dentro de esta perspectiva, la reflexión y la acción críticas se convierten en parte de un proyecto social fundamental para ayudar a los estudiantes a desarrollar una fe profunda y duradera en la lucha para superar las injusticias económicas, políticas y sociales y para humanizarse más a fondo ellos mismos como parte de esa lucha. En este sentido, el conocimiento y el poder están inextricablemente ligados a la presuposición de que escoger la vida, reconocer la necesidad de mejorar su carácter democrático y cualitativo para todas las personas, equivale a comprender las condiciones previas necesarias para luchar por ello.

Hacer lo político más pedagógico significa servirse de formas de pedagogía que encarnen intereses políticos de naturaleza liberadora; es decir, servirse de formas de pedagogía que traten los estudiantes como sujetos críticos, hacer problemático el conocimiento, recurrir al diálogo crítico y afirmativo, y apoyar la lucha por un mundo cualitativamente mejor para todas las personas. En parte, esto sugiere que los intelectuales transformativos toman en serio la necesidad de conceder a los estudiantes voz y voto en sus experiencias de aprendizaje. Ello implica, además, que hay que desarrollar un lenguaje propio atento a los problemas experimentados en el nivel de la vida diaria, particularmente en la medida en que están relacionados con las experiencias conectadas con la práctica del aula. Como tal, el punto de partida pedagógico para este tipo de intelectuales no es el estudiante aislado, sino los individuos y grupos en sus múltiples contextos culturales, de clase social, raciales, históricos y sexuales, juntamente con la particularidad de sus diversos problemas, esperanzas y sueños.

Los intelectuales transformativos necesitan desarrollar un discurso que conjugue el lenguaje de la crítica con el de la posibilidad, de forma que los educadores sociales reconozcan que tienen la posibilidad de introducir algunos cambios. En este sentido los intelectuales en cuestión tienen que pronunciarse contra algunas injusticias económicas, políticas y sociales, tanto dentro como fuera de las escuelas.

Paralelamente, han de esforzarse por crear las condiciones que proporcionen a los estudiantes la oportunidad de convertirse en ciudadanos con el conocimiento y el valor adecuados para luchar con el fin de que la desesperanza resulte poco convincente y la esperanza algo práctico. Por difícil que pueda parecer esta tarea a los educadores sociales, es una lucha en la que merece la pena comprometerse.

Comportarse de otro modo equivaldría a negar a los educadores sociales la oportunidad de asumir el papel de intelectuales transformativos.

EJE Nº 2 - CONOCIENDO EL CONTEXTO INSTITUCIONAL

La dimensión jurídico-normativa del IES en el contexto del Sistema formador

A nivel jurisdiccional, se contemplan tres documentos regulatorios:

⇐ Régimen Académico Provincial (RAP) Resolución Nº 6815-E-11

⇐ Diseño Curricular Provincial de la Carrera Profesorado de Educación Secundaria en Matemática. Resolución Nº 13957-E-19

⇐ Marco Provincial de Regulación de la Practica Profesional. Resolución Nº 4469-E-17

RÉGIMEN ACADÉMICO PROVINCIAL (RES. 6815-E-11)

La Resolución Nº 6815-E-11, conocida como Régimen Académico Provincial (RAP), es una normativa que:

- Establece las normas generales de organización académica y administrativa para los institutos de educación superior de la Provincia de Jujuy.
- Se aplica a todos los Institutos de Educación Superior oficiales de la provincia — sean estatales, privados, cooperativos o de gestión social — que están incorporados a la enseñanza oficial.

Tiene fuerza de norma interna para ese nivel educativo y define cómo deben organizarse aspectos básicos del funcionamiento académico dentro de esos institutos.

¿Qué contiene la Resolución?

1. Disposiciones Generales

Determina que el régimen se aplica en todos los institutos de educación superior de la provincia que estén incorporados formalmente al sistema educativo.

2. Categorías de Alumnos

El RAP establece qué tipos de alumnos existen dentro de los institutos y qué significa cada uno:

Alumnos Ordinarios: Inscritos en una carrera regular; para mantener esta condición deben aprobar al menos una unidad curricular por año calendario.

Alumnos Oyentes: Pueden asistir a clases sin derecho a rendir evaluaciones ni instancias de acreditación, previa inscripción y aceptación institucional.

Alumnos Extraordinarios:

Vocacionales: Matriculados en cursos puntuales que no buscan título, pero que reciben certificación por unidad curricular aprobada.

Visitantes: Estudiantes de otros institutos (nacionales o extranjeros) que cursan temporalmente bajo convenio.

3. Ingreso de Alumnos

Regula cómo deben matricularse los estudiantes:

Para ser alumno ordinario deben presentar documentación como título secundario completo o constancia de título en trámite, DNI, certificado de nacimiento y aptitud psicofísica, entre otros requisitos.

La matrícula se renueva anualmente para mantener derechos académicos.

4. Condiciones de Cursado y Acreditación

El régimen también regula:

La forma en que se inscriben las materias, ya sean anuales o por cuatrimestres.

El respeto a correlatividades entre materias (es decir, qué materias son previas de otras).

La estructura pedagógica de las unidades curriculares, que puede incluir diferentes formatos y estrategias para facilitar el aprendizaje y su acreditación.

5. Desarrollo Normativo Posterior

En 2024 se aprobó una modificación de esta resolución (Res. 858-E/2024) que reformula parte de sus capítulos, especialmente los vinculados al otorgamiento de equivalencias, adaptándolo a nuevas necesidades administrativas del sistema de educación superior.

¿Qué importancia tiene esta normativa?

La Res. 6815-E-11 es fundamental porque:

- Define quién puede ser alumno y bajo qué condiciones.
- Establece los requisitos para inscribirse y cursar en el nivel superior no universitario.
- Armoniza criterios académicos entre instituciones públicas y privadas dentro de la provincia.
- Da un marco legal para la evaluación, seguimiento y acreditación de estudios dentro de los institutos superiores.
- Influye en trámites cotidianos como inscripciones, regularidad, contenidos mínimos y evaluación.

DISEÑO CURRICULAR PROVINCIAL DE LA CARRERA PROFESORADO DE EDUCACIÓN SECUNDARIA EN MATEMÁTICA. RESOLUCIÓN 13957-E-19

La Resolución Nº 13957-E-19 es la norma del Ministerio de Educación de la Provincia de Jujuy que aprueba el Diseño Curricular Provincial para la Formación Docente Inicial del Profesorado de Educación Secundaria en Matemática.

Ese diseño curricular constituye el plan de estudios oficial que deben implementar todos los Institutos de Formación Docente de la provincia para dictar esta carrera.

Este diseño establece formalmente:

- ✓ La duración de la carrera,
- ✓ La estructura de los campos de formación,
- ✓ La carga horaria total,
- ✓ La distribución de materias/áreas temáticas,
- ✓ Los lineamientos pedagógicos para la formación de futuros docentes de matemática.

La normativa también fue implementada y adaptada posteriormente por otras resoluciones (por ejemplo, la Res. 1352-E/20 que modifica cargas horarias y estructura curricular), y actualmente sigue vigente para las cohortes 2025 y 2026.

Estructura general del Diseño Curricular

Duración y carga horaria

El plan está organizado para 4 años académicos de formación.

La carga horaria total del trayecto es de 3904 horas cátedra (equivalentes a 2602 horas reloj).

Esta carga está distribuida en cuatro grandes campos de formación:

1. Formación General
2. Formación Específica (disciplinar)
3. Práctica Profesional
4. Unidad Curricular de Definición Institucional

¿Qué significa cada campo de formación?

1. Campo de la Formación General

Incluye materias relacionadas con las bases pedagógicas, sociales y culturales que sostienen la profesión docente. Aquí se desarrollan conocimientos vinculados con didáctica general, fundamentos educativos, psicología educativa, ética, políticas educativas y otros saberes que ayudan a comprender el rol docente y la profesión desde una perspectiva amplia.

2. Campo de la Formación Específica

Corresponde al cuerpo de contenidos matemáticos y didácticos específicos de la enseñanza de la matemática. Este campo articula:

- Saber matemático profundo
- Didáctica de la matemática
- Integración de tecnología y herramientas para la enseñanza
- Contextualización de saberes disciplinarios matemáticos con la práctica escolar

Este campo concentra la mayor parte de la formación (más del 50 % de la carga total) y prepara a los estudiantes para dominar los contenidos propios de la matemática y su transposición pedagógica, es decir, cómo enseñar y hacer enseñar matemática en el nivel secundario.

3. Campo de la Práctica Profesional

Este campo contempla el desarrollo progresivo de capacidades para la actuación docente real en contextos educativos. Abarca actividades estructuradas como:

- Talleres de práctica docente
- Residencia pedagógica
- Observación, planificación, ejecución y evaluación de la enseñanza en escuelas asociadas

La práctica profesional es una parte clave de la formación y se incrementa en responsabilidad y profundidad a lo largo del trayecto curricular.

4. Unidad Curricular de Definición Institucional

Es un espacio que permite a cada institución formadora incorporar proyectos, seminarios o materias que respondan a su identidad institucional, prioridades específicas y características del contexto regional. Esto hace el currículo flexible y adaptable a las necesidades locales.

Implementación y vigencia

La resolución fue adoptada y puesta en marcha gradualmente en todos los Institutos de Educación Superior de Jujuy que ofrecen la carrera (por ejemplo: IES N°1 La Quiaca, IES N°5 San Salvador de Jujuy, IES N°6 Perico, IES N°9 San Pedro, IES N°10 Libertador San Martín).

Además, se actualizaron aspectos puntuales (como cargas horarias de algunas materias) con la Resolución 1352-E/20, manteniendo la estructura general original del diseño curricular aprobado por la 13957-E/19.

MARCO PROVINCIAL DE REGULACIÓN DE LA PRÁCTICA PROFESIONAL. RESOLUCIÓN Nº 4469-E-17

La Resolución Nº 4469-E-17 del Ministerio de Educación de la Provincia de Jujuy aprueba las modificaciones al Marco Provincial de Regulación de la Práctica Profesional para los Institutos de Educación Superior de la provincia. Esta normativa:

- Actualiza y redefine las reglas generales que organizan la formación práctica docente en las carreras de educación superior.
- Integra las prácticas profesionales como eje fundamental del perfil formativo de los futuros docentes.
- Deriva de una revisión del documento original (Resolución Nº 4597-E/15) para ajustar la regulación curricular y organizativa de las prácticas.

¿Cuál es el propósito de esta regulación?

El Marco Provincial de Regulación de la Práctica Profesional tiene como objetivos principales:

- Definir la práctica profesional como un campo curricular integrado y sustantivo del trayecto formativo docente.
- Garantizar una articulación coherente entre teoría y práctica, vinculando los saberes disciplinarios con la acción educativa en contextos reales.
- Orientar la organización, desarrollo, evaluación y acreditación de las unidades curriculares que componen el campo de la práctica.
- Promover la interacción entre institutos formadores y escuelas asociadas, para que los estudiantes desarrollen experiencias formativas en contextos educativos diversos.

¿Qué regula específicamente la Resolución?

1. Ámbito de aplicación

Establece que esta normativa es de aplicación obligatoria en todos los Institutos de Educación Superior de la provincia de Jujuy que dictan carreras de formación docente.

2. Marco Curricular

La práctica profesional es concebida como un campo curricular integrador, destinado al desarrollo de capacidades para la acción profesional docente. Este campo:

- Integra saberes de otros campos de formación (general y específica).
- Promueve la reflexión didáctica, análisis y evaluación de situaciones reales de enseñanza.
- Debe articularse con los diseños curriculares jurisdiccionales de cada carrera.

3. Organización y gestión

Se establecen lineamientos para:

- La conformación de equipos de práctica dentro de cada instituto, compuestos por docentes del campo y coordinadores de carrera.
- La elaboración de un "Proyecto Anual de Prácticas" por carrera, que detalle objetivos, dispositivos de formación, estrategias de evaluación, actividades planificadas y cronogramas.
- La organización de equipos de trabajo interinstitucional con escuelas asociadas donde se desarrollan las experiencias.

4. Instancias de práctica

La resolución distingue varias instancias dentro del campo de la práctica profesional, entre ellas:

a) Formación inicial en contextos reales: Los estudiantes participan progresivamente en experiencias educativas auténticas en escuelas u organizaciones asociadas, con responsabilidades crecientes.

b) Microclases y planificación didáctica: Incluye espacios de planificación e intervención pedagógica donde se diseñan, ejecutan y evalúan propuestas de enseñanza bajo supervisión.

c) Residencia pedagógica: Etapa en la que el estudiante asume funciones docentes de forma más integral, con observación activa, análisis de casos, preparación de clases y colaboraciones con proyectos institucionales.

d) Sistematización de experiencias: Espacio final donde los futuros docentes organizan y reflexionan sobre lo aprendido, construyen informes o memorias de práctica y comparten análisis y resultados con pares.

5. Participación y funciones de actores clave

Instituciones asociadas:

Las prácticas se desarrollan en instituciones definidas formalmente como asociadas (por convenio), que facilitan la integración de los estudiantes en contextos reales de enseñanza.

Docentes formadores y responsables de práctica:

La resolución define roles y responsabilidades para:

- Docentes del instituto que acompañan y supervisan al estudiante.
- Docentes de las escuelas asociadas que interactúan con los futuros docentes.
- Coordinadores que articulan planificación, seguimiento y evaluación.

6. Evaluación

La normativa indica que la evaluación de las unidades curriculares del campo de la práctica debe ser:

- Formativa, procesual e integral: acompañada de informes, observaciones y actividades planificadas, no solo de exámenes puntuales.
- Basada en informes individuales del estudiante, informes de los docentes formadores, y del docente responsable de la práctica.
- Con un coloquio final donde se analizan todas las evidencias de aprendizaje y desempeño profesional.

7. Obligaciones del estudiante practicante

Los estudiantes que cursan las prácticas también tienen deberes explícitos, tales como:

- ✓ Respetar los cronogramas y horarios acordados.
- ✓ Mantener conductas acordes al rol docente.
- ✓ Presentar informes, reflexiones y actividades didácticas según lo planificado.
- ✓ Participar activamente en las instancias de evaluación, observación y reflexión.

¿Por qué es importante esta normativa?

La Resolución Nº 4469-E-17 es fundamental porque:

- Regula de manera integral cómo se organiza y evalúa la práctica profesional dentro del sistema formador provincial.
- Establece un marco pedagógico, organizativo y evaluativo para que los futuros docentes desarrollen competencias reales en escuelas.
- Genera condiciones para una formación reflexiva, articulada y contextualizada de los estudiantes hacia la profesión docente.

Guía para elaborar el Trabajo Práctico Nº 2

Consulta las páginas de Internet del Ministerio de Educación de la Nación y el Ministerio de Educación de la Provincia de Jujuy

https://www.argentina.gob.ar/capital-humano/educacion

https://educacion.jujuy.gob.ar/

Realiza una exploración del contenido. Incursiona en el nivel para el que te formas.

Realiza la lectura de los siguientes documentos para la próxima clase: Régimen Académico Provincial (RAP) Resolución Nº 6815-E-11

- Diseño Curricular Provincial de la Carrera Profesorado de Educación Secundaria en Matemática. Resolución Nº 13957-E-19
- Marco Provincial de Regulación de la Práctica Profesional. Resolución Nº 4469-E-17

En el siguiente QR encontrarás todos estos documentos y otros de suma importancia.

EJE Nº 3 ACOMPAÑAR LA TRAYECTORIA DE FORMACIÓN:

¿QUÉ ES LA FORMACIÓN INICIAL?

El Instituto de Educación Superior te brinda formación inicial. La formación inicial es la que permite desempeñarte como profesional, que en este caso consiste en desempeñarte como profesional docente. Se enmarca dentro del Nivel Superior o denominado también Terciario –para diferenciarlo del nivel cuaternario que comprende los posgrados-.

La formación inicial comprende todas las unidades curriculares de los tres campos de formación, desde 1º año hasta 4º año. Según el Diseño Curricular, la formación inicial –en el sistema formador provincial- asume la responsabilidad de considerar a la docencia como una práctica de mediación cultural reflexiva y crítica, que posibilita a los docentes en formación el desarrollo de capacidades que les permitan intervenciones de enseñanza que potencien las capacidades de aprendizajes de los alumnos a través del reconocimiento de las múltiples formas de aprender.

Tanto la teoría pedagógica y curricular, como las vivencias cotidianas, ponen de manifiesto que los recorridos de los estudiantes son diversos y que pueden, incluso, alejarse de esos itinerarios propuestos. Esto se debe también a la incertidumbre de los "efectos" de las prácticas curriculares y de enseñanza, de los resultados no esperados e, incluso, no deseados.

En otras palabras, se debe a la tensión constitutiva en la empresa educativa entre intención e instrumentación, entre las aspiraciones pedagógicas y las acciones. Se trata de pensar, asimismo, que el Diseño y el recorrido de la trayectoria es formativo en sí mismo, que no es un aspecto secundario, azaroso, insignificante o accidentado cuando no se "cumple" de acuerdo a lo ya pensado. O que "la" trayectoria ya está fijada y que lo que queda es ver cómo recorrerla de la manera más próxima al ideal.

¿Qué es el plan de estudios de la carrera?

El plan de estudios de la carrera es la denominación que adopta el conjunto de unidades curriculares o materias que integran el Diseño Curricular de la carrera. El Diseño Curricular es un documento que surge de la producción del equipo técnico jurisdiccional en consulta con los/las docentes (profesores/as, directivos, supervisores, equipos técnicos del nivel para el que se forma) de educación superior de todos los profesorados de la Provincia.

El plan de estudios contiene las diferentes materias, unidad curriculares o también llamados espacios curriculares que debes estudiar durante los cuatro años de duración de la carrera, habrás observada que las unidades curriculares se encuentran distribuidas en campos de formación. Entonces surge el siguiente interrogante: ¿a qué se refieren los campos de formación?

Se puede decir que el campo de formación general promueve la formación cultural, social y política del docente profesional, trabajador y transformador de la cultura. Te posibilitará miradas profundas para el análisis, comprensión y valoración del contexto histórico cultural, de la educación, de la enseñanza y el aprendizaje, a través de la formación de juicios críticos, socialmente relevantes.

Los Lineamientos Curriculares Nacionales definen al campo de la Formación General como orientado a "asegurar la comprensión de los fundamentos de la profesión dotados de validez conceptual y de la necesaria transferibilidad para la actuación profesional orientando el análisis de los distintos contextos socio-educacionales y toda una gama de decisiones en la enseñanza" (Resolución 24/07). Es decir que no se refiere exclusivamente al campo del conocimiento pedagógico, sino que es mucho más amplio, porque propone una formación humanística sólida, enriquecida cotidianamente con la dinámica propia del proceso de construcción de saberes.

Mientras que el campo de formación específica está orientado al estudio de la/s disciplina/s específicas para la enseñanza en la especialidad en que decidiste formarte, la didáctica y las tecnologías educativas particulares, así como de las características y necesidades propias de los alumnos a nivel individual y colectivo.

Este campo, constituye, por lo tanto, un aspecto crucial de la formación del docente, ya que, junto con las experiencias formativas propias de los otros campos, aporta herramientas conceptuales y metodológicas para llevar a cabo la enseñanza de los diferentes aspectos y contenidos que integran el currículo de la escuela secundaria. Es necesario promover un sólido dominio del conocimiento conceptual y epistemológico de estos saberes específicos por parte de los docentes en formación, pues ello garantiza la elección de estrategias didácticas adecuadas que permitan el desarrollo de aprendizajes con sentido, que posean significaciones relevantes, social y cognitivamente en los alumnos/as del nivel.

El campo de la práctica profesional implica reconocerla como un espacio de aprendizaje, tal como la concibe la Perspectiva Práctica sobre la formación docente. La tesis de esta perspectiva plantea como eje la producción de conocimiento en relación con la práctica, que surja de la misma y vuela sobre ella con sentido interpretativo, iluminativo más que prescriptivo.

Concebir la práctica como espacio de aprendizaje representa la posibilidad de acceder a un conocimiento nuevo, para resignificarlo, para adaptarlo a situaciones y problemas concretos y singulares a través de un proceso que integre explicaciones, interpretaciones y acción. De este modo, el campo de la práctica profesional se desarrolla durante los cuatro años de formación. En cada año se incluyen unidades curriculares (asignatura, materia, disciplina) con distintos formatos y con especificaciones sobre el régimen de cursado, el cuatrimestre en que se realiza, el espacio real de desarrollo, los contenidos que incluye y orientaciones para su proceso y evaluación.

Las prácticas previstas suponen tu inserción total en las aulas y en las responsabilidades de las prácticas de enseñanza, como la planificación, el desarrollo y evaluación de propuestas de enseñanza adecuadas a los contextos y sujetos específicos.

Guía para elaborar el Trabajo Práctico Nº 3

Lee el RAP y realiza un resumen de los principales puntos. Consulta sobre el Diseño Curricular de la carrera

1.- Elabora un cuadro comparativo estableciendo las diferencias y semejanzas entre los tres campos de formación: general, específico y práctica profesional.

a) Elabora un esquema acerca de los formatos curriculares que adopta el Diseño Curricular Jurisdiccional.

b) ¿Por qué decimos que la práctica profesional transversaliza toda la carrera? ¿Qué importancia tiene esto para tu formación como docente?

EJE Nº 4 ALGUNAS REFLEXIONES SOBRE LA ELECCIÓN DE LA DOCENCIA

Ser Docente

Ser docente alude a tender puentes entre lo conocido y lo desconocido, entre lo vivido y lo por vivir, es un compromiso irrenunciable en pos del aprendizaje de los estudiantes. Pero, para ello, los educadores debemos conocer el currículo, las condiciones institucionales y la diversidad cultural de la sociedad, para pensar y crear intervenciones pertinentes y oportunas.

El Instituto de Educación Superior, como institución educativa, está llamado a constituirse como un lugar de encuentro, posibilitador de inter-aprendizaje, construcción de conocimientos y espacio de socialización, en donde el docente debe reencontrarse diariamente en su labor con la vocación de conocer, aprender y enseñar. Los educadores no deben perder de vista que el quehacer educativo constituye un desafío constante en el cual se reconoce la capacidad de los estudiantes para construir sus conocimientos y construirse a sí mismos.

El perfeccionamiento docente debe ser capaz de proporcionar aprendizajes funcionales para que los docentes/alumnos puedan enfrentarse a los cambios sociales, proporcionando continuidad y tradición para constituir un referente prioritario en el diseño y en el análisis curricular. Los docentes están llamados y obligados a crear un ambiente propicio para el aprendizaje de los estudiantes, estableciendo relaciones empáticas, proponiendo expectativas de aprendizajes desafiantes, estableciendo y manteniendo normas consistentes y consensuadas de disciplina en el aula. Para ello se deberá procurar que las metas y procedimientos involucrados en el aprendizaje sean claros, de tal modo que la enseñanza sea efectiva. El inicio a la docencia: construyendo el oficio

Ningún comienzo es fácil. En todas las actividades de la vida, el principio suele entusiasmar, pero también, desconcertar. Se trata de reflexionar sobre los comienzos, tomando como referencia las cuestiones más generales relativas a sus aspectos prácticos y a su formación. Es indagando en la naturaleza del oficio para producir reflexiones que nos permitan avanzar para comprender la enseñanza, con la finalidad de conocer los procesos de formación de quienes la ejercen: los docentes. La palabra oficio es portadora de distintos significados, que remiten a “ocupación”, “cargo”, “profesión”, “función”.

Se podría decir entonces, que la enseñanza es todo eso. Quien enseña, tendría como meta fundamental transformar a los otros. El oficio remite entonces a la manera en que el docente hace su trabajo, cómo lo hace. La construcción del oficio (lo que hay que hacer y cómo hacerlo) sería casi una aventura personal cuyo desenlace es una función de la relación entre ciertas características ligadas a la trayectoria (social, de formación, experiencia profesional, etc.) y el contexto de ejercicio del trabajo docente (el nivel educativo, características de los establecimientos escolares, de los alumnos, etc.).

La docencia es un trabajo “con” y “sobre” los otros, es una actividad que se desarrolla en un conjunto de relaciones interpersonales intensas y sistemáticas y requiere algo más que el dominio y uso de conocimiento técnico racional especializado. Requiere también de la vocación.

Vocación y profesión son términos complementarios, por ello se suele afirmar que, por lo general, un trabajo bien hecho es obra de alguien a quien le gusta lo que hace, que encuentra satisfacción, placer haciendo lo que hace (vocación) pero, al mismo tiempo, espera una recompensa económica por el trabajo realizado, ya que vive “de él”. Por lo tanto, lo vocacional y lo profesional se presentan en la configuración de la tarea docente. Las exigencias actuales son complejas, en todo sentido. Pretendemos que los sujetos escolarizados cuenten con habilidades que le permitan crear y seleccionar información, tengan autonomía, capacidad para resolver problemas, una educación que atienda a la diversidad de conocimientos y valores, que forme para la participación e inserción en la sociedad y que atienda las necesidades sociales vinculadas con la salud y la alimentación, el cuidado, la contención, entre otros.

Lo que distingue a los profesionales de la educación es su competencia y habilitación en funciones pedagógicas, que son actividades específicas basadas en el dominio de aquel conocimiento autónomo de la educación que permite generar decisiones pedagógicas. Es posible identificar al menos tres tipos de funciones pedagógicas distintas, en función del crecimiento del sistema escolar y del conocimiento del fenómeno educativo:

⇐ Funciones de docencia.

⇐ Funciones de apoyo al sistema educativo.

⇐ Funciones de investigación.

En esta instancia, solo abordaremos las funciones de la docencia, puesto que son éstas las que se deben explicitar a los fines de conocer la tarea para la cual comienzas a formarte profesionalmente.

Funciones de los docentes hoy

A diferencia de lo que ocurría hace 100 años, en la sociedad actual resulta bastante fácil para las personas acceder en cada momento a la información que requieren (siempre que dispongan de las infraestructuras necesarias y tengan las adecuadas competencias digitales, en este caso: estrategias para la búsqueda, valoración y selección de información). No obstante, y también a diferencia de lo que ocurría antes, ahora la sociedad está sometida a vertiginosos cambios que plantean continuamente nuevas problemáticas, exigiendo a las personas múltiples competencias procedimentales (iniciativa, creatividad, uso de herramientas TIC, estrategias de resolución de problemas, trabajo en equipo...) para crear el conocimiento preciso que les permita afrontarlas con éxito.

Por ello, hoy en día el papel de los formadores no solo es "enseñar" (explicar - examinar) unos conocimientos que tendrán una vigencia limitada y estarán siempre accesibles, sino también ayudar a los estudiantes a "aprender a aprender" de manera autónoma en esta cultura del cambio y promover su desarrollo cognitivo y personal mediante actividades críticas y aplicativas que, aprovechando la inmensa información disponible y las potentes herramientas TIC, tengan en cuenta sus características (formación centrada en el alumno) y les exijan un procesamiento activo e interdisciplinario de la información para que construyan su propio conocimiento y no se limiten a realizar una simple recepción pasiva –memorización- de la información.

Por otra parte, la diversidad de los estudiantes y de las situaciones educativas que pueden darse, aconseja que los formadores aprovechen los múltiples recursos disponibles (que son muchos, especialmente si se utiliza el ciberespacio) para personalizar la acción docente, y trabajen en colaboración con otros colegas (superando el tradicional aislamiento propiciado por la misma organización de las escuelas y la distribución del tiempo y del espacio) manteniendo una actitud investigadora en las aulas, compartiendo recursos (por ejemplo a través de las webs docentes), observando y reflexionando sobre la propia acción didáctica y buscando progresivamente mejoras en las actuaciones acordes con las circunstancias (investigación-acción).

Cada vez se abre más paso su consideración como un mediador de los aprendizajes de los estudiantes, cuyos rasgos fundamentales son (Tebar, 2003):

⇐ Es un experto que domina los contenidos, planifica (pero es flexible), establece metas: perseverancia, hábitos de estudio, autoestima, metacognición..., siendo su principal objetivo que el mediado construya habilidades para lograr su plena autonomía.

⇐ Regula los aprendizajes, favorece y evalúa los progresos; su tarea principal es organizar el contexto en el que se ha de desarrollar el sujeto, facilitando su interacción con los materiales y el trabajo colaborativo.

⇐ Fomenta el logro de aprendizajes significativos, transferibles...

⇐ Fomenta la búsqueda de la novedad: curiosidad intelectual, originalidad pensamiento convergente…

⇐ Potencia el sentimiento de capacidad: autoimagen, interés por alcanzar nuevas metas...

⇐ Enseña qué hacer, cómo, cuándo y por qué, ayuda a controlar la impulsividad.

⇐ Comparte las experiencias de aprendizaje con los alumnos: discusión reflexiva, fomento de la empatía del grupo.

⇐ Atiende las diferencias individuales

⇐ Desarrolla en los alumnos actitudes positivas: valores...

En este marco, las principales funciones que debemos realizar los docentes hoy en día son las siguientes:

⇐ Diagnóstico de necesidades: Conocer al alumnado y establecer el diagnóstico de sus necesidades. Conocer las características individuales (conocimientos, desarrollo cognitivo y emocional, intereses, experiencia, historial...) y grupales (coherencia, relaciones, afinidades, experiencia de trabajo en grupo...) de los estudiantes en los que se desarrolla su docencia.

⇐ Preparar las clases: Organizar y gestionar situaciones mediadas de aprendizaje con estrategias didácticas que consideren la realización de actividades de aprendizaje (individuales y cooperativas) de gran potencial didáctico y que consideren las características de los estudiantes.

⇐ Planificar cursos: Diseño del currículum: objetivos, contenidos, actividades, recursos, evaluación.

⇐ Diseñar estrategias de enseñanza y aprendizaje (intervenciones educativas concretas, actividades). Esto implica:

- Preparar estrategias didácticas (series de actividades) que incluyan actividades motivadoras, significativas, colaborativas, globalizadoras y aplicativas.

- Promover los aprendizajes que se pretenden y contribuir al desarrollo de la personal y social de los estudiantes.

- Encaminar a los estudiantes hacia el aprendizaje autónomo y promover la utilización autónoma de los conocimientos adquiridos, con lo que aumentará su motivación al descubrir su aplicabilidad.

- Diseñar entornos de aprendizaje que consideren la utilización (contextualizada e integrada en el currículum) de los medios de comunicación y los nuevos instrumentos informáticos y telemáticos (TIC), aprovechando su valor informativo, comunicativo y motivador. Así preparará oportunidades de aprendizaje para sus alumnos.

- Aprovechar múltiples recursos y las aportaciones didácticas que pueden proporcionar sus distintos códigos y lenguajes.

- Considerar la posibilidad de ofrecer a los estudiantes diversas actividades que puedan conducir al logro de los objetivos (para facilitar el tratamiento de la diversidad mediante diferentes alternativas e itinerarios)

⇐ Buscar y preparar materiales para los alumnos, aprovechar todos los lenguajes:

- Elegir los materiales que se emplearán, el momento de hacerlo y la forma de utilización, cuidando de los aspectos organizativos de las clases (evitar un uso descontextualizado de los materiales didácticos). Estructurar los materiales de acuerdo con los conocimientos previos de los alumnos (si es necesario establecer niveles).

- Diseñar y preparar materiales didácticos (en soporte convencional o TIC) que faciliten las actividades de enseñanza/aprendizaje.

La elaboración de materiales exige una preparación de las clases que redundará en eficacia.

- Seleccionar los recursos más adecuados en cada momento (según objetivos y contenidos, alumnos, contexto y las propias características del profesor).

Su eficacia didáctica dependerá del acierto de esta elección y de la manera en la que se prescriba su uso.

⇐ Utilizar los diversos lenguajes disponibles:

- Incorporar a los contenidos de la asignatura las aportaciones de los lenguajes icónicos, la multimedialidad, la estructuración hipertextual de la información... Conviene aprovechar todos los lenguajes para potenciar los aprendizajes de los estudiantes.

- Considerar también todos estos lenguajes al encargar actividades a los estudiantes, para que éstos aprendan a utilizarlos al crear sus documentos y mensajes. Esto facilitará luego su interacción en la sociedad (estos lenguajes forman parte de nuestra cultura).

⇐ Motivar al alumnado:

- Despertar el interés de los estudiantes (el deseo de aprender) hacia los objetivos y contenidos de la asignatura (establecer relaciones con sus experiencias vitales, con la utilidad que obtendrán...). Y mantenerlo.

- Motivar a los estudiantes en el desarrollo de las actividades (proponer actividades interesantes, incentivar la participación en clase...).

- En el caso de estudiantes on-line, resulta especialmente importante proporcionar apoyo y motivación continuada, pero sin agobiar (el riesgo de abandono de los estudiantes "a distancia" es mayor.

- Establecer un buen clima relacional, afectivo, que proporcione niveles elevados de confianza y seguridad: presentación inicial, aproximaciones personales.

⇐ Docencia centrada en el estudiante, considerando la diversidad.

- Informar a los estudiantes de los objetivos y contenidos de la asignatura, así como de las actividades que se van a realizar y del sistema de evaluación. Negociar posibles actividades a realizar.

- Impartir las clases gestionando las estrategias previstas y adaptando las actividades de aprendizaje a las circunstancias del momento (alumnos, contexto...).

⇐ Gestionar el desarrollo de las clases manteniendo el orden: Mantener la disciplina y el orden en clase (normas, horarios...). Las normas pueden ser tan abiertas como se considere oportuno, pero deben cumplirse.

⇐ Proporcionar información: Constituir una fuente de información para los alumnos, pero no la única (presentación de los aspectos más importantes de los temas, sus posibles aplicaciones prácticas, sus relaciones con otros temas conocidos...). Sugerir la consulta de otras fuentes alternativas Proporcionar a los estudiantes información básica sobre los contenidos de la asignatura (guión, visiones generales, textos básicos, esquemas...). Indicar fuentes de información, materiales didácticos y recursos diversos.

⇐ Facilitar la comprensión de los contenidos básicos y fomentar el auto-aprendizaje. - Realizar exposiciones magistrales que faciliten la comprensión de los contenidos básicos de la asignatura (visiones generales, conceptos difíciles, procedimientos…) - Establecer relaciones constantes entre los conocimientos previos de los estudiantes y la información objeto de aprendizaje. Velar por un aprendizaje significativo. - Dosificar los contenidos y repetir la información cuando sea conveniente.

Guía para elaborar el Trabajo Práctico Nº 4

Luego de haber trabajado el Eje Nº 4

Realiza un relato inicial, sincero sobre la elección de la carrera.

Tópicos a tener en cuenta en el relato:

- Experiencias de la niñez y de la adolescencia
- recuerdos significativos, momentos críticos,
- tipo de escuela,
- materias, profesores y familia que hayan influido en tu desición

Te proponemos que mires la película “Escritores de la libertad” que la puedes ver desde el sitio virtual YouTube.

https://www.youtube.com/watch?v=ZaIxnsaaZ34&list=PLdu4KrzhJ5kgmfF6iWQqS5ybDMpVcir8t&index=1

Es importante que luego puedas reflexionar sobre el quehacer docente, y lo puedas volcar en una carta dirigida a un amigo en la que rescates el significado, el sentido, las implicancias de la tarea docente en función del contexto en el cual transcurre su práctica sin perder de vista el objetivo principal de contribuir a la formación integral de los estudiantes.

La carta deberá tener una extensión mínima de una carilla y, como máximo, dos carillas. Letra Arial 12, interlineado 1,5. Este trabajo luego de concluido deberás enviarlo vía e-mail a tu profesora de ingreso, en la fecha que se te indicará.

Bibliografía

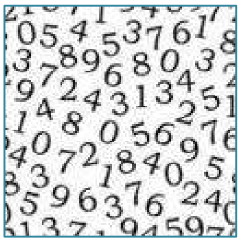
- Achilli, E. (1996). Práctica docente y diversidad sociocultural. Rosario: HomoSapiens.
- Alliaud, A. (2009). Iniciarse en la docencia. Los gajes del oficio. Revista de curriculum y formación del profesorado, 13.
- Alliaud, A. y otro (2011). Los gajes del oficio. Argentina: Aique.
- Birgin, A. (2006). Pensar la formación de los docentes en nuestro tiempo. En F. Terigi (Comp.), Diez miradas sobre la escuela primaria. Buenos Aires: Siglo XXI.
- Botta, M. Competencias Docentes para el Siglo XXI. Portal educ.ar (on line). Disponible en http://www.educ.ar/sitios/educar/recursos/ver?id=70822
- Edwards, V. (1992). Cómo aprende y como enseña el docente, un debate sobre el perfeccionamiento. Programa Interdisciplinario de Investigaciones en Educación. Santiago de Chile: PIIE
- Escudero, J. M. (1998). La formación permanente del profesorado: cultura, contenidos y procesos. Agenda Académica, 5 (1), Universidad Central de Venezuela.
- Feldman, D. (2011). Treinta y seis capacidades para la actividad docente en escuelas de educación básica. Argentina: Ministerio de Educación, Instituto Nacional de Formación Docente, Área de desarrollo Curricular.
- García, Javier-Retamero Redondo. (Noviembre 2010) De profesor tradicional a profesor innovador. Revista digital: Temas para Educación. N° 11.. España

- Huberman, S. (1994). Cómo aprenden los que enseñan: la formación de los formadores. Nuevos modelos para nuevas prácticas. Buenos Aires: Aique.
- Müller, M. (1994). Descubrir caminos. Buenos Aires: Bonum.
- Sarramona López, J. Noguera Arrom, J. Y Vera Vila, J. (1998). ¿Qué es ser profesional docente? En Teoría Educativa, 10, 95-144, Ediciones Universidad de Salamanca.
- Tresca, María A. (2013) ¿Cuándo, qué y cómo estudio? Estrategias y técnicas de estudio. Ejercicios prácticos para el alumno Bs. As.- México: Novedades Educativas

Módulo de Formación Específica

Si los estudiantes no aprenden a resolver problemas, si no se les da la oportunidad de pensar por sí mismos, la Matemática pierde su valor educativo. Enseñar Matemática no es solo transmitir conocimientos, sino despertar la curiosidad, el razonamiento y el gusto por descubrir.

Números



Números Naturales

Los números naturales sirven para contar, ordenar y enumerar objetos.

Así, decimos que la Tierra es el tercer planeta a partir del Sol, que ésta es la primera unidad del Módulo del Ingreso, etc.

Definición ***¡Para leer y recordar!***

A los números que utilizamos para contar la cantidad de elementos de un conjunto no vacío se los denomina **números *naturales***.

Designamos con **N** al conjunto de dichos números,

$$\mathbf{N} = \{ 1; 2; 3; 4; 5; \dots \}$$

Es claro que la suma y el producto de dos números naturales es un número natural. En símbolos,

Si $a , b \in \mathbb{N}$ entonces $a + b \in \mathbb{N}$ y $a . b \in \mathbb{N}$.

Observemos que...

$1 - 1 = 0 \notin \mathbb{N}$

$1 - 2 = -1 \notin \mathbb{N}$

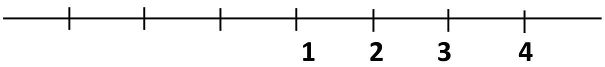
$3 - 1 = 2 \in \mathbb{N}$

Sin embargo, no siempre la diferencia de dos números Naturales, es un número natural. Así,

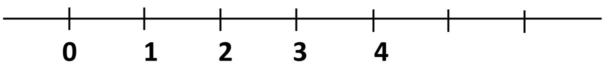
Si $a , b \in \mathbb{N}$ y $b < a$ entonces $a - b \in \mathbb{N}$.

Los números naturales están ordenados.

Podemos representarlos en la recta numérica como sigue:



- Si al conjunto de los números naturales le agregamos el número cero, obtenemos un nuevo conjunto que representamos:



-Por otro lado, si reemplazamos cada elemento del conjunto de los números naturales por su opuesto, es decir, en lugar de 1 escribimos -1, en lugar de 2 escribimos -2, y así siguiendo, obtenemos un nuevo conjunto con los *números opuestos* a los números naturales.

¡Para leer y recordar!

Definición

Designamos con $\mathbf{N_0}$ al conjunto de los naturales incluyendo al número 0.

$\mathbf{N_0 = \{ 0; 1; 2; 3; 4; 5; \ldots \}}$… es decir: $\mathbf{N_0 = N \cup \{0\}}$.

Definición

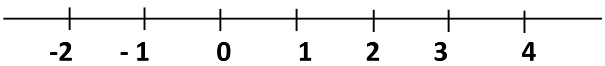
Designamos con $\mathbf{N^-}$ al conjunto de los números opuestos a los números naturales.

$\mathbf{N^- = \{-1; -2; -3; -4; -5; \ldots\}}$ … o bien $\mathbf{N^- = \{-a \,/\, a \in N\}}$

- $a \in N$ si y sólo si $-a \in N^-$
- $N \cap N^- = \varnothing$, es decir: no existe un número que pertenezca al conjunto N y al conjunto N^- simultáneamente.

  El símbolo $\varnothing$ denota al "conjunto vacío".

Si agregamos estos nuevos elementos al gráfico anterior, resulta:



El conjunto que hemos obtenido de esta manera define los:

Números Enteros

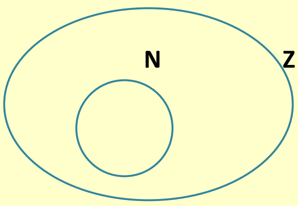
Definición:

¡Para leer y recordar!

Definimos al conjunto de los números *enteros* como:

$$\mathbf{Z = N^- \cup \{0\} \cup N.}$$

De inmediato resulta que *todo número natural es un número entero*.



<u>Ejercicio 1</u>:

En cada caso, representa en la recta numérica los números indicados y analiza:

a) ¿Existe un número entero que sea menor o igual que todos los demás? y ¿mayor o igual?

b) ¿Cuántos enteros existen entre los números consecutivos 2 y 3?, ¿y entre 5 y 6?

¿y entre n y $n + 1$?

c) ¿Cuántos enteros existen entre 2 y 10?, ¿y entre -3 y 7?

¿Qué puede afirmarse sobre la cantidad de enteros que existen entre dos enteros dados?

Algunas propiedades de los Números Enteros

$-2 \in Z$ implica $-(-2) = 2 \in Z$	◆ *Si* $b \in Z$ implica $-b \in Z$
$4, -5 \in Z$ implica $4 + (-5) = -1 \in Z$	◆ *Si* $a, b \in Z$ implica $a + b \in Z$
$4, -5 \in Z$ implica $4 - (-5) = 9 \in Z$	◆ *Si* $a, b \in Z$ implica $a - b \in Z$, pues: $a - b = a + (-b)$; como $-b \in Z$; por lo anterior resulta $a + (-b) \in Z$.
$4, -5 \in Z$ implica $4 . (-5) = -20 \in Z$	◆ *Si* $a, b \in Z$ implica $a . b \in Z$

Algoritmo de la División entre Números Enteros

¿Qué ocurre con la división entre dos números enteros? ¿Será el cociente también un entero?

A través de este ejemplo vemos que $7 : 2 = 3,5 \notin Z$ *¿puedes proponer otros ejemplos?*

$$\begin{array}{r|l} \mathbf{7} & \mathbf{2} \\ \cline{2-2} \mathbf{1} & \mathbf{3} \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} \boldsymbol{b} & \boldsymbol{a} \\ \cline{2-2} \boldsymbol{r} & \boldsymbol{q} \end{array}$$

Por lo tanto, **no siempre la división de dos números enteros es un número entero.**

Al realizar una división entre dos números enteros, puede que el resto sea distinto de cero.

¡Para leer y recordar!

Algoritmo de la División entre números enteros

Sean $a, b \in \mathbb{Z}$, $a \neq 0$. Existen enteros únicos q, r tales que $\boldsymbol{b = a . q + r}$ con $0 \leq r < |a|$

donde $|a|$ denota al "valor absoluto" del número a.

Ejemplos:

a) Para $b = 84$, $a = 45$ resultan: $q = 1$, $r = 39$, pues $84 = 45 \,.\, 1 + 39$

b) Para $b = 84$, $a = -45$ resultan: $q = -1$, $r = 39$, pues $84 = (-45) \,.\, (-1) + 39$

c) Para $b = -84$, $a = 45$ resultan: $q = -2$, $r = 6$, pues $-84 = 45 \,.\, (-2) + 6$

d) Para $b = -84$, $a = -45$ resultan: $q = 2$, $r = 6$, pues $-84 = (-45) \,.\, 2 + 6$

Divisibilidad de Números Enteros

Definición

¡Para leer y recordar!

Si $\boldsymbol{r = 0}$, resulta $b = a \,.\, q$ y se dice que ***a divide a b***

(o que *b es múltiplo de a*, o que *b es divisible por a*, o que *a es divisor de b*).

Ejemplos:

a) 2 divide a 6 pues $6 = 2 \,.\, 3 + 0$, luego $r = 0$

b) 5 no divide a 12 pues no existe ningún entero que multiplicado por 5 dé 12: o expresado de otra forma, $12 = 5 \,.\, 2 + 2$, de modo que $r = 2$.

Ejercicio 2:

Efectúa las siguientes operaciones:

a) $5 - (-2) + (-8) : (-4) - 5$

b) $7 - (-3) - (-8) : (-8) + (-3) : (-1)$

c) $6 : (-2) + (-7) \,.\, (-15) : (-3)$

d) $2^2 - 4^2 : 8 + 2^5$

e) $4^2 : 2 - 1 - 8^2 : 2 - 1$

f) $3^2 : 2 - 1 - 3^2 : 2$

g) $3^{-1} \,.\, 3 - 3^0 + 1 - 25$

Ejercicio 3:

El número -15 es menor que 3, es decir, $-15 < 3$.

a) ¿Es $(-15)^2$ menor que 3^2?

b) ¿Es $(-15)^3$ menor que 3^3?

Ejercicio 4:

El número -12 es menor que -3, es decir $-12 < -3$.

a) ¿Es $(-12) \,.\, 6$ menor que $(-3) \,.\, 6$?

b) ¿Es $(-12) \,.\, (-6)$ menor que $(-3) \,.\, (-6)$?

Ejercicio 5:

a) El cociente de dos números es 9, ¿cuál es el cociente de sus cuadrados?

b) El cociente de dos números es 9, ¿cuál es el cociente de sus cubos?

Ejercicio 6:

Dadas las siguientes afirmaciones, señala cuáles son verdaderas (V) y cuáles son falsas (F). Da un contraejemplo en caso de ser falso.

a) Si $z \in Z$ entonces $-z \in Z$.

b) Si $z^2 \in Z$ entonces $z \in Z$.

c) Si $2z \in Z$ entonces $z \in Z$.

d) Si $z^2 = 1$ entonces $z \in Z$.

Ejercicio 7:

a) Sean a y b enteros, $b \neq 0$. Si $a - b = 175$ y la división de a por b tiene cociente 15 y resto 7, halla a y b.

b) Si se divide un número natural a por 2 se obtiene como cociente entero un número que llamamos b y $r = 0$ (r : resto) . Al dividir b por 2 obtenemos como cociente entero un número c y $r= 1$. Luego dividimos c por 2 y en este caso el cociente es 1 y $r = 0$. ¿Cuál es el número a?

Números Primos

Definición

Un número entero a es ***primo*** si tiene exactamente cuatro divisores: **1, -1, *a* y - *a*.**

¡Para leer y recordar!

Máximo Común Divisor

Definición

Si se descomponen dos números enteros positivos a y b en sus factores primos, el ***máximo común divisor*** entre a y b, es el producto de los factores primos comunes, con el menor exponente. Se denota: **mcd (*a* , *b*).**

Ejemplo: Si $a = 72$ y $b = 84$ resulta

> ***Recordemos que...***
> Para realizar la descomposición de un número en factores primos comenzamos dividiendo, de ser posible, por los números primos 2, 3, 5, 7, 11,…
> hasta obtener el número 1.
> La segunda columna obtenida presenta la descomposición del número en factores primos.

$$\begin{array}{r|l} 72 & 2 \\ 36 & 2 \\ 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r|l} 84 & 2 \\ 42 & 2 \\ 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

$\mathbf{72 = 2^3 \cdot 3^2}$ $\qquad$ $\mathbf{84 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7}$

$\mathbf{mcd\ (72 , 84) = 2^2 \cdot 3 = 12}$

o sea: 12 es el mayor de los divisores comunes entre 72 y 84.

Mínimo Común Múltiplo

> ***¡Para leer y recordar!***
>
> ***Definición:***
>
> Si se descomponen dos números enteros positivos a y *b* en sus factores primos,
>
> El ***mínimo común múltiplo*** entre *a* y *b* es el producto de los factores primos comunes y no comunes con el mayor exponente.
>
> Se denota: **mcm (*a* , *b*).**

Ejemplo:

Tomando los números del ejemplo anterior resulta el $\mathbf{mcm\ (72 , 84) = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7 = 504}$

… o sea: 504 es el menor de los múltiplos comunes entre 72 y 84.

Ejercicio 8:

a) Halla el mínimo común múltiplo entre 8 y 14.

b) Halla el máximo común divisor entre 544 y 1492.

Ejercicio 9:

En el país ABC las elecciones presidenciales son cada 6 años, las de gobernadores son cada 4 años y las de senadores cada 8 años. En 1974 coincidieron las elecciones de presidente, gobernadores y senadores. ¿Cuándo volverán a coincidir?

Ejercicio 10:

Tengo cierta cantidad de botones. Si los agrupo en montones de a cuatro, queda uno suelto. Si los agrupo de a tres, también queda uno suelto y lo mismo sucede si los coloco de a dos. Cuando los pongo en grupos de a cinco no me sobra ninguno.

a) Si tengo menos de 30 botones, ¿cuántos tengo?

b) Si tengo más de 50 botones y menos de 100, ¿cuántos tengo?

Ejercicio 11:

Tres hombres recorren 28, 35 y 40 kilómetros por día respectivamente.

a) ¿A qué distancia del punto de partida está el lugar más cercano al que pueden llegar los tres simultáneamente, en un número entero de días?
b) ¿Cuántos días empleará cada uno en llegar a él?

Números Racionales

¡Para leer y recordar!

Definición:

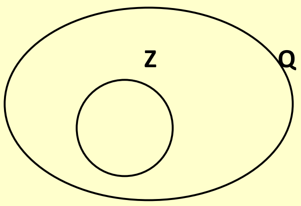
Llamamos **número *racional*** a todo número que se puede

Expresar como fracción $\frac{n}{m}$ donde n y m son enteros y $m \neq 0$.

-Con **Q** denotamos al conjunto de los números racionales.

-Todo número entero es racional, pues si $m \in Z$ escribimos $m = \frac{m}{1} \in Q$.

- Es decir: $\mathbf{Z} \subset \mathbf{Q}$ **.**



Algunas propiedades de los Números Racionales

La suma, la diferencia y el producto de dos números racionales es un número racional.

El inverso de cualquier número racional no nulo, es racional.

Si $u, v \in Q$:

- $u + v \in Q$
- $u - v \in Q$
- $u \cdot v \in Q$
- Si $u \neq 0$ entonces $\frac{1}{u} \in Q$

<u>Ejercicio 12</u>:

Analiza y responde teniendo en cuenta la definición de Números Racionales.

a) Todo número entero puede expresarse como un número racional. ¿Es cierta la recíproca de esta afirmación? Considera como caso a analizar el número entero 2.

b) ¿Existe un número racional que sea menor o igual que todos los demás?, y ¿mayor o igual que todos los demás?

c) Halla un número racional entre $\frac{2}{3}$ y $\frac{3}{7}$. Halla un número racional entre $\frac{7}{3}$ y $\frac{8}{3}$.

¿Puede hallarse más de un número racional en cada caso? ¿Qué puedes concluir?

Expresiones Fraccionarias y Decimales

Los números racionales se expresan en diferentes formas. Por ejemplo, el número racional tres cuartos puede expresarse como:

$$\underbrace{\frac{3}{4} = \frac{-3}{-4} = \frac{6}{8} = \frac{9}{12} = \frac{75}{100}}_{\textit{forma fraccionaria}} \quad \underbrace{= 0{,}75 = 0{,}750 = \ldots.}_{\textit{forma decimal}}$$

Todo número racional puede expresarse como número *decimal exacto* o *periódico*.

Cada parte de un número decimal tiene un nombre especial:

- La cifra a la izquierda de la coma se denomina ***parte entera***.
- La cifra a la derecha de la coma, que se repite, es la ***parte decimal periódica***.
- La cifra a la derecha de la coma, que no se repite, es la parte decimal ***no periódica.***

Ejemplos:

$\frac{1}{2} = 0{,}5$ es un número decimal exacto, pues no tiene cifras decimales periódicas.

$\frac{2}{3} = 0{,}666666...$ es un número decimal periódico puro pues tiene cifras decimales periódicas

$\frac{142}{45} = 3{,}15555555...$ es un número decimal periódico mixto pues tiene cifras decimales periódicas y no periódicas.

Ejercicio 13:

Identifica la parte entera y la parte decimal periódica o no periódica de las siguientes expresiones decimales:

a) $\frac{1}{3} = 0{,}333\ldots.. = 0{,}\widehat{3}$

b) $\frac{86}{11} = 7{,}81818181\ldots = 7{,}\widehat{81}$

c) $\frac{29}{6} = 4{,}83333\ldots = 4{,}8\widehat{3}$

A continuación, recordaremos cómo pasar de la forma decimal a la forma fraccionaria.

<table>
<tr><th colspan="2">FORMA DECIMAL</th><th>EJEMPLO</th><th>OBSERVACIÓN</th></tr>
<tr><td colspan="2">Exactas</td><td>$0{,}75 = \frac{75}{100}$</td><td>En el numerador aparece la parte decimal, y en el denominador aparece el 1 seguido de tantos ceros como cifras decimales hay.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Periódicas</td><td>Puras</td><td>$0{,}2525\ldots = 0{,}\widehat{25} = \frac{25}{99}$</td><td>En el numerador aparece la parte periódica, mientras que en el denominador aparecen tantos números 9 como cifras tiene el período.</td></tr>
<tr><td>Mixtas</td><td>$0{,}75454\ldots = 0{,}7\widehat{54} = \frac{754 - 7}{990} = \frac{747}{990}$</td><td>En el numerador aparece la diferencia entre la parte decimal y la parte decimal <u>no</u> periódica, mientras que en el denominador tenemos tantos números 9 como cifras tiene el período seguido de tantos ceros como cifras tiene la parte no periódica.</td></tr>
</table>

Más ejemplos:

FORMA DECIMAL		EJEMPLO
Exactas		$0{,}015 = \frac{15}{1000}$ $2{,}23 = \frac{223}{100}$
Periódicas	Puras	$0{,}333... = 0{,}\overset{\frown}{3} = \frac{3}{9}$ $1{,}282828... = 1{,}\overset{\frown}{28} = 1 + \frac{28}{99} = \frac{127}{99}$
	Mixtas	$0{,}8333... = 0{,}8\overset{\frown}{3} = \frac{83-8}{90} = \frac{75}{90}$ $12{,}75454... = 12{,}7\overset{\frown}{54} = 12 + \frac{754-7}{990} = 12 + \frac{747}{990} = \frac{12627}{990}$ $5{,}12444... = 5{,}12\overset{\frown}{4} = 5 + \frac{124-12}{900} = 5 + \frac{112}{900} = \frac{4612}{900}$

Ejercicio 14:

Calcula:

a) $\frac{3}{5} : \frac{2}{3} - \frac{4}{5} \cdot \frac{4}{3} + \frac{1}{3} - \frac{3}{4} : \frac{3}{7}$

b) $\left(\frac{2}{3} + \frac{-7}{2} - \frac{5}{6} + \frac{1}{4}\right) : \left(-\frac{4}{3} + \frac{2}{3} - \frac{1}{6}\right)$

Ejercicio 15:

Escribe en forma decimal y en forma fraccionaria:

a) 5 décimos b) 5 centésimos c) 123 centésimos d) 82 milésimos

Ejercicio 16:

a) ¿De qué número es 200 la quinta parte?

b) ¿De qué número es 850 el 52%?

Ejercicio 17:

Expresa en forma fraccionaria y resuelve:

a) $\left(\sqrt{1-0{,}19} + 0{,}3^2 - \frac{6}{25}\right) : (-3)$

b) $\sqrt{1-0{,}\widehat{5}} - (1{,}5)^{-2} + \left(\frac{5}{18} - 0{,}\widehat{7}\right) . 2{,}\widehat{4}$

c) $\sqrt{1+1,\widehat{3}^{2}}-(-3)^{-2}+\left(1-0,\widehat{8}\right):\dfrac{2}{3}$

d) $(0,\overset{\frown}{45}\,.\,5,5-3)^{3}+\left(\dfrac{1}{2}-1\right)^{2}-\sqrt{0,000025}$

e) $\dfrac{(1,2+1,8)^{2}}{1,5}-\dfrac{6}{(1,5-0,3)^{2}-0,24}$

f) $\dfrac{\left(\sqrt{0,09}+\dfrac{1}{2}+0,7\right)^{2}-\left(0,7-\dfrac{1}{5}\right)^{2}}{\dfrac{3}{2}-\sqrt{0,25}}$

g) $0,0\widehat{9}:0,\widehat{3}-0,1^{2}:0,3-\sqrt{0,0\widehat{5}\,.\,2}+0,\widehat{5}\,.\,3,3-0,1$

h) $\dfrac{\sqrt{4+0,\widehat{3}-1,\widehat{5}}\,.\left(0,1\widehat{9}-0,\widehat{3}\right)}{\left(0,3\widehat{2}-0,2\widehat{1}\right)}$

Ejercicio 18:

Al tostarse el café, éste pierde un quinto de su peso. Si se tuestan 80 kg., ¿cuánto pesan después?

Ejercicio 19:

El agua al congelarse aumenta su volumen un décimo del mismo. ¿Qué volumen ocupan 200 litros de agua después de helarse?

Ejercicio 20:

Una aleación está compuesta por $\dfrac{24}{29}$ de cobre, $\dfrac{4}{29}$ de estaño y $\dfrac{1}{29}$ de cinc.

¿Cuántos kilogramos de cada metal habrá en 348 kg y de aleación?

Ejercicio 21:

Un curso tiene 32 alumnos. Para colaborar en la organización de un acto fue convocada a concurrir 1 hora antes del inicio la cuarta parte del curso. De los que se esperaban sólo asistió la mitad. Tomando como unidad el curso ¿cómo expresaría la parte del curso que asistió?

Números Irracionales

Definición

¡Para leer y recordar!

-Un ***número irracional*** es todo aquel que *no puede expresarse como cociente de dos números enteros*.

Es decir: un número irracional, al ser expresado como decimal, *no es exacto ni es periódico*, ***posee infinitas cifras decimales no periódicas***.

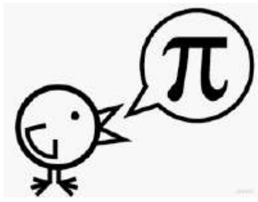
Un número irracional muy famoso es el **número de oro** : $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

Una manera de obtenerlo es realizar el cociente entre las longitudes de los lados diferentes de las hojas tamaño A4 que comúnmente se utilizan en fotocopiadora, o entre los lados de una tarjeta de crédito.

El número π aparece al calcular la longitud de una circunferencia y el área de un círculo.

El número ***e*** se presenta en procesos de crecimiento de una población animal o vegetal, y en problemas de desintegración radiactiva. Asimismo, en el tendido de cables eléctricos, los cables entre postes determinan una curva en cuya ecuación también está presente el número ***e***.

¿No te parece curioso?



Ejemplos:

a) 0,1234567891011...

La parte decimal de este número irracional es la sucesión de los números naturales.

b) $\pi \cong$ **3,141592654...**

El símbolo $\cong$ indica una aproximación del número. Notemos que también existen otras aproximaciones para π; por ejemplo: 3,14 ; 3,141 ; 3,14159 ; 3,1416 ; ... etc.

c) $\sqrt{2} \cong \mathbf{1,4141135}$ ...

Muchas raíces cuadradas y cúbicas son números irracionales. ¿Te animas a buscar otras?

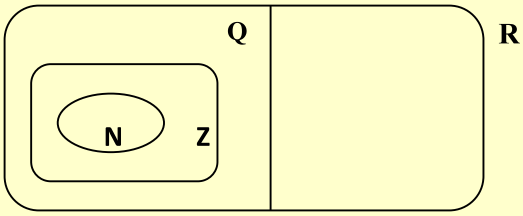
d) $e \cong$ **2,71828....**

Al efectuar cálculos en los que intervienen los números irracionales, tomamos una cantidad finita (entre 3 y 5) de cifras decimales. Por lo tanto, podemos considerar $e \cong 2{,}718$ o bien $e \cong 2{,}71828$.

Números Reales

Definición: ***¡Para leer y recordar!***

La unión del conjunto **Q** de números racionales y el conjunto de los números irracionales es el conjunto **R** de los números reales.



-Todos los números que hemos estudiado en las secciones anteriores son números reales.

-El conjunto de los números reales también puede representarse sobre una recta.

-A cada número real le corresponde un único punto de la recta, y cada punto de la recta representa un único número real. A esta recta la llamamos ***recta real.***

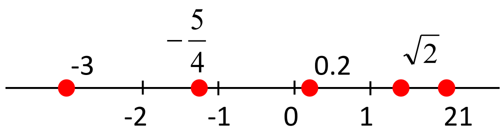
-No siempre somos capaces de representar exactamente a un número real, sin embargo, siempre es posible obtener una representación aproximada de él a partir de su expresión decimal.

Observemos que...

... no existe un número real que sea mayor o igual a todos los demás, ni uno que sea menor o igual que todos los demás.

Además, *entre dos números reales dados cualesquiera existen infinitos números racionales, e infinitos números irracionales*.

Ejemplos: Se representan los números $\sqrt{2}$; - 3 ; 0,2 ; $-\frac{5}{4}$ y 2



<u>Ejercicio 22</u>:

Indica cuál de los siguientes números es racional y cuál es irracional.

a) $\frac{3}{5}$ b) 0,494949... c) 3,75 d) 0,141144111444...

e) $\sqrt{7}$ f) 3,2222... g) 0,437537537... h) 0,101001000100001...

Ejercicio 23:

Completa con SI o NO, según corresponda, la siguiente tabla:

Número	**7**	$\sqrt{10}$	**-2,08**	**1,1212212221…**	$\sqrt{25}$	**-2,2424…**	$\sqrt{-4}$	$\frac{7}{6}$	$-\frac{8}{2}$
Natural									
Entero									
Racional									
Irracional									
Real									

Ejercicio 24:

Indica si cada enunciado es V (Verdadero) o F (Falso). Justifica los casos Falsos.

a) Todo número real es racional.

b) Todo número natural es entero.

c) Todo número entero es racional.

d) Todo número real es irracional.

Orden en R

Ejercicio 25:

Representa en la recta real los siguientes números en forma aproximada:

a) -5

b) $\frac{1}{3}$

c) $-\frac{3}{7}$

d) $\sqrt{5}$

e) π

f) 2,5

Observa que, al efectuar las representaciones de estos números, los mismos están ***ordenados*** en la recta numérica. Esto establece lo que llamaremos una ***relación de orden*** entre ellos.

Definición:

¡Para leer y recordar!

Si en R definimos la relación de orden que indicamos

" < " (menor) observamos que:

Dados dos números reales *a* y *b*, se tiene una y sólo una de las siguientes situaciones:

$$a < b \quad ; \quad b < a \quad ; \quad a = b$$

$-3 < 4 \Leftrightarrow -3+1 < 4+1$

$-3 < 4$ y $2 > 0 \Rightarrow -3 \,.\, 2 < 4 \,.\, 2$

$-3 < 4$ y $-2 < 0 \Rightarrow -3 \,.\, (-2) > 4 \,.\, (-2)$

El símbolo $\Leftrightarrow$ se lee "sí y sólo si"

El símbolo $\Rightarrow$ se lee "implica"

Además, se satisfacen

las siguientes propiedades:

- $\forall a, b \in R,\ a < b \Leftrightarrow a + c < b + c$
- $\forall a, b, c \in R,\ a < b$ y $c > 0 \Rightarrow a \,.\, c < b \,.\, c$
- $\forall a, b, c \in R,\ a < b$ y $c < 0 \Rightarrow a \,.\, c > b \,.\, c$

Ejercicio 26:

Completa la tabla con los signos >, < o = según corresponda:

a	***B***	***a* ....*b***	$\frac{a}{2}$...... $\frac{b}{2}$	***a*(-3) ....*b*(-3)**
8	**2**	8 > 2	$\frac{8}{2} > \frac{2}{2}$	8 (-3) < 2 (-3)
-6	**-10**			
-4	**8**			
0	**4**			

Ejercicio 27:

Escribe un número comprendido entre los siguientes:

a) $\frac{1}{3}$ y $\frac{2}{5}$

b) 1,4142 y 1,4143

c) $\sqrt{2}$ y $\sqrt{3}$

d) π y $\frac{355}{113}$

Potenciación y Radicación en R

Definición

¡Para leer y recordar!

Definimos potencia de exponente ***n*** de un número real ***a,*** a la expresión

$$a^n = \underbrace{a \,.\, a \,.\, a \,. \ldots .\, a}_{n \text{ veces}}$$

donde $a \in$ **R** se denomina ***base*** *y* $n \in$ **N** se denomina ***exponente***.

La definición puede extenderse a exponentes enteros:

Se define para $a \neq 0$ que: $a^0 = 1$ y $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

Ejemplos:

a) $\left(-\frac{2}{3}\right)^4 = \left(-\frac{2}{3}\right).\left(-\frac{2}{3}\right).\left(-\frac{2}{3}\right).\left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{16}{81}$

b) $5^{-3} = \frac{1}{5^3} = \frac{1}{125}$

c) $\left(-\frac{5}{4}\right)^{-2} = \left(-\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{16}{25}$

Algunas propiedades importantes que debemos recordar son:

$2^2 . 2^3 = 2^5$	$x^4 . x^{-2} = x^2$	• Producto de potencias con la misma base.	$a^m . a^n = a^{m+n}$
$2^3 : 2^3 = 2^0 = 1$	$x^4 : x^{-2} = x^6$	• Cociente de potencias con la misma base.	$a^m : a^n = a^{m-n}$
$(3^{-5})^3 = 3^{-15}$	$(x^{-2})^{-1} = x^2$	• Potencia de una potencia.	$(a^m)^n = a^{m.m}$
$(2 . 5)^{-2} = 2^{-2}\, 5^{-2}$	$(x . y^2)^3 = x^3 y^6$	• Potencia de un producto.	$(a . b)^n = a^n . b^n$
$(2 : 5)^{-2} = 2^{-2} : 5^{-2}$	$(x : y^2)^3 = x^3 : y^6$	• Potencia de un cociente.	$(a : b)^n = a^n : b^n$

¡Para leer y recordar!

Definición:

Definimos la raíz ***n***-ésima de un número real ***a***, a la expresión:

$\sqrt[n]{a}$ **= *b*** **si** ***b**^n* **= *a*** donde ***n*** es un número natural.

Denominamos a ***n***: *índice* de la raíz, y a ***a***: *radicando*.

$\sqrt[3]{-27}$ **= -3 pues** $(-3)^3 = -27$

$\sqrt[4]{81}$ **= 3 pues** $3^4 = 81$

No tiene sentido considerar $\sqrt{-4}$ en el conjunto ***R***, dado que no existe un número real tal que elevado al cuadrado nos dé por resultado - 4.

... para que la definición tenga sentido,

-Si ***n*** es impar, ***a*** puede ser cualquier número real,

-Si ***n*** es par, ***a*** debe ser un número real positivo.

$$\sqrt[5]{6} = 6^{\frac{1}{5}}$$

$$\sqrt[3]{3^7} = 3^{\frac{7}{3}}$$

$$\sqrt{5} = 5^{\frac{1}{2}}$$

La raíz ***n***-ésima de un número suele también denotarse como potencia

$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}} .$$

Además : $\sqrt[n]{a^p} = a^{\frac{p}{n}}$ si $a \geq 0$

- Si $a < 0$, esta afirmación no siempre tiene sentido, ya que puede ocurrir por ejemplo:

$(-3)^{4/2} = \sqrt{(-3)^4}$ pero $(-3)^{4/2} = ((-3)^{1/2})^4 = \left(\sqrt{-3}\right)^4$ no tiene sentido en el conjunto $\mathbb{R}$.

- También se satisfacen las siguientes propiedades:

$$2 < 3 \Rightarrow 2^{-1} > 3^{-1} \Rightarrow \cancel{\frac{1}{3}\ \frac{2}{3}}\ \frac{1}{2} > \frac{1}{3}$$

$$-\frac{3}{2} < -\frac{2}{3} \Rightarrow \left(-\frac{3}{2}\right)^{-1} > \left(-\frac{2}{3}\right)^{-1} \Rightarrow -\frac{2}{3} > -\frac{3}{2}$$

- $a > 0$, $b > 0$ y $a < b \Rightarrow a^{-1} > b^{-1}$

- $a < 0$, $b < 0$ y $a < b \Rightarrow a^{-1} > b^{-1}$

El siguiente cuadro resume las propiedades que verifican las operaciones de suma, producto, potencia y raíz en $\boldsymbol{R}$ *y en cada subconjunto de éste.*

OPERACIONES	PROPIEDADES		N	Z	Q	R
Suma	1. Asociativa	$a + (b + c) = (a + b) + c$	×	×	×	×
	2. Conmutativa	$a + b = b + a$	×	×	×	×
	3. Elemento neutro	0		×	×	×
	4. Elemento opuesto de a	$-a$		×	×	×
Producto	5. Asociativa	$(a.b).c = a.(b.c)$	×	×	×	×
	6. Conmutativa	$a.b = b.a$	×	×	×	×
	7. Elemento neutro	1	×	×	×	×
	8. Elemento inverso de a $(a \neq 0)$	$\frac{1}{a}$			×	×
Suma-Producto	9. Distributiva	$a.(b + c) = a.b + a.c$	×	×	×	×
Potencias	1. Producto de potencias de igual base	$a^m . a^n = a^{m+n}$	×	×	×	×
	2. Cociente de potencias de igual base	$a^m : a^n = a^{m-n}$	×	×	×	×
	3. Potencia de una potencia	$(a^m)^n = a^{m.m}$	×	×	×	×
	4. Potencia de un producto	$(a.b)^n = a^n . b^n$	×	×	×	×
	5. Potencia de un cociente	$(a:b)^n = a^n : b^n$	×	×	×	×
Raíces	1. Producto de radicales de igual índice	$\sqrt[n]{a} . \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a.b}$	×	×	×	×
	2. Cociente de radicales de igual índice	$\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a:b}$	×	×	×	×
	3. Raíz de una raíz	$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n.m]{a}$	×	×	×	×
	4. Potencia de un radical	$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$	×	×	×	×

En virtud de las propiedades que verifican la suma y el producto de números reales,

se dice que **R es un *cuerpo*, y está *ordenado* por la relación de orden <** .

Ejercicio 28:

Calcula las siguientes potencias:

a) $\left(-\frac{2}{5}\right)^3$ b) $\left(\frac{1}{5}\right)^0$ c) 2^{-2} d) $(-3)^{-2}$ e) $(-3)^2$ f) 10^5

Ejercicio 29:

Calcula las siguientes expresiones:

a) $x^2 . x^5$ b) $(-x)^2 . x^5$ c) $x^5 : x^{-5}$ d) $x^{-3} : x^{-6}$

Ejercicio 30:

Escribe como radicales los siguientes números:

$2^{1/2}$, $7^{2/3}$, $5^{0,5}$, $12^{0,2}$, $7^{-1/2}$, $9^{-1/3}$, $5^{10/5}$, $8^{-2/3}$

Ejercicio 31:

Expresa como potencia fraccionaria:

a) $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ b) $\sqrt{x} : \sqrt[3]{x}$ c) $\sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[5]{x^2}$ d) $\dfrac{1}{\sqrt[5]{x}}$

Ejercicio 32:

Simplifica, si es posible: a) $\sqrt[4]{3^2}$ b) $\sqrt[8]{5^4}$ c) $\sqrt[9]{27}$ d) $\sqrt[5]{1024}$

Ejercicio 33:

Extrae factores del radicando: a) $\sqrt{8}$ b) $\sqrt{18}$ c) $\sqrt{32}$ d) $\sqrt{50}$

Ejercicio 34:

Calcula usando propiedades:

a) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{32}$ b) $\sqrt{15} : \sqrt{3}$ c) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{15}$ d) $\sqrt[3]{32} : \sqrt[3]{2}$

e) $\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{9}$ f) $\sqrt[3]{8} : \sqrt[3]{2}$ g) $\sqrt[3]{2} : \sqrt[3]{5}$ h) $\sqrt{8} : \sqrt[4]{2}$

i) $\sqrt{2} : \sqrt[3]{32}$ j) $\sqrt{3} : \sqrt{4}$ k) $\sqrt{2} \cdot 8^{0,5}$ l) $\sqrt[3]{9} : \sqrt[6]{3}$

Ejercicio 35:

Resuelve usando propiedades y reduciendo las expresiones:

a) $\sqrt{2} + \sqrt{8} + \sqrt{18} - \sqrt{32}$ b) $\sqrt{5} + \sqrt{45} + \sqrt{180} - \sqrt{80}$

c) $\sqrt{24} - 5\sqrt{6} + \sqrt{486}$ d) $\sqrt[3]{54} - \sqrt[3]{16}$

Ejercicio 36:

Simplifica las siguientes expresiones:

a) $\sqrt{2 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}$ b) $5 . \sqrt[3]{5} : \sqrt{\left(\dfrac{1}{5} . \sqrt[5]{25}\right)^{-\frac{1}{3}}}$ c) $\left(\sqrt{6} \cdot \sqrt[4]{12}\right)^3 : 18^{\frac{1}{2}}$ d) $\dfrac{-100^{\frac{1}{2}}}{\sqrt[3]{10 : \sqrt{0,001}}}$

Ejercicio 37:

Elimina las raíces del denominador y simplifica:

a) $\dfrac{3}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}$ b) $\dfrac{1}{3 - \sqrt{2}}$ c) $\dfrac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2} + \sqrt{5}}$ d) $\dfrac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{\sqrt{x} - \sqrt{y}}$

<u>Ejercicio 38</u>:

Resuelve:

a) $\dfrac{16^{1/4}\cdot 27^{1/3}}{4^{1/2}}$ b) $\dfrac{64^{2/3}-27^{1/3}-1}{\left(\dfrac{1}{11}\right)^{-1}}$ c) $\left[\dfrac{8^{2/3}-3\cdot 9^{3/2}}{\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-1}-(3a)^{0}}\right]^{-2}$ donde $a\neq 0$

<u>Ejercicio 39</u>:

Si $a=\sqrt{3}+1$, $b=3-2\sqrt{2}$ y $c=1-\sqrt{3}$, indica si las afirmaciones que siguen son verdaderas o falsas. Justifica tu respuesta.

I. $a+b$ es un número irracional.

II. $a+c$ es un número irracional

III. $a\cdot c$ es un número entero.

IV. $\frac{a}{c}$ es un número racional.

<u>Ejercicio 40</u>:

Calcula la diagonal de un rectángulo cuyos lados miden 10 cm y 12 cm.

Expresa el resultado con dos decimales.

<u>Ejercicio 41</u>:

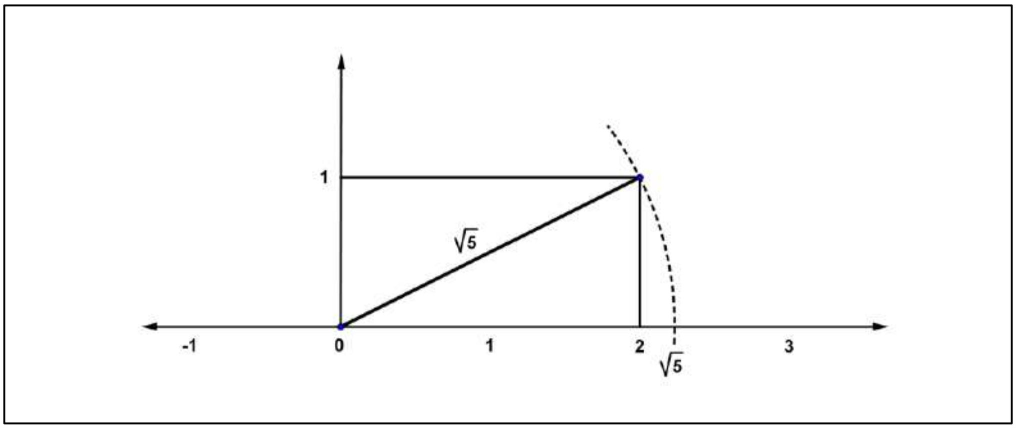
Grafica la siguiente construcción geométrica:

- Trazar un segmento $\overline{AB}$ de longitud 1 unidad.
- Trazar otro segmento $\overline{AC}$ perpendicular a $\overline{AB}$, de longitud 1 unidad.
- Nombrar *O* al punto medio de $\overline{AC}$.Marca la circunferencia de centro *O* y radio $\overline{OC}$.
- Trazar la semirrecta $\overrightarrow{BO}$ y llama *D* al punto de intersección de ésta con la circunferencia más alejado de *B*.

Calcula el valor exacto de la medida del segmento $\overline{BD}$ y verifica que se corresponde con el número de oro $\left(\Phi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$.

Ejercicio 42:

El siguiente gráfico muestra como representar con regla y compás el número irracional $\sqrt{5}$ en la recta real. Por el mismo método, representa $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ y $\sqrt{17}$.



Ejercicio 43:

Calcula el área de un triángulo equilátero cuyos lados miden 10 cm. Expresa el resultado con tres decimales.

Ejercicio 44:

El área de un cuadrado mide 50 cm^2. ¿Cuál es el área del cuadrado construido sobre su diagonal?

Ejercicio 45:

Calcula el área de un círculo de 100 cm. de radio y expresa el resultado con tres decimales exactos.

Números Complejos

No es cierto en general, que la raíz cuadrada de un número real sea siempre un número real.

Por ejemplo, si se quiere resolver una ecuación como la que sigue:

$x^2 + 4 = 0$ encontramos que no existe $a \in$ R tal que a^2 = -4.

¡Para leer y recordar!

Definición

La *unidad imaginaria* ***i*** es un número que satisface la propiedad: ***i*** ^{2} **= - 1**, también se suele escribir i = $\sqrt{-1}$.

Definición

- A los números de la forma ***z = a + b i*** donde ***a*** y ***b*** son reales se les llama ***números complejos***.

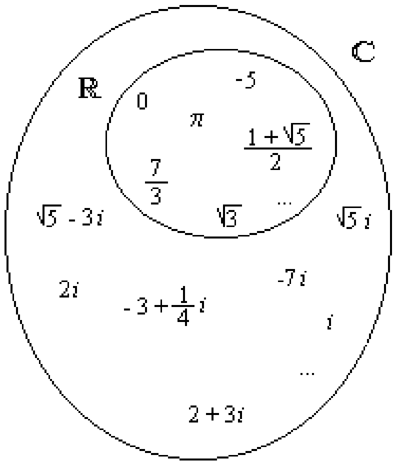
- Al conjunto formado por dichos números se lo denota: $\mathbb{C}$**.**

- En un número complejo z = *a* + *b i*, con *a*, *b*$\in$R, ***a*** se llama ***parte real*** y se la denota con

a **= Re(*a* + *b i*),** ***b*** se llama ***parte imaginaria*** y se la denota con ***b*** **= Im (*a* + *b i*).**

Ejemplo:

z = 2 – 3i ; Re(2 – 3*i*) = 2 ; Im(2 – 3*i*) = -3 (y no – 3i, ¡cuidado!)



Observemos que, para el número complejo *a + b i* :

- si *a* = 0, el número complejo solo tiene parte imaginaria, es decir, ***es imaginario puro***.

- si *b* = 0, el número complejo sólo tiene parte real. Por lo tanto, el conjunto de los números reales está incluido en el conjunto de los números complejos : $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

De esta forma, la ecuación planteada al comienzo tiene solución en el conjunto C:

$$x^2 + 4 = 0$$

$$x^2 = -4$$

$$|x| = \sqrt{-4} = \sqrt{4}.\sqrt{-1}$$

$$|x| = 2\,i$$

$$\boldsymbol{x_1 = 2\,i \qquad x_2 = -2\,i}$$

Definición:

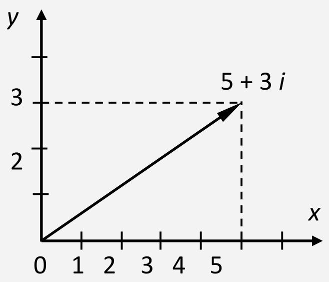
¡Para leer y recordar!

A dos números complejos se les llama ***conjugados*** si tienen la misma parte real, y opuestas sus partes imaginarias. Se simboliza $\bar{z}$. Es decir:

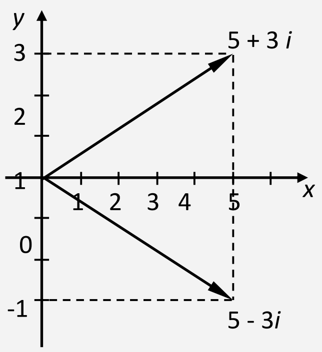
Si z=a +bi es un número complejo, entonces $\bar{z}$=a – bi es el conjugado de z.

Ejemplo: 3 + 2 *i* y 3 - 2 *i* son números complejos conjugados.

Representación de 5 + 3 *i*



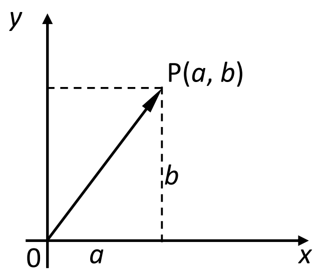
Representación de 5 + 3 *i* y su conjugado 5 – 3 *i*



El número complejo z = *a* + *b i* se representa en el plano mediante el punto P de coordenadas (*a* ; *b*) . El eje de las abscisas se llama ***eje real***, y el de las ordenadas, ***eje imaginario***.

De esta forma, a cada número complejo le corresponde un punto del plano y a cada punto del plano le corresponde un número complejo.

Si unimos el origen con el punto P obtenemos un segmento orientado.



Operaciones en C

Suma y Resta	La suma o resta entre números complejos se realiza sumando o restando partes reales entre sí y partes imaginarias entre sí respectivamente.

Ejemplos:

a) (2 + 3 *i*) + (8 - 5*i*)= (2 + 8) + (3 + (- 5)) i = 10 - 2 *i*

b) (2 + 3 *i*) - (8 - 5*i*) = (2 - 8) + (3 - (- 5)) I = - 6 + 8 *i*

RECTA REAL

Conjuntos e intervalos

¡Para leer y recordar!

Definición

Un **conjunto** es una colección de objetos, conocidos como los elementos del conjunto.

Si S es un conjunto, la notación $\in$ (pertenece) significa que a es un elemento de S y $\notin$ (no pertenece) significa que b no es un elemento de S.

Por ejemplo, si Z representa el conjunto de los números enteros $-3 \in Z$ pero $\pi \notin Z$.

Algunos conjuntos se pueden describir listando sus elementos entre llaves. Por ejemplo, el conjunto A formado por todos los enteros positivos menores que 5 se puede escribir como:

$$\mathbf{A = \{1; 2; 3; 4\}}$$

También podemos escribir **A** en la forma

$$\mathbf{A = \{x /\ x \text{ es un número entero y } 0 < x < 5\}}$$

Que se lee:

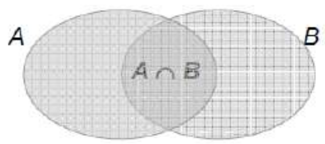
"A es el conjunto de todas las x tal que x es un entero y x es mayor que 0 y menor que 5".

Si **A** y **B** son conjuntos, entonces

su **UNIÓN A** U **B** es el conjunto constituido por todos los elementos que están en **A** ó en **B** (o en ambos).

Si **A** y **B** son conjuntos, entonces

la **INTERSECCIÓN** de **A** y **B** es el conjunto **A** $\cap$ **B** es el conjunto formado por todos los elementos que están tanto en **A** como en **B**.

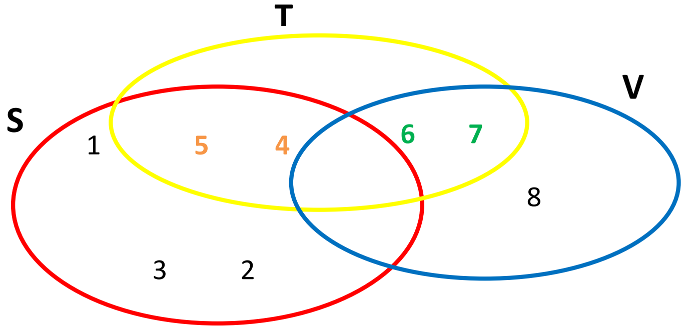


El conjunto vacío denotado $\emptyset$ es el conjunto que no contiene ningún elemento.

Ejemplo:

Si S= {1; 2; 3; 4; 5} , T = {4; 5; 6; 7} y V = {6; 7; 8}; obtener: S U T, S ∩T y S ∩V

S U T = {1; 2; 3; 4; 5; 6; 7}   S ∩ T = {4; 5}   S ∩ V = Ø



Ciertos conjuntos de números reales, conocidos como intervalos, se presentan con frecuencia en el cálculo y geométricamente corresponden a segmentos de recta.

Por ejemplo, si a < b entonces **el intervalo abierto** desde a hasta b está integrado por todos los números entre a y b y se denota mediante el símbolo **(a ; b).**

También podemos escribir: **(a ; b) = {x / a < x < b}**

Observa que los puntos extremos, a y b, no están incluidos en este intervalo. Este hecho queda indicado por los paréntesis ( ) en la notación de intervalos y por los círculos en blanco en la gráfica de la figura

El intervalo cerrado de a a b es el conjunto **[a ; b] = {x ∈ R / a ≤ x ≤ b}**

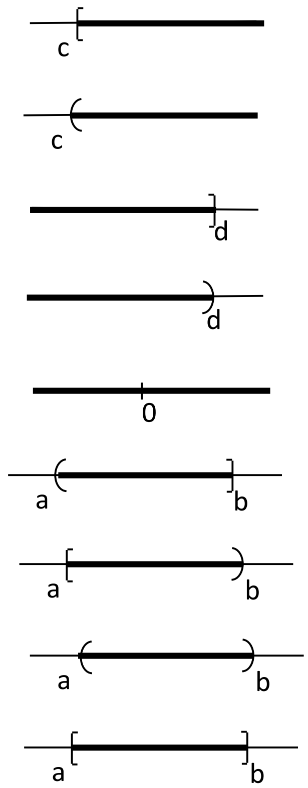
Aquí los puntos extremos del intervalo han quedado incluidos. Esto se indica mediante corchetes [ ] en la notación de intervalos y con los círculos sólidos en la figura de la gráfica del intervalo

Necesitamos considerar también intervalos infinitos, como **(a ; + ∞) = {x ∈ R / x > a}**

Esto no significa que el ∞ (“infinito”) sea un número. La notación (*c ;* + ∞) corresponde al conjunto de todos los números que son mayores a, por lo que el símbolo ∞ simplemente indica que el intervalo se extiende de manera indefinida en la dirección positiva.

La siguiente tabla lista los distintos tipos posibles de intervalos. Siempre suponemos que **a < b**

en símbolos		gráficamente
$[\,c\,;+\infty\,) = \{x \in R \,/\, x \geq c\,\}$	$\rightarrow$	
$(\,c\,;+\infty\,) = \{x \in R \,/\, x > c\,\}$	$\rightarrow$	
$(-\infty\,;d\,] = \{x \in R \,/\, x \leq d\,\}$	$\rightarrow$	
$(-\infty\,;d\,) = \{x \in R \,/\, x < d\,\}$	$\rightarrow$	
$(-\infty\,;+\infty) = R$	$\rightarrow$	
$(a\,;b] = \{x \in R \,/\, a < x \leq b\,\}$	$\rightarrow$	
$[a\,;b) = \{x \in R \,/\, a \leq x < b\,\}$	$\rightarrow$	
$(a\,;b) = \{x \in R \,/\, a < x < b\,\}$	$\rightarrow$	
$[a\,;b] = \{x \in R \,/\, a \leq x \leq b\,\}$	$\rightarrow$	

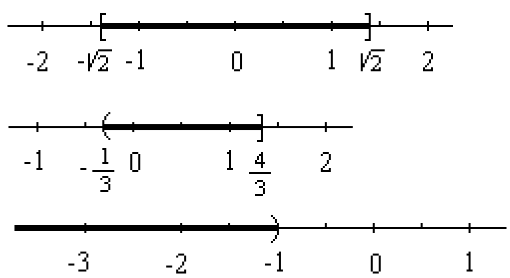


Ejemplos:

$[-\sqrt{2}\;;\;\sqrt{2}\,] = \{x \in R \,/\, -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}\,\}$

$\left(-\frac{1}{3}\,;\,\frac{4}{3}\right] = \{x \in R \,/\, -\frac{1}{3} < x \leq \frac{4}{3}\}$

$(-\infty\,;-1) = \{x \in R \,/\, x < -1\,\}$



<u>Ejercicio 4</u>**6:**

Expresa mediante intervalos cada uno de los siguientes subconjuntos de R: el conjunto de los números reales *x* que satisfacen:

a) *x* es mayor que 2 y menor que 6.
b) *x* es mayor o igual que -1.
c) *x* es menor que $\frac{2}{3}$.
d) x supera al menor número entero positivo

Ejercicio 47:

Representa sobre la recta real los siguientes intervalos:

a) [2 ; 5]

b) $\{x / x \in R \wedge -3 < x < \frac{4}{3}\}$

c) $\left(-\infty ; \frac{1}{2}\right]$

d) $\{x / x \in R \wedge -1 \leq x < 2{,}75\}$

Ejercicio 48:

Expresa los siguientes intervalos en términos de desigualdades y gráfica:

a) (-3 ; 0)

b) [1 ; 5)

c) (5 ; ∞)

d) (-∞ ; 5)

Ejercicio 49:

Expresa las siguientes desigualdades como intervalos y realiza las gráficas correspondientes:

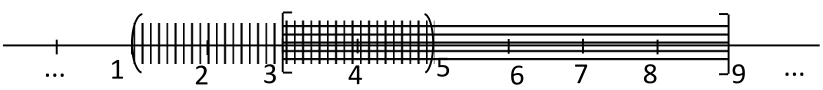
a) $x \leq 2$
b) $-3 \leq x < 4$
c) $x > -1$

Uniones e intersecciones de intervalos

Ejemplo: Grafica los siguientes intervalos:

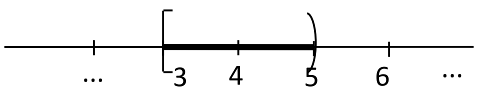
a) (1 ; 5) ∩ [3 ; 9]
La intersección de dos intervalos está formada por los números que se encuentran en ambos. Por lo tanto

(1 ; 5] ∩ [3 ; 9] = $\{x \,/\, 1 < x < 5$ **y** $3 \leq x \leq 9\}$



= $\{x \,/\, 3 \leq x < 5\}$

= [3 ; 5)

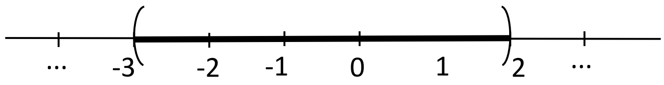


b) (-3 ; -1) U (-2 ; 2)

La unión de los intervalos (-3 ; -1) y (-2 ; 2) la conforman los números que se encuentran ya sea en (-3 ; -1) o en (-2 ; 2), por lo que

(-3 ; -1) U (-2 ; 2) = $\{x \,/\, -3 < x < -1$ **ó** $-2 < x < 2\}$

= (-3, 2)



<u>Ejercicio 50</u>:

Determina:

a) $[-\frac{1}{4} \,;\, 2) \cup [1 \,;\, +\infty)$ b) $(-3 \,;\, -1) \cup [\frac{5}{2} \,;\, 3)$

c) $(-3 \,;\, -1) \cap [\frac{5}{2} \,;\, 3)$ d) $[0 \,;\, \sqrt{5}\,) \cap [\frac{3}{2} \,;\, \frac{7}{2}\,]$

<u>Ejercicio 51</u>:

Halla los valores de *x* que satisfacen las siguientes condiciones y representar los subconjuntos de R correspondientes.

a) $0 < x \leq 2 \;\wedge\; x \in [1 \,;\, 3)$ b) $x > -1 \;\wedge\; x \in (2 \,;\, 5)$

c) $x \in [-4 \,;\, +\infty) \;\wedge\; x < -2$ d) $x \in (-2 \,;\, 2) \;\wedge\; x \in [1 \,;\, +\infty)$

e) $x \in (-\infty \,;\, 3) \;\wedge\; x \in (-3 \,;\, +\infty)$ f) $-3 \leq x < 1 \;\wedge\; x \notin [0 \,;\, 2)$

<u>Ejercicio 52</u>:

Dados los intervalos A = [-2 ; 1) ; B = [-1 ; + ∞) ; C = [-3 ; 2,5) determina:

a) $(A \cap B) \cap C$ b) $(A \cap B) \cup C$

<u>Ejercicio 53</u>:

Sean A = [-2 ; 6]; B = (1 ; 5]; C = (-1 ; 3). Calcula:

a) $(A \cup B) \cap C$ b) $(A \cap B) \cup C$

Valor absoluto o módulo de un número real

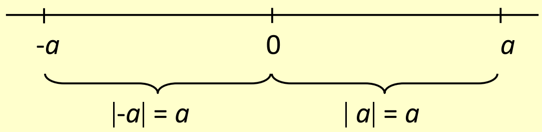
¡Para leer y recordar!

Definición

-El **valor absoluto** de un número ***a***, es la distancia de ***a*** hasta 0 en la recta de los números reales.
La distancia es siempre positiva ó 0, por lo que tenemos $|a|$ **≥ 0 para todo número *a*.**

Dado un número $a \in$ R, llamaremos **módulo ó valor absoluto** de ***a***, al mismo número ***a*** si este es positivo o cero, y ***-a*** si ***a*** es negativo, es decir:

$$|a| = \begin{cases} a & si \quad a \geq 0 \\ -a & si \quad a < 0 \end{cases}$$



Ejemplos:

a) $|3| = 3$ b) $|-3| = -(-3) = 3$ c) $|0| = 0$

Ejemplo:

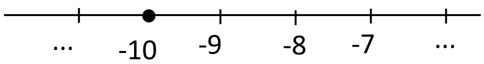
Encuentra los valores de x que satisfacen la siguiente igualdad: $|x + 7| = 3$.

Si $|x + 7| = 3$

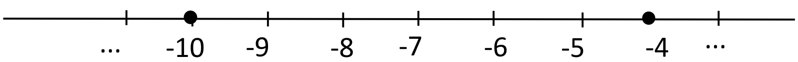
Entonces x + 7 = 3 ó x + 7 = -3

Si x + 7 = 3 entonces x = -4

Si x + 7 = - 3 entonces x = -10



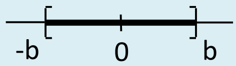
El conjunto solución, en este caso, es S = {-4 ; -10}



Observa que como $|x|$ mide la distancia de x al 0, que $|x|$ sea menor ó igual que b significa que la distancia de x a cero no debe ser mayor que b *es decir:*

Si $b \in R$ y $b > 0$ entonces la desigualdad $|x| \leq b$ es equivalente a la doble desigualdad $-b \leq x \leq b$.

Gráficamente:



En general, $-b \leq x \leq b$ *es equivalente* $x \geq -b$ y $x \leq b$ *y representa la intersección*

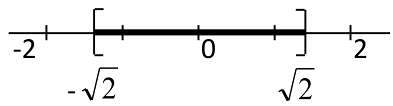
$$[-b ; +\infty) \cap (-\infty ; b] = [-b ; b]$$

Ejemplo:

$|x| \leq \sqrt{2}$ es equivalente a $-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$.

Por lo tanto, $|x| \leq \sqrt{2}$ significa que $x \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$

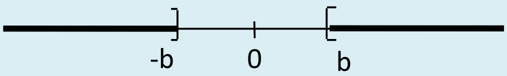
Si representamos en la recta numérica obtenemos e intervalo:



Observa que como $|x|$ mide la distancia de x al 0, que $|x|$ sea mayor ó igual que b significa que la distancia de x a cero debe ser mayor que b *es decir:*

Si $b \in R$ y $b > 0$ entonces la desigualdad $|x| \geq b$ es equivalente a decir que $x \geq b$ ó $x \leq -b$.

Gráficamente:



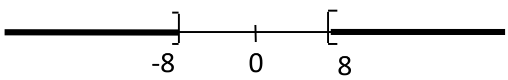
En general, $|x| \geq b$ *es equivalente a* $x \geq b$ ó $x \leq -b$ *y representa la unión* $(-\infty ; -b] \cup [b ; +\infty)$

Ejemplo:

$|x| > 8$ es equivalente a $x \geq 8$ ó $x \leq -8$

Por lo tanto, $|x| < 8$ significa que $x \in (-\infty ; -8] \cup [8 ; +\infty)$

Si representamos en la recta numérica obtenemos:



<u>Ejercicio 54</u>:

Resuelve y representa gráficamente. Expresa la solución, de ser posible, en forma de intervalos

a) $|x| = 3$

b) $|x - 6| = 3$

c) $|x| \geq 3$

d) $|x| \leq 5$

Inecuaciones lineales

Las ecuaciones se caracterizan por presentar el signo de igualdad, mientras que en las desigualdades aparecen precisamente algunos de los signos $<$, $\leq$, $>$ ó $\geq$. De todas formas, tanto las ecuaciones como las inecuaciones pueden ser de primer grado. Una inecuación es de primer grado cuando las incógnitas que aparecen en su expresión tienen exponente igual a 1.

> **Resolver una inecuación significa determinar todos los valores de la variable que hacen verdadera la desigualdad.**

Ejemplos:

Encontrar el conjunto solución de las siguientes inecuaciones lineales:

a) $4x - 8 > 12$

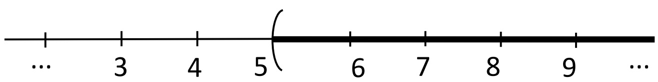
$4x > 12 + 8$

$4x > 20$

$x > 5$

$S = (5 \,;\, +\infty)$

Gráficamente



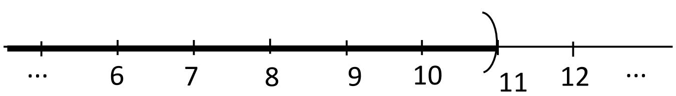
b) $\dfrac{x+1}{2} < 6$

$x + 1 < 12$

$x < 11$

$S = (-\infty \,,\, 11)$

Gráficamente



c) $-2x + 6 < x - 3$

$-2x - x < -3 - 6$

$-3x < -9$

$x > (-9) : (-3)$

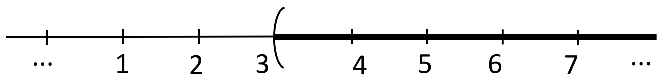
$x > 3$

$S = (3, \infty)$

Recordar…

Si multiplicamos cada lado de la desigualdad por un número negativo, entonces invertimos el sentido de la desigualdad

Gráficamente:



Ejercicio 55:

Resuelve las siguientes inecuaciones y representar el conjunto solución en la recta real:

a) $2x - 3 < 4 - 2x$

b) $7 + 3x < 4 + x$

c) $2 . \left(x - \frac{1}{2}\right) > 3x$

d) $\frac{x+2}{4} \leq \frac{x-1}{3}$

e) $3x - 12 \leq \frac{5x - 6}{4}$

f) $3.(4 - x) < 12x + 6$

g) $\left(2 - \frac{1}{3}x\right)(-3) + 4 . \left(-\frac{1}{2}x + \frac{7}{4}\right) > 0$

FUNCIÓN LINEAL

Muchas situaciones de la realidad tienen un comportamiento que permite describirlas utilizando una función lineal como modelo. Ejemplos de estas situaciones son:

- ✓ distancia recorrida por un móvil sobre un camino recto con velocidad constante en función del tiempo empleado (en física este movimiento se denomina rectilíneo uniforme);
- ✓ la longitud de una circunferencia en función del radio;
- ✓ la relación entre la temperatura expresada en grados centígrados (ºC) y la temperatura expresada en grados Fahrenheit (ºF);
- ✓ costo total de la factura del agua en función de los litros consumidos por mes en cada domicilio.

Analizaremos las características de las funciones lineales y distintas formas de representarlas: tablas de valores, gráficos, fórmulas, etc.
Además, vincularemos problemas geométricos, tales como hallar la intersección de dos rectas a través de la resolución de sistemas de ecuaciones y reconocer rectas paralelas y perpendiculares a través de sus ecuaciones.
Antes de comenzar con el desarrollo teórico del tema, presentaremos tres situaciones problemáticas.
Le sugerimos que se reúna en un grupo pequeño (o con su compañero de banco) y que antes de comenzar a intercambiar ideas, **lea con detenimiento** cada problema y tome unos minutos para **pensar individualmente** su resolución. Luego expongan dentro del grupo lo que analizaron y evalúen cual es el procedimiento más eficaz en cada caso.

SITUACIÓN PROBLEMÁTICA 1

En un depósito hay 200 litros de agua, suponiendo que al quitar el tapón éste se vacía a una **velocidad constante** de 40 litros por minuto. Responde:

a) ¿Cuántos litros de agua queda en depósito luego de 1 minuto de haber quitado el tapón? ¿y a los 2 minutos? ¿Y a los 3,5?
b) ¿Cuánto tiempo tardará en vaciarse el depósito?
c) Escribe una expresión que relacione la cantidad C de agua que queda en el depósito en función del tiempo transcurrido t .
d) Representa en un sistema de ejes cartesianos el conjunto de puntos obtenidos en los incisos anteriores.
e) ¿Qué disposición tienen los puntos graficados? ¿Tiene sentido unir dichos puntos? ¿Por qué?
f) ¿Para qué valores de t tiene sentido el problema? Es decir, ¿cuál es el conjunto Dominio de la función?

SITUACIÓN PROBLEMÁTICA 2

En los supermercados se disponen de balanzas en las cuales se puede teclear el precio por kilogramo de la verdura que se pesa. Estas balanzas emiten un ticket donde se indica el precio total a pagar, correspondiente a la cantidad de verdura pesada. En la siguiente tabla se presentan distintas cantidades pesadas de tomate y el respectivo precio total para cada una de ellas:

Peso (en kg)	Costo ($)
0,5	15
1	30
2,5	75
3	90
4,75	142,5

A partir de la información presentada en la tabla responde:

a) Indica las variables que se relacionan.
b) Escribe una expresión que relacione el costo $\boldsymbol{P}$ en función del peso del tomate $\boldsymbol{x}$.
c) ¿Qué beneficio tiene obtener una expresión que relaciones el costo $\boldsymbol{P}$ y el peso del tomate $\boldsymbol{x}$**?**
d) Representa en un sistema de ejes cartesianos las parejas de valores que relaciona la tabla.
e) ¿Se pueden unir los puntos representados en el inciso d)? ¿por qué?
f) ¿Para qué valores de $\boldsymbol{x}$ tiene sentido el problema?

<u>SITUACIÓN PROBLEMÁTICA 3</u>

Ana sacó 6 fotocopias de los apuntes teóricos de la cátedra Algebra y Geometría. Pagó por ellas \$ 9. Al día siguiente sacó 10 fotocopias más. Responde:

a) Indica las variables que se relacionan.
b) ¿Cuánto cuesta 1 fotocopia? ¿y 3? ¿Cuánto deberá pagar exactamente por las 10 fotocopias?
c) ¿Cuántas fotocopias puede sacar con \$18?
d) Escribe una expresión que relacione el costo $\boldsymbol{P}$ en función de la cantidad $\boldsymbol{x}$ de fotocopias.
g) Representa en un sistema de ejes cartesianos los puntos obtenidos en los incisos anteriores.
e) ¿Se pueden unir los puntos representados en el inciso g)? ¿por qué?
f) ¿Para qué valores de $\boldsymbol{x}$ tiene sentido el problema?

<u>Respuesta:</u>

<u>SITUACIÓN PROBLEMÁTICA 1</u>

Antes de comenzar a resolver el ejercicio determinemos quienes son las variables que se relacionan. Éstas son el tiempo en minutos y la cantidad de agua que queda en el depósito expresada en litros.
Es claro que el tiempo es la variable independiente y la cantidad de agua en el depósito es la variable dependiente.
Para responder el inciso a) realicemos el siguiente análisis:
El depósito contiene inicialmente 200 litros de agua, al quitar el tapón comienza a vaciarse a una razón constante de 40 litros por minuto, entonces,

- En **1** minuto el depósito perdió 40. **1** litros, por lo tanto quedan $200 - 40.\mathbf{1} = \mathbf{160}$ litros de agua
- A los **2** minutos el depósito perdió 40. **2** litros, por lo tanto quedan $200 - 40.\mathbf{2} = \mathbf{120}$ litros de agua
- De manera análoga, decimos que a los **3,5** minutos el depósito perdió 40. **3,5** y quedan en la pileta $200 - 40.\mathbf{3,5} = \mathbf{60}$ litros

Esta información la podemos disponer en una **tabla de valores** para poder visualizarla de una mejor manera. Comenzamos escribiendo en la primear fila los nombres de las variables que intervienen, primero la variable independiente y luego la variable dependiente: tiempo (minutos) y cantidad de agua en el depósito (litros). Como la cantidad inicial de agua en el depósito es de 200 litros, lo registramos escribiendo **0** en la primera columna y **200** en la segunda columna. Dejamos filas vacías para que complete la tabla con otros pares de valores que desee.

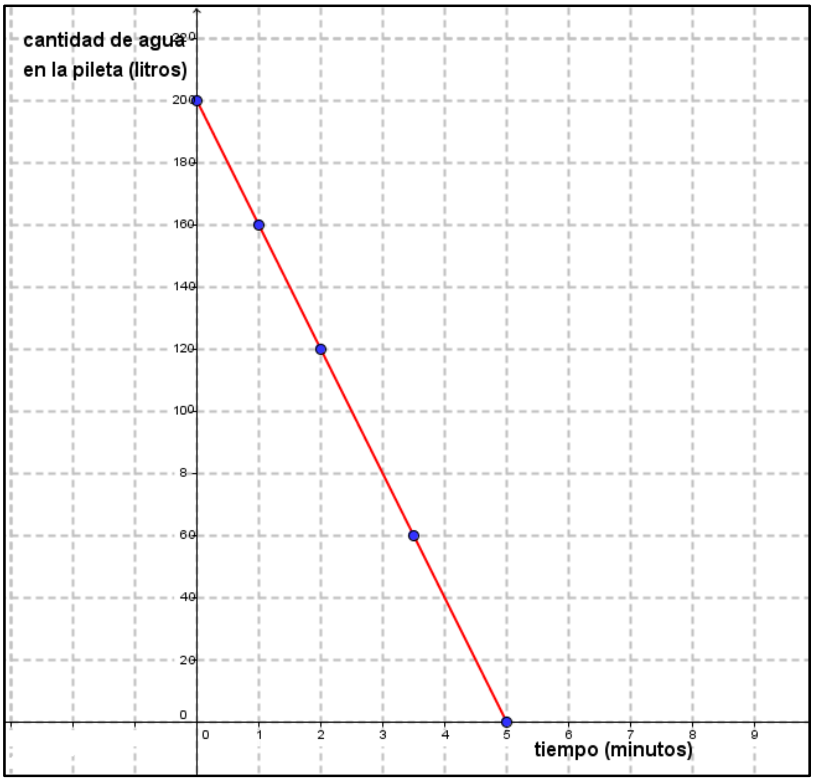
Tiempo (minutos)	Cantidad de agua en el depósito (litros)
0	**200**
1	**160**
2	**120**
3,5	**60**

Una manera de determinar cuánto tiempo tardará en vaciarse el depósito es hacerlo por tanteo, es decir, probar con distintos valores hasta que la resta entre 200 y un múltiplo de 40 sea igual a cero. Ese valor es 5. Por lo tanto el depósito tardó 5 minutos en vaciarse.
Luego de lo analizado, vimos que se puede calcular la cantidad de agua que pierde el depósito multiplicando por 40 los minutos transcurridos después de retirar el tapón. Y para determinar la cantidad de agua que queda en la pileta se resta a los 200 litros la cantidad antes calculada.
Si llamamos $\boldsymbol{t}$ al tiempo transcurrido después de retirar el tapón y ***C*** a la cantidad de agua que queda en el depósito, una expresión que relaciona ambas variables es:

$$\boldsymbol{C}(\boldsymbol{t}) = 200 - 40.\boldsymbol{t}$$

Como la variable independiente $\boldsymbol{t}$ representa tiempo, éste no puede ser negativo. Además el problema tiene sentido hasta que la pileta queda sin agua, y esto sucede luego de 5 minutos después de haber sacado el tapón. Por lo tanto el problema tiene sentido para $t \in [0; 5]$.

Graficamos en un sistema de ejes cartesianos las distintas parejas de puntos que se pueden leer de la tabla de valores: $(0\,;200)$; $(1\,;160)$; $(2\,;120)$; $(3{,}5\,;\ 60)$
Observamos que los puntos están alineados y como el tiempo es continuo tiene sentido unir los puntos a través de una porción de recta.



Respuesta:
SITUACIÓN PROBLEMÁTICA 2

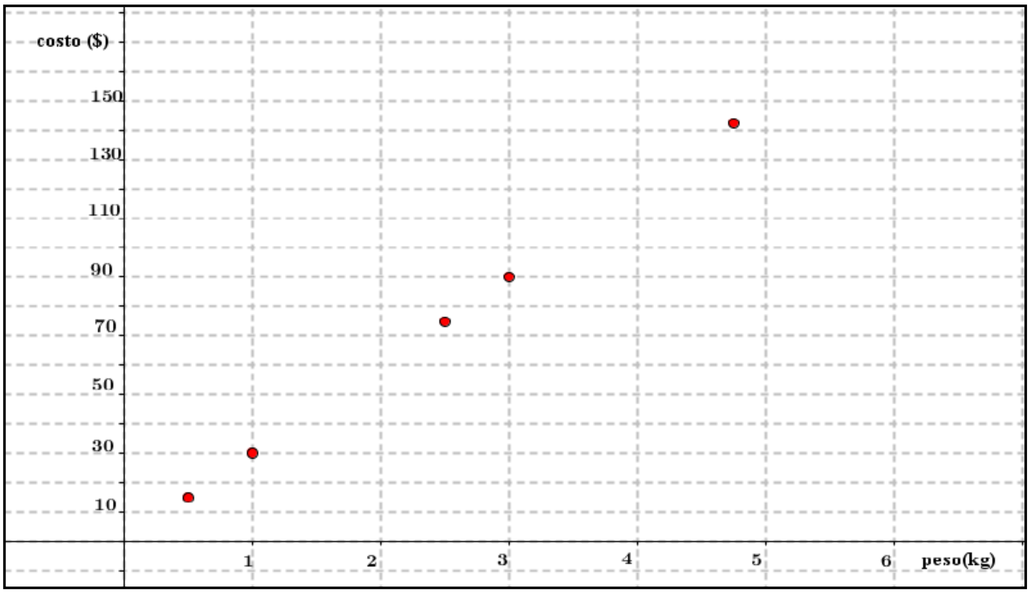
Las magnitudes (variables) que se relacionan son: el peso del tomate en kilogramos y el costo en pesos. Es claro que el costo depende de la cantidad de kg. de tomate que se compre. Llamemos ***x*** *a la cantidad de kilo*gramos de tomate y $P(x)$ al costo de adquirir ***x*** *kilo*gramos de tomate.
Observemos que: a igual diferencia de peso (sobre el eje *x*), se obtiene igual diferencia de precio a pagar (sobre el eje *y*), es decir que el cambio en el costo del tomate es proporcional a la cantidad de kg. de tomate que se compra. Ésta “variación constante” se puede expresar con razones o cocientes entre las respectivas parejas de valores, pues las siguientes divisiones dan siempre el mismo resultado:

$$\frac{15}{0{,}5} = \frac{30}{1} = \frac{75}{2{,}5} = \frac{90}{3} = \frac{142{,}5}{4{,}75} = 30$$

Ésta razón se llama **constante de proporcionalidad o proporción.**
Luego, la expresión que relaciona el costo $\boldsymbol{P}$ en función del peso del tomate $\boldsymbol{x}$ es:

$$P(x) = 30.x$$

Estos registros se pueden representar gráficamente de la siguiente manera:



Es evidente que si no compramos tomates, no debemos pagar nada. Es decir, que si $x = 0$,

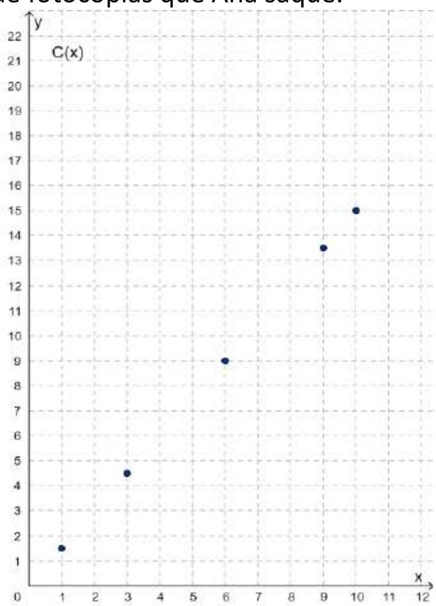
$$P(0) = 30 \,.\, 0$$
$$P(0) = 0$$

Por lo tanto el punto $(0\ ;\ 0)$ forma parte de la representación gráfica de esta función. Ubica este punto en el gráfico anterior.
Los puntos representados están alineados y como la variable independiente representa peso se pueden unir mediante una **línea recta.** Trace la semirrecta que une los puntos (¡cuidado que el peso no puede ser negativo!)

<u>Respuesta:</u>

<u>SITUACIÓN PROBLEMÁTICA 3</u>

En esta situación, las variables que se relacionan son: la cantidad de fotocopias y el costo en pesos. Es claro que el costo depende de la cantidad de fotocopias que Ana saque.



Para determinar el costo de una fotocopia resolvemos la división $\$9 : 6 = \$1{,}5$. A partir de esto es sencillo obtener el costo que debemos pagar por 3 y 10 fotocopias. El costo será $ 4,5 y $ 15 respectivamente.
Con $ 18 podemos sacar 12 fotocopias.

Llamemos ***x*** *a la cantidad de fotocopias* y $C(x)$ al costo de adquirir ***x*** *fotocopias*, una expresión que relaciona ambas variables es:

$$\boldsymbol{C(x)} = 1{,}5\,.\,\boldsymbol{x}$$

En este caso no tiene sentido unir los puntos ya que la variable cantidad de fotocopias no es continua, es decir no puedo sacar 2,5 fotocopias. Por lo tanto, la representación gráfica de esta función es una sucesión de puntos alineados. El problema tiene sentido para los números naturales.

❖ FUNCIÓN LINEAL

Llamamos FUNCIÓN LINEAL a toda función $f : R \to R$ cuya ecuación es de la forma:

Notar que, escribiremos en forma indistinta la función lineal utilizando el nombre de la misma ***f***, o bien indicando solamente el nombre de la variable dependiente ***y***.

$$\boldsymbol{f\,(x) = m.x + b} \quad \text{ó} \quad \boldsymbol{y = m.x + b}$$

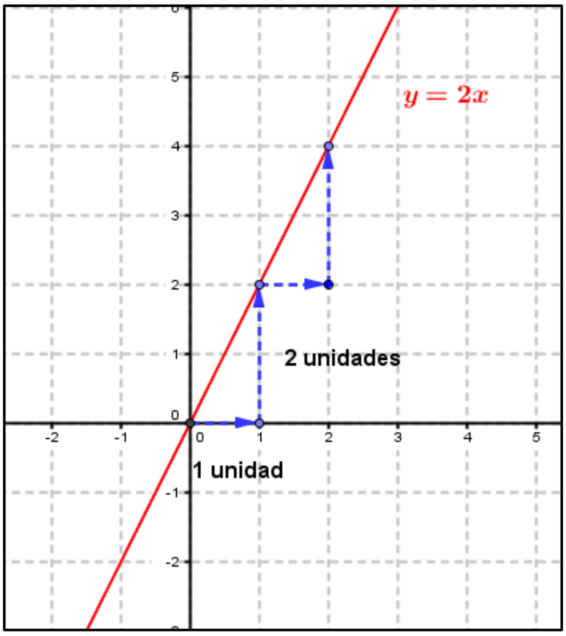
donde $\boldsymbol{m}$ y $\boldsymbol{b}$ son números reales, llamados parámetros de la función lineal.

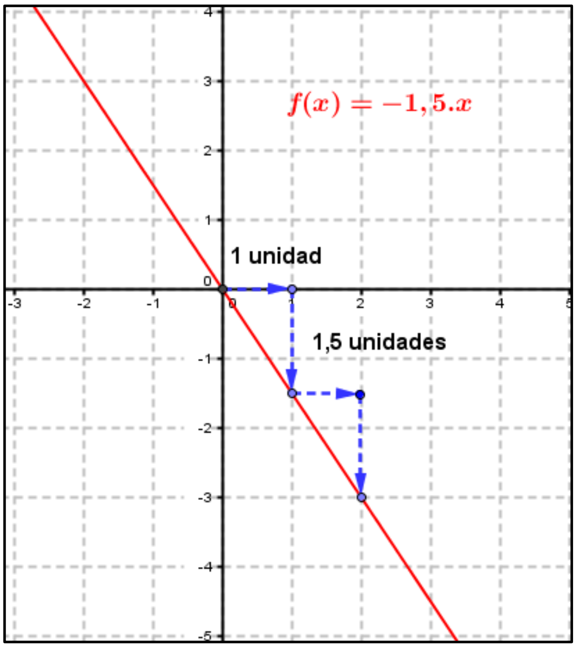
$$y = m\,x + b$$

PENDIENTE **ORDENADA AL ORIGEN**

El parámetro $\boldsymbol{m}$, de la función $f\,(x) = m.x + b$ se llama ***pendiente*** de la recta e indica la inclinación de ésta y el parámetro $\boldsymbol{b}$, se llama ***ordenada al origen*** e indica el punto donde la recta intersecta al eje de las ordenadas.

- ✓ El dominio de la función lineal f es el conjunto R de los números reales.
- ✓ La representación gráfica de una función lineal con dominio en **R** es siempre una recta no vertical, por esta razón con conocer solo dos puntos de la función alcanza para poder graficarla.
  Si la variable independiente tiene alguna restricción, la representación gráfica puede resultar una semirrecta, un segmento o una sucesión de puntos alineados. En la situación problemática 1, debido a las restricciones antes mencionadas en su resolución, la representación gráfica es un segmento. En la situación problemática 2 es una semirrecta y en la situación problemática 3 es una sucesión puntos aislados.
- ✓ Un punto $P = (\boldsymbol{x_0}\,;\,\boldsymbol{y_0})$ pertenece a la recta que representa a una función lineal de ecuación $y = m.x + b$ si y sólo si sus coordenadas verifican: $\boldsymbol{y_0} = m.\boldsymbol{x_0} + b$. ***(Principio de la geometría analítica)***
- ✓ Si una función lineal de la forma $y = m.x + b$ tiene ordenada al origen igual a cero $(b = 0)$ es además una **función de proporcionalidad directa**. Una función es de proporcionalidad directa cuando su fórmula es del tipo $\boldsymbol{y = m.x}$ donde la pendiente $\boldsymbol{m}$ recibe el nombre **de constante de proporción**.
  Su representación gráfica es **una recta que pasa por el origen de coordenadas** $(\boldsymbol{0}\,;\,\boldsymbol{0})$. Un ejemplo de este tipo de función corresponde a la situación problemática 2. Otros ejemplos son las funciones de fórmula: $y = 2.x$; $f(x) = -1{,}5.x$. La representación gráfica correspondiente a cada una de ellas es:





Observamos que en las gráficas que representan funciones de proporcionalidad directa todos los puntos de la recta están alineados con el punto $(\mathbf{0}\,;\mathbf{0})$.

Toda función lineal puede interpretarse como la suma de una función de proporcionalidad directa y una constante.

PARÁMETROS DE LA FUNCIÓN LINEAL: ¿Qué indica cada uno de ellos?

❖ **ORDENADA AL ORIGEN**

Recordando lo antes definido, el parámetro $\boldsymbol{b}$ en la expresión de la función lineal $\boldsymbol{f}\ (\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{m}.\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}$ se llama ordenada al origen. Gráficamente, es la ordenada del punto donde la recta intercepta al eje de las ordenadas (eje y). Es el punto de coordenadas $(\mathbf{0}\,;\boldsymbol{b})$.

Analíticamente, es el valor que toma la función $\boldsymbol{f}\ (\boldsymbol{x})$ cuando $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$:

$$\boldsymbol{f}\ (\mathbf{0}) = \boldsymbol{m}.\mathbf{0} + \boldsymbol{b}$$

$$\boldsymbol{f}(\mathbf{0}) = \boldsymbol{b}.$$

Es decir que el valor de $\boldsymbol{b}$ corresponde a la imagen de $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$.

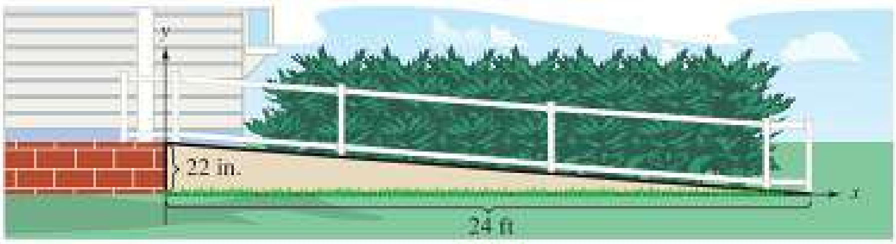
❖ **PENDIENTE DE UNA RECTA**

Según lo antes mencionado, la pendiente de una recta indica la inclinación de la misma. Pero, ¿Qué implica esto? ¿Por qué es importante conocer la pendiente de una recta? ¿Se aplica en el mundo real? Aclararemos este concepto.
La siguiente foto muestra a una persona que se dispone a construir un piso de concreto.

Lo primero que debe hacer el albañil es lograr que la superficie esté completamente horizontal luego, empieza a colocar el hormigón y finalmente si es necesario un revestimiento.

Cuando se construyen los techos de las casas es muy importante tener en cuenta la inclinación de éstos pues la inclinación permite lograr que el agua circule y escurra hacia la parte más baja y evita que el agua quede atrapada y ocasione con el tiempo filtraciones que arruinan la edificación.
Por ello las construcciones de los techos de las casa deben tener al menos una mínima inclinación como se observa en las siguientes imágenes.

Otras situaciones donde es importante tener en cuenta la pendiente o inclinación son en la construcción de rutas, rampas o juegos infantiles como se observa en las imágenes.

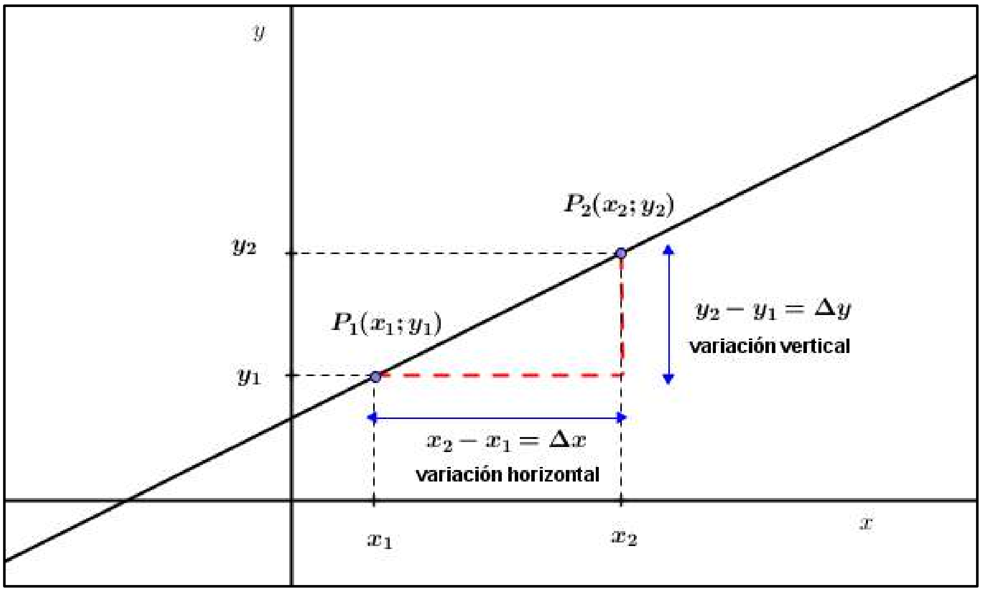


Ahora la pregunta es: ¿cómo calculamos y diseñamos la pendiente de un techo o de un piso?
Para ello necesitamos un modo de medir la "inclinación" de una recta.
La pendiente de una recta es el cociente entre la **variación vertical** y la **variación horizontal**.

$$\boldsymbol{pendiente\ de\ la\ recta} = \frac{\boldsymbol{variaci\acute{o}n\ vertical}}{\boldsymbol{variaci\acute{o}n\ horizontal}}$$

Si de una función lineal se sabe que $f(x_1) = y_1$ y $f(x_2) = y_2$, entonces su representación gráfica contendrá a los puntos $(x_1\ ;\ y_1)$ y $(x_2\ ;\ y_2)$.

Consideremos dos puntos cualquiera $P_1 = (x_1\ ;\ y_1)\ y\ P_2 = (x_2\ ;\ y_2)$ que pertenecen a una recta.
A la variación que corresponde a los valores de ***y*** se la simboliza con Δy ("se lee delta ***y***") y a la variación que corresponde a los valores de ***x*** se la simboliza con Δx ("se lee delta ***x***").



DEFINICIÓN DE PENDIENTE

La pendiente $\boldsymbol{m}$ de una recta no vertical que pasa por los puntos $P_1 = (x_1\ ;\ y_1)\ \ y\ \ P_2 = (x_2\ ;\ y_2)$ es:

$$\boxed{\boldsymbol{m} = \frac{\Delta \boldsymbol{y}}{\Delta \boldsymbol{x}} = \frac{\boldsymbol{y_2} - \boldsymbol{y_1}}{\boldsymbol{x_2} - \boldsymbol{x_1}} \qquad siempre\ que\ \ x_1 \neq x_2} \qquad \mathbf{1}$$

Ejemplo

Supongamos que necesitamos averiguar la pendiente de la recta que pasa por los puntos $P\ (2; 1)\ \ y\ \ Q(5; 3)$. Una forma de determinarla es utilizar la fórmula **1.**

Antes de aplicar la fórmula que define a la pendiente, es conveniente, para evitar errores, nombrar las coordenadas de los puntos con los de la fórmula,

$$P\ (2; 1) \qquad y \qquad Q\ (5; 3)$$

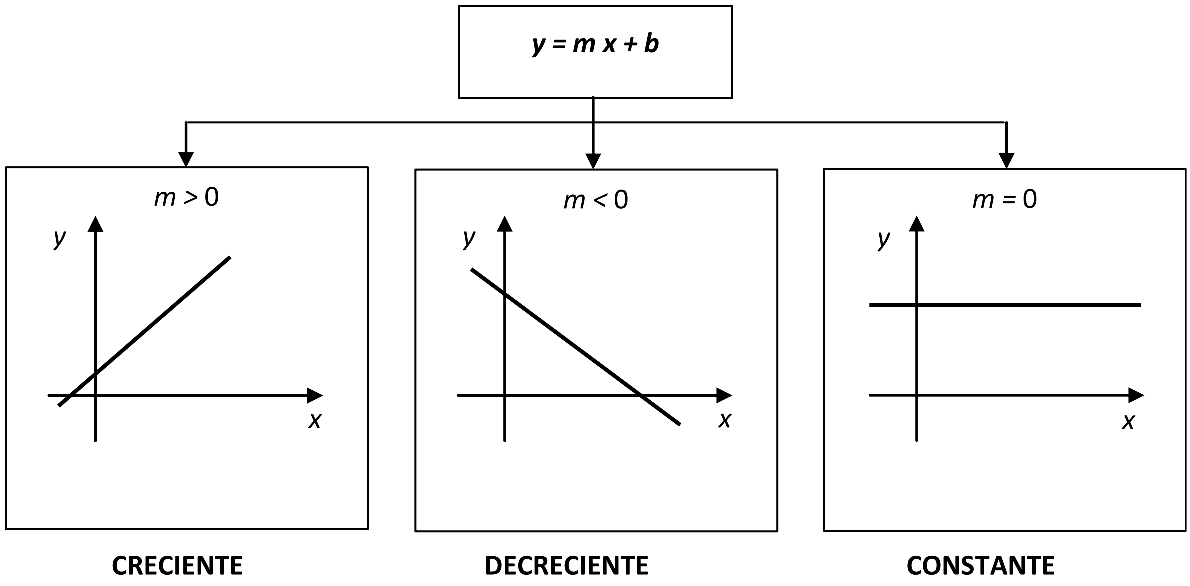
$$\boldsymbol{x_1} \qquad \boldsymbol{y_1} \qquad \boldsymbol{x_2} \qquad \boldsymbol{y_2}$$

Ahora sustituimos en la fórmula:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{3 - 1}{5 - 2} = \frac{2}{3}$$

ACLARACIÓN
No importa a cuál de los dos puntos nombramos $P_1 = (x_1\ ;\ y_1)$ y a cuál nombramos $P_2 = (x_2\ ;\ y_2)$, el valor de la pendiente de la recta que pasa por esos puntos es la misma.

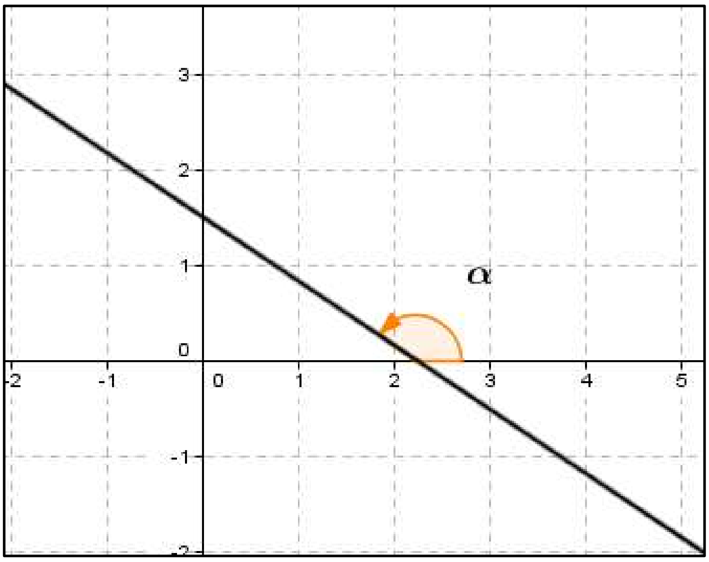
- La inclinación de cada recta está directamente relacionada con el signo de su pendiente. En el siguiente cuadro se clasifican las funciones lineales según el valor de la pendiente:

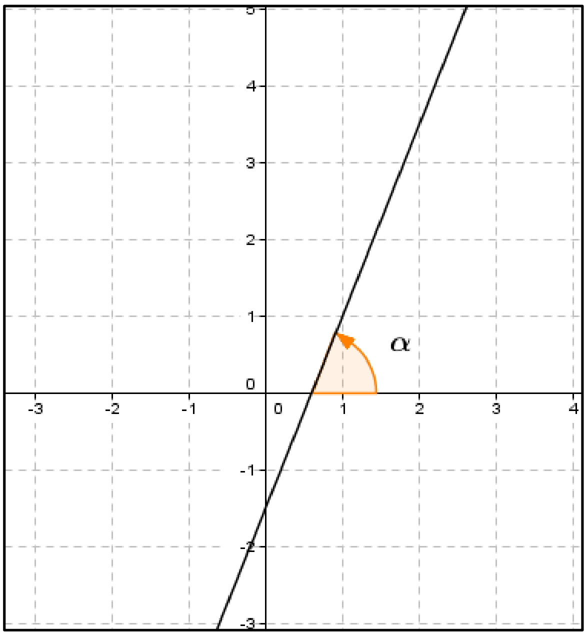


- El concepto de pendiente de una recta a su vez está asociado con otro elemento importante de la recta, estamos refiriéndonos a su **ángulo de inclinación**.

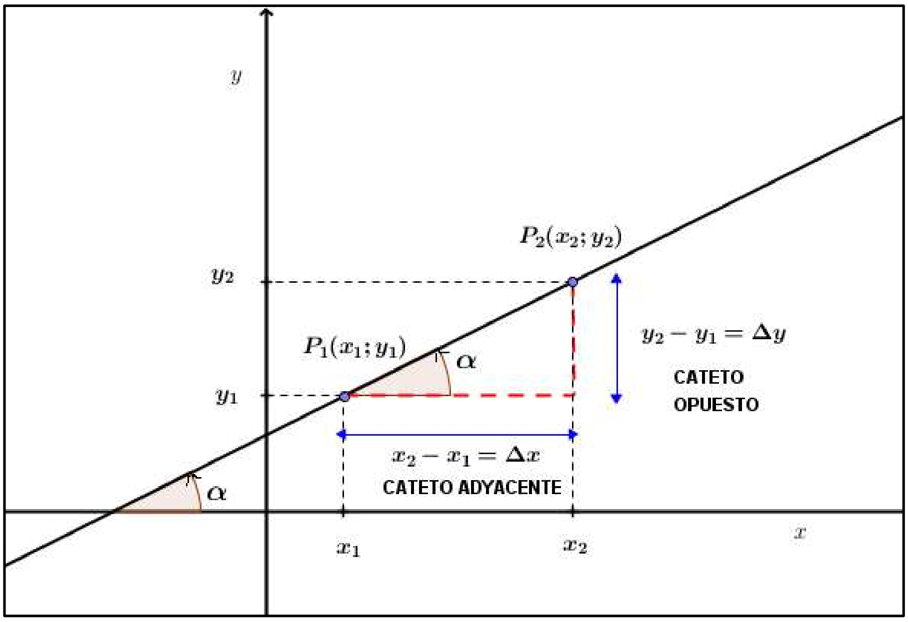
Llamaremos **ángulo de inclinación de una recta** al ángulo α que queda determinado entre la recta y el eje positivo de las x. Éste ángulo se mide en sentido contrario a las agujas del reloj (sentido anti horario), partir de la dirección positiva del eje *x*.

Es evidente, que por nuestras consideraciones el valor del ángulo de inclinación de una recta estará comprendido entre 0° y 180°. En la siguiente figura, se señalan los ángulos de inclinación para cada una de las rectas graficadas:





Una vez hechas estas argumentaciones, estamos listos para definir la pendiente de una recta en términos de su ángulo de inclinación. Observemos el siguiente gráfico:



Podemos ver que en el triángulo rectángulo que queda formado, la hipotenusa es un segmento contenido en la recta en cuestión, el cateto opuesto al ángulo α mide $y_2 - y_1$ y el cateto adyacente correspondiente mide $x_2 - x_1$.

Recordemos que la razón trigonométrica que relaciona cateto opuesto y cateto adyacente es la **TANGENTE**,

$$tan\ \alpha = \frac{CAT.OPUESTO}{CAT.ADYACENTE}$$

Reemplazando los catetos por sus medidas correspondientes obtenemos:

$$tan\ \alpha = \frac{CAT.OPUESTO}{CAT.ADYACENTE} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Por lo definido antes, la pendiente m de la recta es:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Por lo tanto la **pendiente de una recta** m es igual a la tangente trigonométrica de su ángulo de inclinación α. Simbólicamente se expresa así:

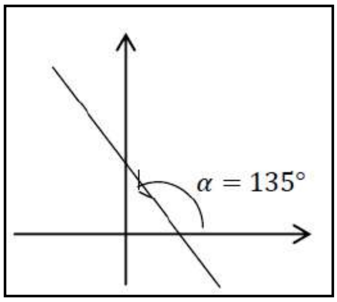
$$\boxed{\boldsymbol{m = tan\alpha}}$$

Ejemplo

Halla la pendiente de una recta sabiendo que el ángulo de inclinación es igual a 135°.

Respuesta:

Si $\alpha = 135°$ entonces reemplazando en la fórmula anterior tenemos que:



$$m = tan135°$$
$$m = -1$$

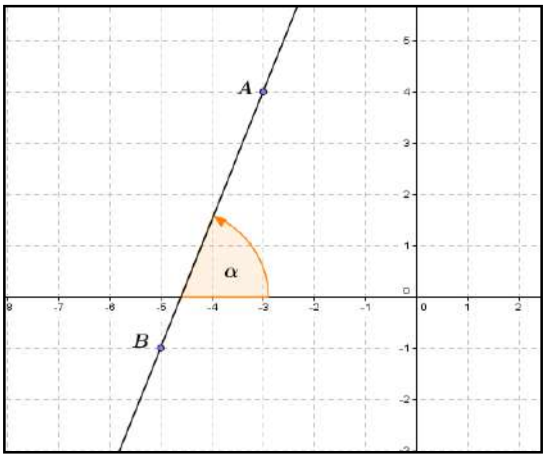
Por lo tanto, la pendiente de la recta es $m = -1$

Ejemplo

Encuentra la pendiente y el ángulo de inclinación de una recta que pasa por los puntos $A(-3;4)\ y\ B(-5;-1)$.

Respuesta

Antes de comenzar con el trabajo algebraico, representamos gráficamente los puntos A y B y trazamos la recta que los contiene. Marcamos el ángulo de inclinación y lo llamamos α.



Observando el gráfico podemos anticipar que el ángulo de inclinación debe ser un ángulo agudo. Indicamos primero las coordenadas de los puntos, para sustituirlos correctamente en la fórmula:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Nombramos las coordenadas de los puntos con los de la fórmula,

$$A\ (-3;4) \quad y \quad B\ (-5;-1)$$

$$\boldsymbol{x_1} \qquad \boldsymbol{y_1} \qquad \boldsymbol{x_2} \qquad \boldsymbol{y_2}$$

Reemplazamos en la fórmula los valores correspondientes, y tenemos que la pendiente es igual a:

$$m = \frac{-1-4}{-5-(-3)} = \frac{-5}{-2} = \frac{5}{2}$$

Conociendo el valor de la pendiente, procedemos de la siguiente manera:

- ✓ Sustituimos el valor de la pendiente en la fórmula,

$$\boldsymbol{tan\alpha = m}$$

De esta manera, obtenemos la ecuación $tan\alpha = \frac{5}{2}$.

- ✓ Resolvemos la ecuación despejando α ,

$$\hat{\alpha} = arctan\frac{5}{2}.$$

Con ayuda de la calculadora científica tenemos que,

$$\hat{\alpha} = 68°11`55``$$

REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN LINEAL

Una función lineal se puede representar teniendo en cuenta distintos procedimientos. A continuación detallaremos algunos de ellos.

❖ Teniendo en cuenta la pendiente y la ordenada al origen.

Gráficamente la pendiente $\boldsymbol{m}$ indica la cantidad de unidades que se desplaza la coordenada $\boldsymbol{y}$ (hacia arriba o hacia abajo) por cada unidad que se desplaza la coordenada $\boldsymbol{x}$ hacia la derecha. Teniendo en cuenta esto, podemos representar una función lineal considerando la pendiente y la ordenada al origen. Aclaremos esto analizando el siguiente ejemplo.

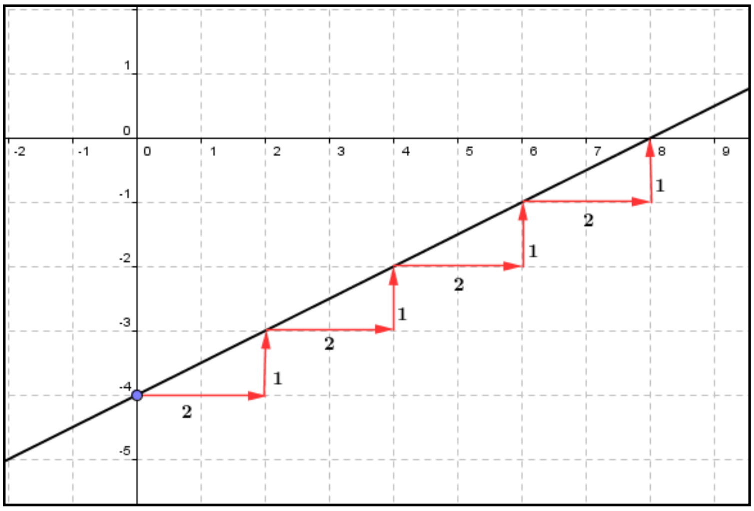
Ejemplo

Representa gráficamente las siguientes funciones lineales teniendo en cuenta **pendiente** y **ordenada al origen.**

$$a)\quad f(x) = \frac{1}{2}x - 4 \qquad b)\quad y = 2 \qquad c)\quad g(x) = -3x + 2$$

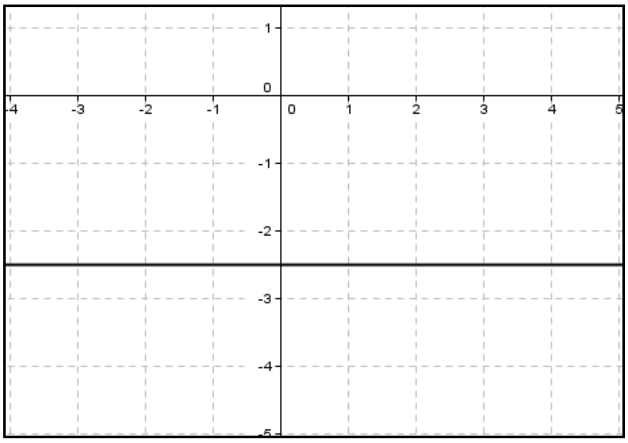
Respuestas:

a) La pendiente de la función $f(x) = \frac{1}{2}x - 4$ es $m = \frac{1}{2}$ y la ordenada al origen es $b = -4$. Dibujamos el punto que representa la odenada al origen: $(0\,;4)$. A partir de este punto "nos movemos" al ritmo de la pendiente. Es decir, "cada dos unidades que aumenta la abscisa $\boldsymbol{x}$, la ordenada $\boldsymbol{y}$ sube 1 unidad". De esta manera se obtienen otros puntos de la recta.

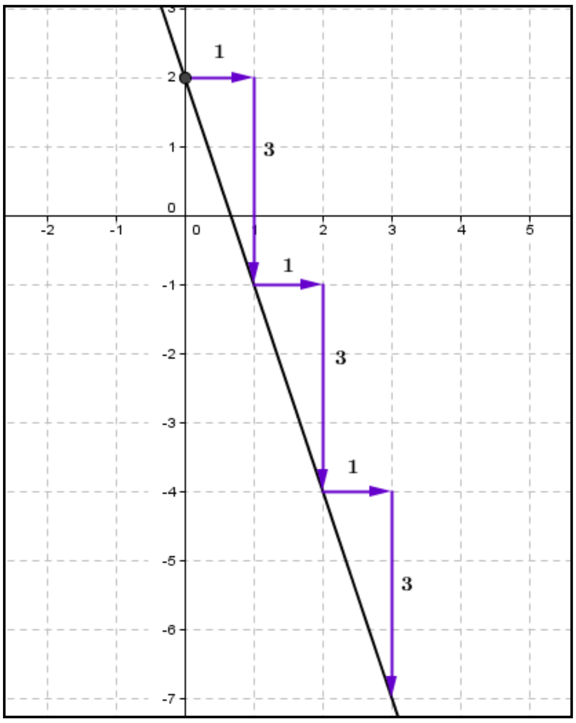


b) En este caso donde la función está dada por la ecuación y = -2,5 , la pendiente es igual a cero y la ordenada al origen es igual a -2,5.

Observamos que cuando la variable $\boldsymbol{x}$ aumenta una unidad**,** la variable $\boldsymbol{y}$ no aumenta ni disminuye, se mantiene constante. Por lo tanto, la representación gráfica de esta función es una recta horizontal paralela al eje x.



c) La función lineal de ecuación $g(x) = -3x + 2$ tiene como pendiente a $m = -3$ y como ordenada al origen a $b = 2$. Repetimos el procedimiento antes descripto en el inciso a)



Aquí vemos que por cada unidad que aumenta $\boldsymbol{x}$**,** la variable dependiente $\boldsymbol{y}$ disminuye tres unidades

- ❖ Otra forma de representar gráficamente una función lineal es teniendo en cuenta **la raíz** y la **ordenada al origen.**

Para ello solo debemos calcular la raíz, es decir el punto de intersección de la recta con el eje de abscisa cuyas coordenadas son $(x; 0)$. Esto implica resolver la ecuación de 1º grado $f(x) = 0$ o bien

$$m.x + b = 0$$

$$x = \frac{-b}{m}$$

Luego el punto de corte con el eje x es: $\left(\frac{-b}{m}\ ; 0\right)$

El valor de la ordenada al origen lo leemos de la fórmula de la función (cuando ésta está en forma explícita). Como para representar gráficamente una recta basta conocer dos puntos de ella, resta dibujar los puntos de corte con el eje $\boldsymbol{x}$ y el eje $\boldsymbol{y}$ respectivamente y trazar la recta que los contiene.

Ejemplo

Representa gráficamente la función lineal $g(x) = \frac{5}{6}.x + \frac{5}{2}$ teniendo en cuenta **la raíz** y la **ordenada al origen.**

Respuesta
Para calcular la raíz planteamos la ecuación lineal $\frac{5}{6}.x + \frac{5}{2} = 0$. Aplicando las propiedades pertinentes de las operaciones, despejamos x:

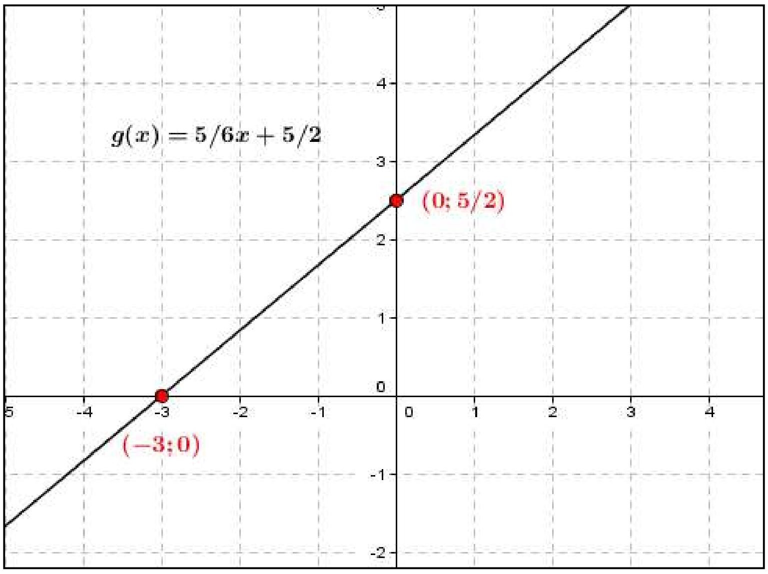
$$\frac{5}{6}.x = -\frac{5}{2}$$

$$x = -\frac{5}{2} : \frac{5}{6}$$

$$x = -3$$

Luego el punto de corte con el eje x es : $(-3; 0)$.

Observando la expresión de la función tenemos que la ordenada el origen es $\frac{5}{2}$, por lo tanto el punto de corte con el eje y es: $\left(0; \frac{5}{2}\right)$. Marcamos estos dos puntos en un sistema de ejes cartesianos y luego trazamos la recta que los contiene.



ACTIVIDADES

Ejercicio 56

a) Completa la siguiente tabla:

Inciso	Función expresada en lenguaje coloquial	Función expresada en lenguaje algebraico
A	*La función que a cada número le asigna su doble.*	
B	*La función que a cada número real le asigna la suma entre el triple de su cuadrado y cinco.*	
C		$y = 2x - 3{,}5$
D	*La función que a cada número real distinto de cero le asigna la razón entre 7 y el número.*	
E	*La función que a cada número le asigna su opuesto.*	
F		$y = \sqrt{x} + 2$
G		$y = -0{,}25x - 9$
H	*La función que expresa la distancia recorrida cada hora por un automóvil que circula a 60 km/h (en física este movimiento se llama rectilíneo uniforme).*	
I	*La función que relaciona el radio de una circunferencia y su perímetro.*	
J	*La función que relaciona el radio de una circunferencia y su área.*	

b) Indica cuál de las funciones anteriores corresponden a una función lineal.

c) En los incisos ***h, i, j***, indica cuál es la variable independiente y cuál la variable dependiente.

Ejercicio 57

a) Considera las siguientes funciones. Halla la **expresión explícita** (despejar la variable y) de cada una de ellas e indica cuál corresponde a una función lineal.

1) $y - 3 = 5.(x - 1)$ 2) $\dfrac{x}{-3} + \dfrac{y}{\frac{3}{2}} = 1$ 3) $y + \dfrac{7}{3} = 0$ 4) $y = \dfrac{2}{5}x$

5) $x.y = 2$ 6) $5y + 3x - 20 = 0$ 7) $y + 3{,}5x = 0$ 8) $y = x^2 - (x - 3)^2$

9) $\sqrt{y - 3} = x$ 10) $y = \dfrac{1 - x}{4}$ 11) $y - x = 0$ 12) $y = x^2 - (x + 2)^2$

b) Representa solo las funciones que sean lineales del inciso anterior teniendo en cuenta la **pendiente** y la **ordenada al origen**.

Ejercicio 58

i) Representa las siguientes funciones lineales teniendo en cuenta la **raíz** y la **ordenada al origen**.

$a)\ y-3=-2x+1 \quad b)\ \frac{x}{-3}+\frac{y}{4}=1 \quad c)\ \ y+3=0 \quad d)\ 7y=-3x+12$

$e)\ \frac{x}{3{,}5}+\frac{y}{2}=1 \quad f)\ y+2{,}5=\frac{x-8}{-2} \quad g)\ -6x+4y+16=0 \quad \text{h)}\ y=\frac{2}{5}x+2 \quad i)\ y=0$

ii) Completa la siguiente tabla teniendo en cuenta las expresiones de las funciones del inciso anterior:

Inciso	Expresión explícita de la función	Pendiente	Ordenada al origen	Raíz	Crecimiento
a					
b					
c					
d					
e					
f					
g					
h					
i					

Ejercicio 59

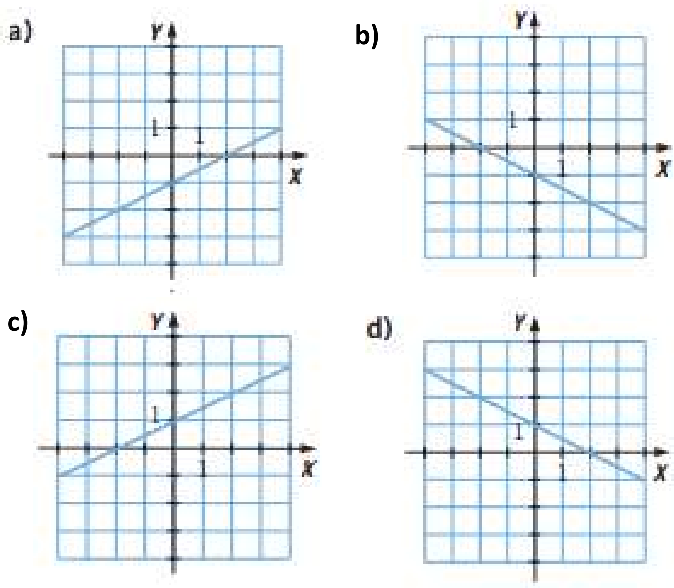
a) Indica cuál de los siguientes puntos pertenecen al gráfico de la función $f\colon \boldsymbol{R} \rightarrow \boldsymbol{R},\ \ f(x) = 3x+2$.

$$A=(1;5) \quad B=(2;6) \quad C=(-2;-4) \quad D=\left(\frac{1}{3};3\right) \quad E=(0;3)$$

b) Representa gráficamente la función $f(x)$ y los cinco puntos dados.

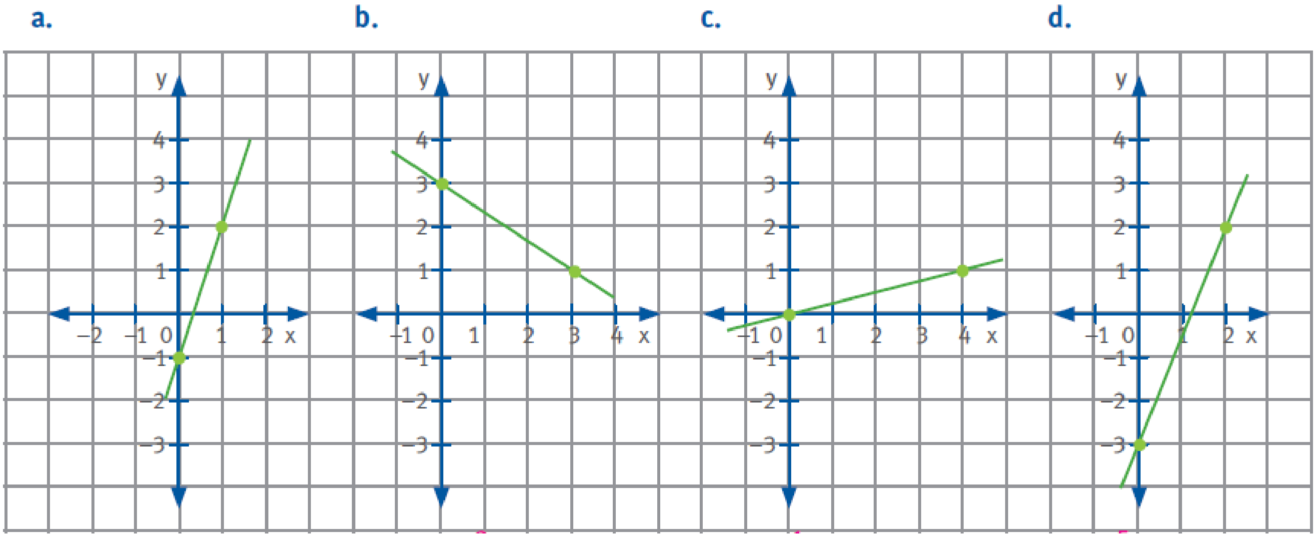
Ejercicio 60

Observa los siguientes gráficos. Indica con una **X** , cuál de las siguientes rectas corresponde con la representación gráfica de la función $\boldsymbol{g(x)=-\frac{1}{2}x-1}$**.** Justifica.



Ejercicio 61

Observa las siguientes rectas graficadas. Escriba la expresión de la función lineal que cada una representa. Escriba, en cada caso, los datos que utilizaste.



Ejercicio 62

Sin graficar, clasifica las siguientes funciones lineales en ***crecientes***, ***decrecientes*** o ***constante***. Explica que tuviste que tener en cuenta para hacerlo.

$a)\ y = 12x - 3$ $\quad b)\ y = 6$ $\quad c)\ y = 0{,}25x - 3$ $\quad d)\ y = x\,12{,}5$

$e)\ y = \frac{1}{6}x + \frac{2}{3}$ $\quad f)\ y = -7x - 4$ $\quad g)\ y = -1{,}5$ $\quad h)\ y = 0{,}7x + 0{,}65$

Ejercicio 63

a) Determina el valor de la constante ***a*** para que el punto $(\mathbf{4}\,;\ -\mathbf{8})$ pertenezca a la recta de ecuación:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{-2} = 1$$

b) Halla el valor de ***m*** para que el punto $(\mathbf{6}\,;\ -\mathbf{1},\mathbf{5})$ pertenezca a la recta de ecuación $\boldsymbol{y = m.x - 3,5.}$

c) Determina el valor de la constante ***b*** para que el punto **(-5 ; 4)** pertenezca a la recta cuya ecuación es $y = \frac{2}{5}.x + b.$

d) ¿Cuánto debe valer el número real $\boldsymbol{k}$ para que el punto $(-1\,;2)$ pertenezca a la recta de ecuación $kx + 7y - 7 = 0$? Grafica.

Ejercicio 64

a) Halla el ángulo de inclinación de cada una de las siguientes rectas:

$i)\ y = x + 2{,}3$ $\quad ii)\ 3x - y + 2 = 0$ $\quad iii)\ \frac{x}{2} + \frac{y}{2} = 1$ $\quad iv)\ 2y - 3 = 0$

b) Representa gráficamente.

Ejercicio 65

Halla la ecuación de la recta que corta al eje x en el punto de abscisa 3 y forma con él un ángulo de 60°.

Ejercicio 66

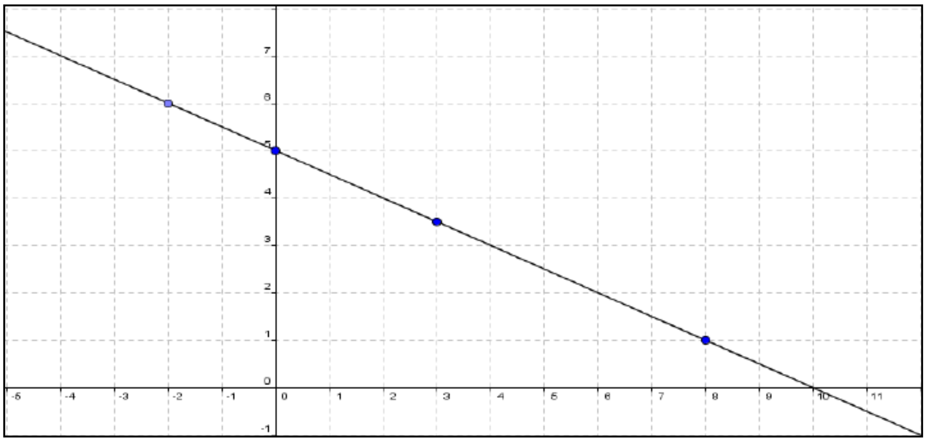
Una recta pasa por $P(3\,;\ -2)$ y forma un ángulo de 45° con el semieje positivo del eje *x*. Encuentra su ecuación y representa gráficamente.

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES CON DOS INCÓGNITAS

Una ecuación lineal con dos incógnitas x y y es una expresión de la forma $ax + by = c$, donde $a, c, b \in R$,y a y b son diferentes de cero a la vez.

Toda ecuación lineal con dos incógnitas tienen como solución a todos los pares ordenados que verifican la ecuación, es decir, tiene infinitas soluciones de la forma $(x; y)$. Estas soluciones están contenidas en una recta.

Por ejemplo, la ecuación lineal $2x + 4y = 20$ tiene infinitas soluciones. Algunos de los pares de valores que son solución de ésta ecuación son: $(-2; 6), (0; 5), (3; 3{,}5)$, $(8; 1)$ .Para conseguirlas, elegimos arbitrariamente, un valor para x y luego, despejando obtenemos el correspondiente valor de y. La representación gráfica de la ecuación $2x + 4y = 20$ es una recta. Los puntos que pertenecen a la recta verifican la ecuación y por lo tanto son las soluciones de la misma. En el siguiente gráfico podemos visualizar lo antes dicho.



Un sistema de dos ecuaciones lineales con incógnitas x y y , también llamado ecuaciones simultáneas de dos por dos es de la forma:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

donde $a_1,\ a_2,\ b_1,\ b_2,\ c_1\ y\ c_2\ \in R$, y en cada una de las ecuaciones, por lo menos uno de los coeficientes de las incógnitas es diferente de cero.

Para indicar que varias ecuaciones forman un sistema, se abarca el conjunto de todas ellas con una llave. En cada una de las ecuaciones, por lo menos uno de los coeficientes de las incógnitas es diferente de cero.

Resolver analíticamente un sistema de este tipo es encontrar, si existen, los pares de números reales $\boldsymbol{x}$ y $\boldsymbol{y}$ que satisfacen ambas ecuaciones.

Un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas es representado geométricamente por dos rectas en el plano. Por lo tanto la solución de un sistema es el conjunto de puntos que ambas rectas tienen en común. La resolución analítica de un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas equivale geométricamente a estudiar las posiciones relativas de las rectas en el plano.

MÉTODOS ANALÍITICOS PARA RESOLVER SISTEMAS DE ECUACIONES

Existen varios métodos analíticos que permiten resolver un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas. La elección de un método u otro dependerá de cómo está planteado el sistema original. Claro está que independientemente del método que se elija siempre se debe arribar al mismo resultado.

- MÉTODO DE SUSTITUCIÓN

Para resolver un sistema utilizando el método de sustitución se pueden seguir los siguientes pasos:

1. Elegir una de las ecuaciones y despejar de ella una de las incógnitas (cualquiera).
2. Sustituir la expresión obtenida en el paso 1. en la otra ecuación del sistema (recuerde usar paréntesis cuando realice la sustitución). Queda planteada una ecuación con una sola incógnita.
3. Resolver la nueva ecuación obtenida en el paso anterior. De ésta manera, se halla el valor de una de las incógnitas.
4. Reemplazar el valor obtenido en el paso 3 en el despeje del paso 1. y calcular el valor de la segunda incógnita.
5. Escribir el conjunto solución.

Ejemplo

Resuelve los siguientes sistemas utilizando el método de sustitución.

$$a)\ \begin{cases} 2x+3y=4 \\ \frac{1}{2}x+y=3 \end{cases} \qquad\qquad b)\ \begin{cases} x-\frac{2}{3}y=2 \\ 3x-2y=6 \end{cases}$$

Solución inciso a)

Por como está planteado el sistema, nos conviene elegir despejar la incógnita $\boldsymbol{y}$ de la segunda ecuación:

$$\frac{1}{2}x+y=\ 3 \qquad \Rightarrow \qquad y=-\frac{1}{2}x+3$$

Esta nueva ecuación obtenida es equivalente a la original, es decir, tendrá el mismo conjunto solución que la original. Reemplazamos la expresión obtenida para $\boldsymbol{y}$ en la otra ecuación del sistema:

$$2x+3\boldsymbol{y}=4$$

$$2x+3.\overbrace{\left(-\frac{1}{2}x+3\right)}=4$$

La ecuación que quedo planteada tiene una sola incógnita, la resolvemos despejando x:

$$2x+3.\left(-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\boldsymbol{x}+\mathbf{3}\right)=4$$

$$2x-\frac{3}{2}x+9=4$$

$$\frac{1}{2}x=4-9$$

$$x=-10$$

Una vez hallado el valor de x, lo reemplazamos en la expresión en la cual despejamos y,

$y = -\frac{1}{2}x + 3 \quad \Rightarrow \quad$ para $x = -10$, obtenemos $y = -\frac{1}{2}.(\mathbf{-10}) + 3 \quad \Rightarrow \quad y = 8$

Entonces, el par ordenado $(-10; 8)$ es el **único** par de valores que verifica simultáneamente ambas ecuaciones. Decimos que el sistema tiene única solución.

Por lo tanto, el conjunto solución del sistema es $S = \{(-10; 8)\}$.

Gráficamente las rectas que representan a cada ecuación del sistema son secantes, se intersecan en un punto. Por lo tanto tienen distintas pendientes.

<u>Solución inciso b)</u>

Elegimos despejar la incógnita x de la primera ecuación:

$$x - \frac{2}{3}y = 2 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{2}{3}y + 2$$

Sustituimos la expresión obtenida para $\boldsymbol{x}$ en la otra ecuación del sistema:

$$3x - 2y = 6$$

$$3.\overbrace{\left(\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}\boldsymbol{y} + \mathbf{2}\right)} - 2\mathrm{y} = 6$$

Resolvemos la ecuación planteada y obtenemos:

$$2\mathrm{y} + 6 - 2\mathrm{y} = 6 \quad \Rightarrow \quad 2y - 2y = 6 - 6 \quad \Rightarrow \quad 0y = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{0 = 0}$$

La igualdad que obtuvimos es siempre válida, esto significa que independientemente del valor que le asignemos a $\boldsymbol{y}$, siempre se cumple la igualdad. ¿Qué significa esto? Significa que la ecuación posee infinitas soluciones, ya que podemos asignarle a cualquier valor a $\boldsymbol{y}$ con el cual, a partir de la condición $x = \frac{2}{3}y + 2$ se determina el valor de x. Por lo tanto existen infinitos pares $(x\,;y\,)$ que verifican simultáneamente ambas ecuaciones.

Concluimos que el sistema posee infinitas soluciones. Los pares que son solución del sistema tienen la forma:

$\left(\frac{2}{3}y + 2\,; y\,\right)$ donde y es cualquier número real.

Entonces, el conjunto solución del sistema lo podemos escribir de la siguiente manera:

$$S = \left\{\left(\frac{2}{3}y + 2\,; y\right)\,, y \in \mathbb{R}\right\}$$

Gráficamente las rectas que representan a cada ecuación del sistema son coincidentes, es decir, tienen la misma pendiente y la misma ordenada al origen.

❖ MÉTODO DE IGUALACIÓN

Uno de los procedimientos que puede usarse para resolver un sistema es el llamado método de igualación. Se conoce con este nombre debido a que consiste en "igualar" las expresiones que se obtienen de despejar la misma incógnita de las dos ecuaciones.

Este método consta de los siguientes pasos:

1. Despejar de ambas ecuaciones la misma incógnita
2. Igualar las expresiones obtenidas en el paso 1. De esta manera queda planteada una ecuación de una incógnita y permite obtener el valor de una de las incógnitas, en caso de que exista.
3. Resolver dicha ecuación.
4. Reemplazar el valor obtenido en el paso 3 en <u>ambas ecuaciones</u> y obtener el valor de la segunda incógnita.
5. Escribir el conjunto solución.

<u>Ejemplo</u>

Resuelve los siguientes sistemas utilizando el método de igualación

$$a)\ \begin{cases} y = 3x + 2 \\ -0{,}5x + y = -3 \end{cases} \qquad\qquad b)\ \begin{cases} -2x + y = -4 \\ y = 2x + 1 \end{cases}$$

<u>Solución inciso a)</u>

Por como está planteado el sistema elegimos despejar la incógnita y de ambas ecuaciones, de esta manera obtenemos:

$$\begin{cases} y = 3x + 2 \\ y = 0{,}5x - 3 \end{cases}$$

A continuación igualamos las expresiones obtenidas para determinar, si existe, el valor de x que permite obtener el mismo valor de y en ambas ecuaciones:

$$3x + 2 = 0{,}5x - 3$$

Queda planteada una ecuación cuya única incógnita es x. Al resolver, obtenemos $x = -2$ (queda a cargo del alumno verificar este resultado).

Falta averiguar el valor de y. Para ello, reemplazamos en ambas ecuaciones el valor obtenido de x :

$y = 3x + 2 \quad \Rightarrow \quad y = 3.\,(-2) + 2 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{y = -4}$

$-0{,}5x + y = -3 \quad \Rightarrow \quad -0{,}5.\,(-2) + y = -3 \quad \Rightarrow \quad 1 + y = -3 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{y = -4}$

El valor de y obtenido en ambos casos coincide.

El conjunto solución es $S = \{(-2; -4)\}$.

<u>Solución inciso b)</u>

Despejamos de ambas ecuaciones la incógnita y, obtenemos el sistema equivalente:

$$\begin{cases} y = 2x - 4 \\ y = 2x + 1 \end{cases}$$

Igualamos las expresiones obtenidas y resolvemos la ecuación planteada:

$$2x - 4 = 2x + 1$$

$$2x - 2x = 4 + 1$$

$$0x = 5$$

$0 = 5$ ABSURDO!!!! 

Al intentar resolver el sistema arribamos a una expresión falsa. Concluimos que la ecuación planteada no tiene solución, es decir no existe ningún valor de x que la verifique. En consecuencia tampoco hay ningún valor de y. No existe ningún par de valores $(x\ ; y\ )$ que verifiquen simultáneamente ambas ecuaciones

Entonces el conjunto solución es vacío, y lo escribimos: $\boldsymbol{S} = \emptyset$**.**

Gráficamente las rectas que representan a cada ecuación del sistema son paralelas, es decir, tienen la misma pendiente y distinta ordenada al origen

- MÉTODO DE REDUCCIÓN POR SUMA Y RESTAS

Para resolver un sistema por éste método, podemos seguir los siguientes pasos:

1. Expresar ambas ecuaciones en forma implícita.
2. Multiplicar todos los coeficientes de una de las ecuaciones por un mismo número distinto de cero, de modo que los coeficientes de una de las incógnitas en ambas ecuaciones resulten iguales u opuestas (iguales en valor absoluto).
3. Sumar o restar la ecuación obtenida en el paso 2. con la otra ecuación del sistema que no fue modificada, de manera que se cancele los términos que contengan la misma incógnita. Esto permite obtener una ecuación con una sola incógnita.
4. Resolver la ecuación obtenida.
5. Reemplazar el valor obtenido en el paso 4 en ambas ecuaciones y obtener el valor de la segunda incógnita.
6. Escribir el conjunto solución.

Ejemplo

Resuelve los siguientes sistemas utilizando el método de reducción.

$$a)\ \begin{cases} -5x + 2y = -4 \\ \ \ 2x - 4y = 4 \end{cases} \qquad\qquad b)\ \begin{cases} 5x - 5y + 5 = 0 \\ \ \ 0{,}5y + x = 2 \end{cases}$$

Solución inciso a)

Al analizar las ecuaciones que componen el sistema, estas están escritas en forma implícita. Para casos como éste, es conveniente utilizar el método de reducción. Para ello, elegimos multiplicar por **2** todos los coeficientes de la primera ecuación:

$$-5x + 2y = -4$$

$$(-5x + 2y).\mathbf{2} = (-4).\mathbf{2}$$

$$\boldsymbol{-10x + 4y = -8}$$

Al reemplazar la primera ecuación del sistema por la ecuación obtenía, conseguimos un sistema equivalente al original:

$$\begin{cases} -5x + 2y = -4 \\ 2x - 4y = 4 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \mathbf{-10x + 4y = -8} \\ 2x - 4y = 4 \end{cases}$$

Observemos que en el nuevo sistema planteado los coeficientes de la incógnita y son opuestos. Entonces si sumamos ambas ecuaciones lograremos eliminar los términos que contienen a la incógnita y, y conseguiremos una ecuación en términos solamente de la otra variable.

$$\begin{array}{r} -10x + 4y = -8 \\ + \quad 2x - 4y = 4 \\ \hline -8x = -4 \\ x = \frac{1}{2} \end{array}$$

Reemplazamos en ambas ecuaciones el valor obtenido de x :

$$-5x + 2y = -4 \quad \Rightarrow \quad -5.\left(\frac{1}{2}\right) + 2y = -4 \quad \Rightarrow \quad 2y = -\frac{3}{2} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{y = -\frac{3}{4}}$$

$$2x - 4y = 4 \quad \Rightarrow \quad 2.\left(\frac{1}{2}\right) - 4y = 4 \quad \Rightarrow -4y = 3 \quad \Rightarrow \boldsymbol{y = -\frac{3}{4}}$$

El valor de y obtenido en ambos casos coincide.

Por lo tanto, el conjunto solución es $S = \left\{\left(\frac{1}{2}; -\frac{3}{4}\right)\right\}$.

<u>Solución inciso b)</u>

Antes de comenzar a resolver el sistema por el método de reducción, es conveniente ordenarlo para poder realizar la suma correctamente. Entonces:

$$\begin{cases} 5x - 5y + 5 = 0 \\ 0{,}5y + x = 2 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} 5x - 5y = -5 \\ x + 0{,}5y = 2 \end{cases}$$

Recordemos que el nuevo sistema obtenido es equivalente al original, es decir tienen la misma solución.

Luego de analizar los coeficientes de las incógnitas, elegimos multiplicar por **-5** todos los coeficientes de la segunda ecuación:

$$x + 0{,}5y = 2$$

$$(x + 0{,}5y).(-5) = 2.(-5)$$

$$\boldsymbol{-5x - \frac{5}{2}y = -10}$$

Reemplazamos esta nueva ecuación en el sistema:

$$\begin{cases} 5x - 5y = -5 \\ -5x - \frac{5}{2}y = -10 \end{cases}$$

En este caso, los coeficientes de la incógnita x son opuestos. Entonces si sumamos ambas ecuaciones lograremos eliminar los términos que contienen a la incógnita x, y conseguiremos una ecuación en términos solamente de la otra variable.

$$\begin{array}{r} 5x - 5y = -5 \\ + \; -5x - \frac{5}{2}y = -10 \\ \hline -\frac{15}{2}y = -15 \\ y = 2 \end{array}$$

Reemplazamos en ambas ecuaciones el valor obtenido de y :

$5x - 5y + 5 = 0 \quad \Rightarrow \quad 5x - 5.\mathbf{2} + 5 = 0 \quad \Rightarrow \quad 5x = 5 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{x = 1}$

$0{,}5y + x = 2 \quad \Rightarrow \quad 0{,}5.\mathbf{2} + x = 2 \quad \Rightarrow \; 1 + \mathrm{x} = 2 \quad \Rightarrow \; \boldsymbol{x = 1}$

El valor de x obtenido en ambos casos coincide.

Por lo tanto, el conjunto solución es $S = \{(1; 2)\}$.

CLASIFICACIÓN DE LOS SISTEMAS SEGÚN SU SOLUCIÓN

Todo sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas puede asociarse con dos rectas en un mismo sistema de ejes cartesianos. Por eso, la clasificación del sistema, y por ende, la cantidad de soluciones que este tiene, guardan estrecha vinculación con la relación entre las rectas que lo representan gráficamente.

En un sistema de dos ecuaciones lineales se pueden presentar tres situaciones:

- ✓ Si el sistema no tiene solución, es decir, no existe ningún par $(x\,;y\,)$ que satisfaga simultáneamente ambas ecuaciones, decimos que el sistema es **incompatible.** Gráficamente las rectas que representan a las ecuaciones son **paralelas no coincidente**. Un ejemplo de esto es el sistema del ejemplo 11 inciso b.
- ✓ Si el sistema tiene solución y esta es única, decimos que el sistema es **compatible determinado.** Gráficamente las rectas se intersecan en un punto, éste representa la solución del sistema. Las **rectas son secantes.** Un ejemplo de esto es el sistema del ejemplo 11 inciso a
- ✓ Si el sistema tiene solución pero no es única, es decir, existen infinitos pares $(x\,;y\,)$ que verifican simultáneamente ambas ecuaciones, decimos que el sistema es **compatible indeterminado.** Gráficamente las rectas tienen infinitos puntos en común, las **rectas son coincidentes**. Un ejemplo de esto es el sistema del ejemplo 10 inciso b.

A continuación analizaremos un modo de determinar si el sistema tiene o no solución y si la tiene si esta es única sin necesidad de resolverlo a través de algún método analítico. Para ello analizaremos la relación que existe entre los coeficientes de las ecuaciones que lo componen.

Consideremos nuevamente los sistemas de los ejemplos 10 y 11.

Los coeficientes de la incógnita x son 2 y $\frac{1}{2}$, los coeficientes de la incógnita y son 3 y 1 y los términos independientes son 4 y 3 respectivamente.

$$\begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ \frac{1}{2}x + y = 3 \end{cases}$$

Si planteamos la razón entre los respectivos coeficientes, es decir:

$$\frac{2}{\frac{1}{2}} \quad ; \quad \frac{3}{1} \quad ; \quad \frac{4}{3}$$

podemos observar que no existe ninguna relación de proporcionalidad entre los coeficientes de los términos lineales, es decir:

$$\frac{2}{\frac{1}{2}} \neq \frac{3}{1} \neq \frac{4}{3}$$

Cuando sucede esto, podemos asegurar que el sistema tiene solución y que esta es única. Por lo tanto, clasificamos el sistema como **compatible determinado**. Gráficamente las rectas son secantes.

Analicemos el sistema $\begin{cases} x - \frac{2}{3}y = 2 \\ 3x - 2y = 6 \end{cases}$. Para ello procederemos de forma análoga a lo anterior.

Los coeficientes de la incógnita x son 1 y 3 , los coeficientes de la incógnita y son $-\frac{2}{3}$ y -2 y los términos independientes son 2 y 6 respectivamente.

Planteamos las razones entre los coeficientes de los términos lineales y los términos independientes:

$$\frac{1}{3} \quad ; \quad \frac{-\frac{2}{3}}{-2} \quad ; \quad \frac{2}{6}$$

Observamos que existe una relación de proporcionalidad entre los coeficientes de los términos lineales y los términos independientes:

$$\frac{1}{3} = \frac{-\frac{2}{3}}{-2} = \frac{2}{6}$$

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

Esto lo interpretamos diciendo que el sistema tiene solución y son infinitas. Lo clasificamos como **compatible indeterminado**. Las rectas que representan a cada ecuación que compone el sistema son coincidentes.

Por último consideremos el sistema $\begin{cases} -2x + y = -4 \\ y = 2x + 1 \end{cases}$.

Antes de plantear las razones entre los coeficientes de los términos lineales y los términos independientes, es conveniente ordenar los términos para evitar errores:

$$\begin{cases} -2x + y = -4 \\ -2x + y = 1 \end{cases}$$

Ahora si escribimos las razones:

$$\frac{-2}{-2} \quad ; \quad \frac{1}{1} \quad ; \quad \frac{-4}{1}$$

Observamos que existe una relación de proporcionalidad entre los coeficientes de los términos lineales pero no entre los términos independientes:

$$\frac{-2}{-2} = \frac{1}{1} \neq \frac{-4}{1}$$

$$1 = 1 \neq -4$$

Esto significa que el sistema no tiene solución, es decir, el sistema es **incompatible**. Las rectas que representan a cada ecuación del sistema son paralelas.

ACTIVIDADES

Ejercicio 67

a) Resuelve los siguientes sistemas utilizando el método de sustitución.
b) Clasifica los sistemas según el tipo de solución.
c) Verifica gráficamente la solución obtenida.

$$i)\ \begin{cases} -x + 5y = -6 \\ 2x + 10 + y = 0 \end{cases} \qquad ii)\ \begin{cases} 0{,}5.\left(x - \frac{1}{2}\right) = y - 2 \\ 2x + 8 = 4y \end{cases}$$

Ejercicio 68

a) Resuelve los siguientes sistemas utilizando el método de igualación.
b) Clasifica los sistemas según el tipo de solución.
c) Verifica gráficamente la solución obtenida.

$$i)\ \begin{cases} y = \frac{5}{3} - \frac{1}{2}x \\ \frac{2}{3}x = y - \frac{1}{2} \end{cases} \qquad ii)\ \begin{cases} 2.(x + 2y) - 6 = 2 \\ x - (8 - 2y) = -\frac{1}{2}.(4y + 2x) \end{cases}$$

Ejercicio 69

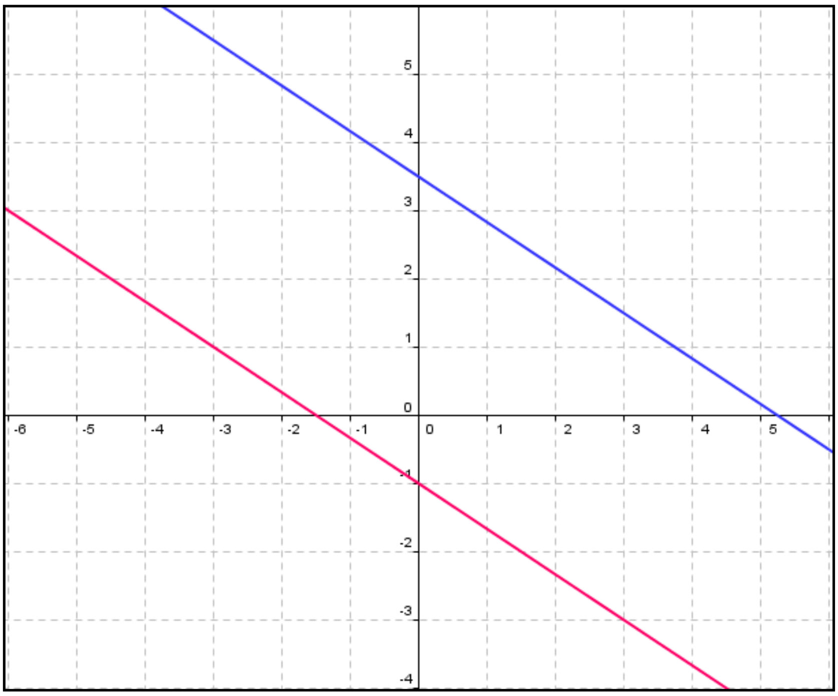
a) Resuelve los siguientes sistemas utilizando el método de reducción.
b) Clasifica los sistemas según el tipo de solución
c) Verifica gráficamente la solución obtenida.

$$i)\ \begin{cases} 2y + x = 5 \\ 3x - y = 1 \end{cases} \qquad ii)\ \begin{cases} -2x + 2y = 8 \\ x - y = -6 \end{cases}$$

Ejercicio 70

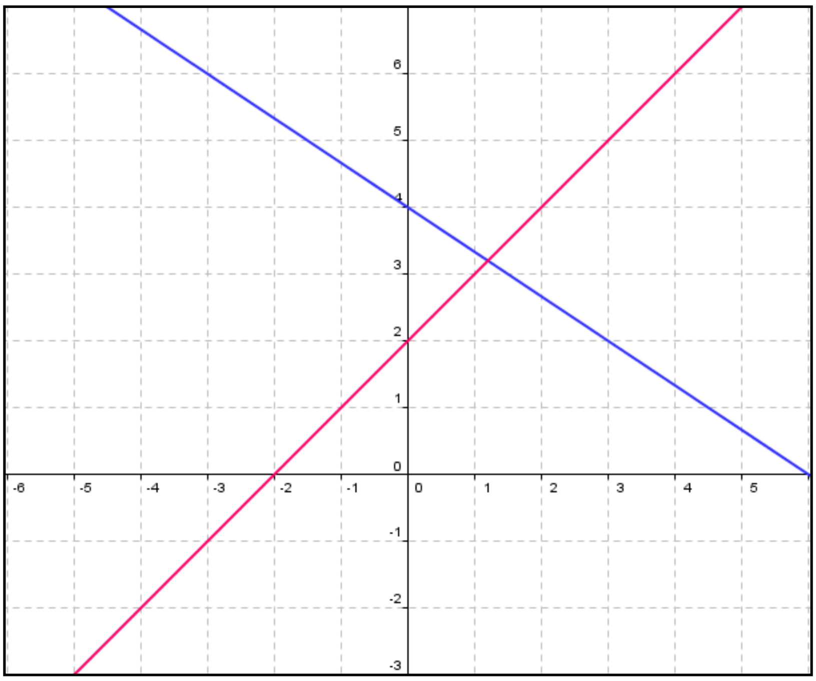
Escribe un S.E.L. (sistema de ecuaciones lineales) que se corresponda a cada una de las siguientes situaciones definidas gráficamente.

a)

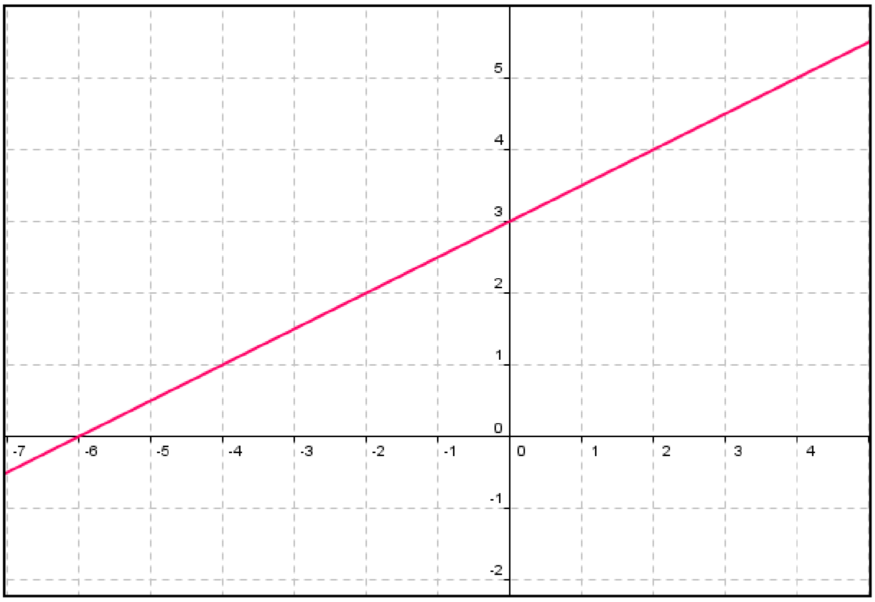


$\begin{cases} \dots\dots\dots\dots\dots\dots.. \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots. \end{cases}$

b)



$\begin{cases} \dots\dots\dots\dots\dots\dots.. \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots. \end{cases}$

c) 

$$\begin{cases} \dots\dots\dots\dots\dots\dots.. \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots. \end{cases}$$

Ejercicio 71

Clasifica, sin resolver, los siguientes sistemas:

$i)\ \begin{cases} 6x - 3y = 4 \\ 1{,}5y - 3x = -2 \end{cases}$ $\quad ii)\ \begin{cases} 2x - \frac{1}{3}y = 25 \\ 12x - 2y = 5 \end{cases}$ $\quad iii)\ \begin{cases} \frac{1}{5}x - \frac{1}{5}y = \frac{1}{2} \\ 2x - 2y = 1 \end{cases}$

Ejercicio 72

Halla los valores de $\boldsymbol{a}$ para que $(4000\,;\ 3000)$ sea la solución del sistema:

$$\begin{cases} y = 0{,}75x \\ y = a.x + 500 \end{cases}$$

Ejercicio 73

Dado el sistema de ecuaciones $\begin{cases} px - 6y = 3 \\ -2x - 2q + 4y = 0 \end{cases}$ indica los valores de $\boldsymbol{p}$ y $\boldsymbol{q}$ para que el sistema tenga:

a) única solución. b) ninguna solución. c) infinitas soluciones

Ejercicio 74

Completa la ecuación incompleta del sistema para que el conjunto solución sea el indicado.

$a)\ \begin{cases} y = x - 5 \\ y = -2x + \dots \end{cases}$ $\qquad S = \{(3; -2)\}$

$b)\ \begin{cases} y = 5x + \dots \\ y = x + 2 \end{cases}$ $\qquad S = \left\{\left(-\frac{2}{5}; \frac{8}{5}\right)\right\}$

$c)\ \begin{cases} y = \dots x - 7 \\ y = 0{,}5x + 1 \end{cases}$ $\qquad S = \emptyset$

Ejercicio 75

a) Agrega al sistema una ecuación para que la única solución sea $x = 2 \ ; \ y = -5$

$$\begin{cases} y = -3x + 1 \\ \dots \ \dots \dots \dots . \end{cases}$$

b) La ecuación agregada en el inciso anterior ¿es la única que cumple con la condición pedida? Justifica.

Ejercicio 76

Dado el siguiente sistema de ecuaciones: $\begin{cases} 2x - 4y = 0 \\ y = ax + b \end{cases}$

Determina en, cada caso, los valores de a y de b para que el sistema sea:

a) Compatible Determinado,
b) Compatible Indeterminado,
c) Incompatible.

Ejercicio 77

Un ciclista que circula por una senda rectilínea a una velocidad constante de 4 m/s, pasa, en un cierto momento, por un puesto de control. Otro ciclista que circula por la misma senda, pero en sentido contrario, a una velocidad constante de 3m/s, pasa por el mismo puesto 20 segundos después.

a) Halla las ecuaciones de los movimientos de ambos ciclistas.
b) Determina el instante en que se encuentran y a qué distancia del puesto lo hacen.
c) Verifica gráficamente los resultados obtenidos.

Ejercicio 78

Una empresa tiene un ingreso mensual de $30 por unidad vendida de cierto producto. Por otra parte, el costo fijo mensual es de $4800 y el costo variable de $22 por unidad. ¿Cuántas unidades es necesario vender por mes para que el ingreso sea igual al costo total, y cuál es ese valor?

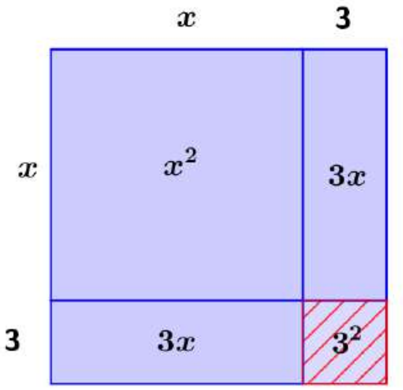
Ejercicio 79

Hace cinco años, la población de una pequeña comunidad indígena era de 500 personas. Como consecuencia de su integración con otras comunidades, la población ascendió a 4000 personas. Suponiendo que la población crece en forma lineal:

a) expresa mediante una fórmula la cantidad de habitantes en función del tiempo;
b) indica aproximadamente cuándo llegará la población a 10000 habitantes;
c) realiza un gráfico cartesiano de la situación.

ECUACIONES CUADRÁTICAS O DE SEGUNDO GRADO

El recorrido en la historia del álgebra y la resolución de ecuaciones nos remite a India, Babilonia y los países de lengua árabe, en la época de la Edad Media europea, entre los siglos V y XV a.C. En ese entonces, los problemas algebraicos se planteaban mediante representaciones geométricas, en lugar de las expresiones a las que estamos habituados en la actualidad. Un ejemplo es el siguiente cuadrado dividido en 4 partes, donde:



Lado del cuadrado: $x+3$

Área del cuadrado = (lado)² = $(\boldsymbol{x}+\mathbf{3})^{\mathbf{2}}$ (1)

Asimismo, sumando las áreas de cada una de las cuatro partes:

Área del cuadrado = $\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}+\mathbf{2}.(\mathbf{3}\boldsymbol{x})+(\mathbf{3}^{\mathbf{2}})$

$= \boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}+\mathbf{6}\boldsymbol{x}+\mathbf{9}$ (2)

Las expresiones (1) y (2) consisten en dos maneras diferentes de escribir el área del cuadrado grande. Entonces, igualando las mismas, si (1) = (2):

$$\boxed{(\boldsymbol{x}+\mathbf{3})^{\mathbf{2}}=\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}+\mathbf{6}\boldsymbol{x}+\mathbf{9}}$$

¿Te resulta conocida una igualdad como ésta?...

Las expresiones algebraicas trabajadas en el ejemplo integran una ecuación cuadrática o de segundo grado:

Definición:

¡Para leer y recordar!

Una ecuación de segundo grado con una incógnita,

es una ecuación equivalente a una de la forma ***ax² + bx + c* = 0**

… con a, b, c $\in$ R y $a \neq 0$.

- ✓ ***a*** se denomina **coeficiente cuadrático**;
- ✓ ***b*** es el **coeficiente lineal** y
- ✓ ***c*** es el **término** independiente.
- Esta definición también es conocida como *forma polinómica* de la ecuación cuadrática.

Ejemplo: $x^2 - 100 = 21$

Para reconocer los valores de los coeficientes, igualamos a cero el miembro derecho de la igualdad:

$x^2 - 121 = 0$ … con lo cual, podemos afirmar que en esta ecuación: $\begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \\ c = -121 \end{cases}$

Ejercicio 80:

a) ¿Por qué, en la definición de ecuación de segundo grado, es necesario que *a* sea distinto de cero?

b) Identifica los coeficientes de las siguientes ecuaciones cuadráticas:

Ecuación	*a*	*b*	*c*
$3x^2 + 9 = 9$			
$x^2 + 9 = 0$			
$7x\,(x - 20) = 0$			
$2\,x^2 = -\,6x$			
$2\,(x^2 - 4) = 6x$			

Clasificación de las Ecuaciones de Segundo Grado con una incógnita

Las ecuaciones de segundo grado con una incógnita se clasifican, según los valores de sus coeficientes y término independiente, en **completas** o **incompletas.**

¡Para leer y recordar!

Definición:

- Una ecuación cuadrática es ***incompleta*** si $\boldsymbol{b = 0}$ *ó* $\boldsymbol{c = 0}$.

  Se tienen las siguientes posibilidades de ecuaciones cuadráticas incompletas:

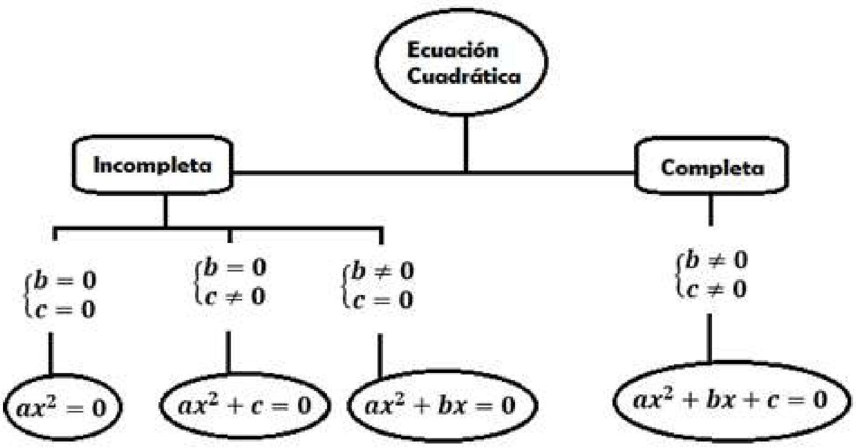
  - ✓ $a\,x^2 + b\,x = 0$ con $b \neq 0$, $c = 0$.
  - ✓ $a\,x^2 + c = 0$ *con* $b = 0$, $c \neq 0$.
  - ✓ $a\,x^2 = 0$ con $b = 0$, $c = 0$.

- Una ecuación cuadrática es ***completa*** si $\boldsymbol{b \neq 0}$ y $\boldsymbol{c \neq 0}$.

  La única expresión de una ecuación cuadrática completa es:

  - ✓ $a\,x^2 + b\,x + c = 0$.

Podemos visualizar esta clasificación en el siguiente diagrama:



Ejercicio 81:

Escribe un ejemplo para cada tipo de ecuación cuadrática, guiándote por el diagrama.

Resolución de Ecuaciones de Segundo Grado con una incógnita

Toda ecuación de segundo grado con una incógnita tiene dos **soluciones**, también llamadas **raíces**, que denotaremos x_1 y x_2.

Resolver una ecuación de este tipo implica encontrar sus soluciones x_1 y x_2.

En este apartado abordaremos cada uno de los tipos de ecuación de cuadrática y su resolución.

Resolución de Ecuaciones Incompletas

Tipo de Ecuación Cuadrática:	*Resolución:*	*Ejemplo:*
Incompleta del tipo: **$a\,x^2 = 0$**	Se despeja la incógnita y se llega a la solución: **$x_1 = x_2 = 0$**	**$3x^2 + 9 = 9$** $3x^2 = 9 - 9$ $3x^2 = 0$ … luego : $x_1 = x_2 = 0$

Tipo de Ecuación Cuadrática:	*Resolución:*	*Ejemplo 1:*	*Ejemplo 2:*
Incompleta del tipo: **$a\,x^2 + c = 0$**	Se despeja la incógnita teniendo en cuenta que $\sqrt{x^2} = \lvert x \rvert$	$x^2 + 9 = 0$ $x^2 = -9$ $\lvert x \rvert = \sqrt{-9}$ Soluciones: $\begin{cases} x_1 = 3i \\ x_2 = -3i \end{cases}$	$-\frac{3}{2}x^2 + 27 = 0$ $-\frac{3}{2}x^2 = -27$ $-3x^2 = -54$ $x^2 = 18$ $\lvert x \rvert = \sqrt{18}$ Soluciones: $\begin{cases} x_1 = \sqrt{18} \\ x_2 = -\sqrt{18} \end{cases}$

Ejercicio 82:

Resuelve las siguientes ecuaciones cuadráticas incompletas:

a) $x^2 - 16 = 0$ b) $2x^2 - 50 = 0$ c) $\frac{1}{5}x^2 - 5 = 0$ d) $2x^2 = 3x^2 + 36$

Tipo de Ecuación Cuadrática:	*Resolución:*	*Ejemplo 1:*	*Ejemplo 2:*
Incompleta del tipo: ***a* x^2 + bx = 0**	Se aplica la **Extracción de Factor Común:** *a* x^2 + bx = 0 x . (*ax* + b) = 0 Recordar que si $\boldsymbol{m\,.n=0}$ …entonces $\boldsymbol{m=0}$ ó $\boldsymbol{n=0}$	$\boldsymbol{7x^2-140x=0}$ $7x\,.(x-20)=0$ $7x=0$ ó $x-20=0$ De cada una de estas ecuaciones se obtiene una solución. Soluciones: $\begin{cases}\boldsymbol{x_1=0}\\\boldsymbol{x_2=20}\end{cases}$	$\boldsymbol{2x^2=-\frac{2}{3}x}$ $2x^2+\frac{2}{3}x=0$ $\boldsymbol{2}.x\,.\boldsymbol{x}+\boldsymbol{2}.\frac{1}{3}.\boldsymbol{x}=0$ $\boldsymbol{2x}\left(x+\frac{1}{3}\right)=0$ $2x=0$ ó $x+\frac{1}{3}=0$ Soluciones: $\begin{cases}\boldsymbol{x_1=0}\\\boldsymbol{x_2=-6}\end{cases}$

Ejercicio 83:

Resuelve las siguientes ecuaciones cuadráticas incompletas:

a) $-5x^2+x=0$ b) $\frac{4}{3}x^2-\frac{2}{3}x=0$ c) $\frac{1}{2}x^2=4x$ d) $-x^2-\frac{1}{2}x=0$

¡Para leer y recordar!

Toda ecuación de segundo grado puede expresarse como producto de factores una vez conocidas sus soluciones, de la siguiente manera:

***a* (x - x_1)(x - x_2) = 0**

Esta expresión se denomina: ***forma factorizada*** de la ecuación cuadrática.

Ejemplos:

Se muestra la forma factorizada de algunas de las ecuaciones dadas en los ejemplos anteriores:

Ecuación cuadrática	*Soluciones*	*Forma Factorizada*
$x^2+9=0$	$\begin{cases}x_1=3i\\x_2=-3i\end{cases}$	$\boldsymbol{(x-3i)(x+3i)=0}$
$-\frac{3}{2}x^2+27=0$	$\begin{cases}x_1=\sqrt{18}\\x_2=-\sqrt{18}\end{cases}$	$\boldsymbol{-\frac{3}{2}\left(x-\sqrt{18}\right)\left(x+\sqrt{18}\right)=0}$
$7x^2-140x=0$	$\begin{cases}x_1=0\\x_2=20\end{cases}$	$\boldsymbol{7x\,(x-20)=0}$
$2x^2+\frac{2}{3}x=0$	$\begin{cases}x_1=0\\x_2=-6\end{cases}$	$\boldsymbol{2x\,(x+6)=0}$

Ejercicio 84:

Expresa en su forma factorizada a las ecuaciones cuadráticas resueltas en los ejercicios 82 y 83.

Ejercicio 85:

i) Resuelve las siguientes ecuaciones cuadráticas incompletas.

ii) Escribe la forma factorizada de cada ecuación.

a) $x^2 + 11 = 0$

b) $4x^2 - 9 = 0$

c) $-2x^2 - \frac{1}{2}x = 0$

d) $8x^2 + 16x = 0$

e) $\frac{x^2-1}{6} = 4$

f) $3x^2 - 4x = 12x + x^2$

Ejercicio 86:

Resuelve los siguientes problemas planteando ecuaciones cuadráticas incompletas.

a) La diferencia entre un número positivo y la mitad de su cuadrado es 0. ¿De qué número se trata?

b) El anterior del doble del cuadrado de un número positivo es 7. ¿Qué números verifican esta igualdad?

c) El producto de un número negativo por su tercera parte es 27. Calcula dicho número.

d) Halla los números reales tales que el doble de su cuadrado más la mitad de su triple es igual a 0.

Resolución de Ecuaciones Completas

Las *soluciones* x_1 y x_2 de una ecuación de segundo grado completa se obtienen a través de la conocida ***fórmula de Bhaskara*** reemplazando los coeficientes *a* , *b* , *c* en las siguientes expresiones: $x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, $x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

Escribimos, en forma abreviada: $x_1 , x_2 = \boxed{\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}$

Ejemplo:

Resolveremos la ecuación cuadrática completa: $\mathbf{2x^2 - 6x - 8 = 0}$ cuyos coeficientes son $\begin{cases} a = 2 \\ b = -6 \\ c = -8 \end{cases}$

Recordemos que, al ser completa la ecuación cuadrática, todos sus coeficientes son distintos de cero.

Aplicamos la fórmula de Bhaskara: $x_1 , x_2 = \dfrac{-\mathrm{b}\pm\sqrt{\mathrm{b}^2-4\mathrm{ac}}}{2\mathrm{a}}$

$$x_1 , x_2 = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4\,.\;2\,.(-8)}}{2\;.\;2}$$

$$x_1\,,x_2 \;=\; \frac{6 \pm \sqrt{36\;+\;64}}{4} = \frac{6 \pm \sqrt{100}}{4}$$

$$x_1\,,x_2 \;= \frac{6 \pm 10}{4} \quad \begin{cases} x_1 = \frac{6+10}{4} = \frac{16}{4} = 4 \\ x_2 = \frac{6-10}{4} = \frac{-6}{4} = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

Luego las soluciones son: $\begin{cases} \boldsymbol{x_1 = 4} \\ \boldsymbol{x_2 = -\frac{3}{2}} \end{cases}$

Ejemplo:

Obtendremos las soluciones de la ecuación cuadrática $\boldsymbol{-x^2 - x = 5 - \frac{x+1}{2}}$

Primero, realizamos los pasos algebraicos necesarios para identificar sus coeficientes.

$$\boldsymbol{-x^2 - x = 5 - \frac{x+1}{2}}$$

$$-x^2 - x = \frac{10-(x+1)}{2}$$

$$2(-x^2 - x) = 10 - (x+1)$$

$$-2x^2 - 2x = 10 - x - 1$$

$$-2x^2 - 2x + x + 1 - 10 = 0$$

$$-2x^2 - x - 9 = 0$$

$$(-1)(2x^2 + x + 9) = 0$$

$$\boxed{2x^2 + x + 9 = 0}$$

Donde podemos reconocer a a = ……, b = ……, c = ……

Aplicando la fórmula de Bhaskara, las soluciones son: $x_1 = -\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{71}}{4}i$ y $x_2 = -\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{71}}{4}i$

Ejercicio 87:

i) Resuelve las siguientes ecuaciones cuadráticas completas.

ii) Escribe su forma factorizada.

a) $2x^2 + 4x + 2 = 0$ b) $2x^2 + x - 3 = 0$ c) $x^2 + x - 6 = 0$

d) $x + x^2 + 1 = 0$ e) $(x+2)^2 = x + 2$ f) $\sqrt{x^2 + 3x + 7} = 5$

El siguiente ejemplo muestra cómo resolver problemas que implican plantear ecuaciones de segundo grado.

Ejemplo:

La suma del área de un cuadrado más su perímetro es 60. ¿Cuánto mide el lado del cuadrado?

- Si llamamos x a la longitud del lado del cuadrado, su área es x^2 y su perímetro es $4x$.
- La suma del área del cuadrado más su perímetro es 60, es decir: $x^2 + 4x = 60$

- Resolvemos la ecuación $x^2 + 4x - 60 = 0$.
- Obtenemos que las raíces son $x_{1,2} = \dfrac{-4 \pm \sqrt{256}}{2} = \dfrac{-4 \pm 16}{2}$

  Así, las soluciones de la ecuación son $x_1 = 6$ y $x_2 = -10$

Ambas soluciones verifican la ecuación, pero únicamente $x_1 = 6$ es solución del problema pues la longitud no puede ser negativa.

Ejercicio 88:

Resuelve los siguientes problemas planteando ecuaciones cuadráticas completas.

a) Sabiendo que x =2 es una solución de $x^2 - 3x + k = 0$, determina el valor de k.

b) Si x = 3 es una de las soluciones de $x^2 - kx + 6 = 0$, ¿Cuánto vale k?

c) La suma de un número positivo y su cuadrado es 42. Halla dicho número.

d) La suma de los cuadrados de dos números consecutivos es 5. Encuentra dichos números.

e) Determina las dimensiones de un rectángulo, sabiendo que su área es 405 cm^2 y su perímetro 84 cm.

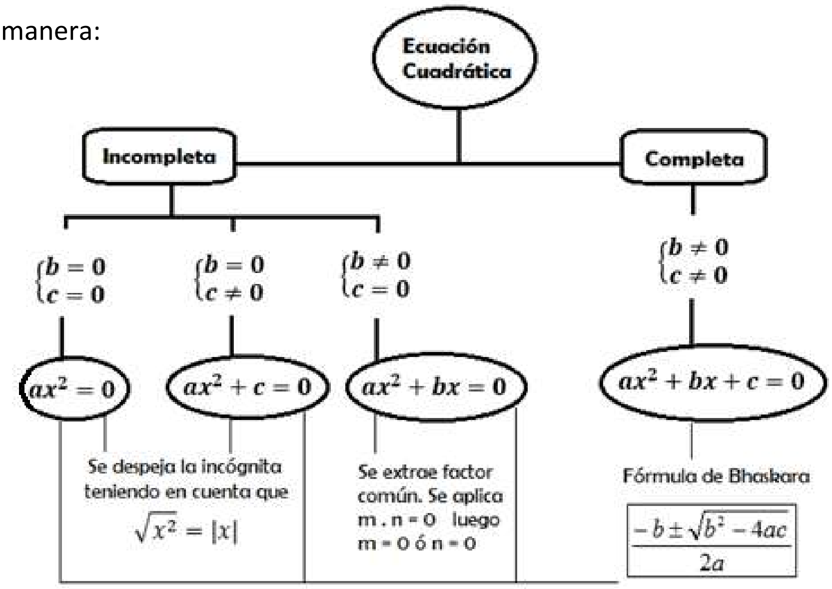
f) Encuentra dos números consecutivos cuyo producto es 380.

g) Un jardín rectangular de 50 m de largo por 34 m de ancho está rodeado por un camino de ancho uniforme. Halla el ancho de dicho camino si se sabe que su área es 540 m^2.

La fórmula de Bhaskara, presentada en este módulo como el método de resolución de las ecuaciones cuadráticas completas, puede aplicarse también al resolver ecuaciones de segundo grado incompletas.

Es un método general.

Así, el diagrama que clasifica las ecuaciones de segundo grado se completa con las maneras de resolverlas, de la siguiente manera:



Ejercicio 89:

i) Resuelve las siguientes ecuaciones de segundo grado.

ii) Escribe su forma factorizada.

a) $-x^2 + 4x - 7 = 0$ b) $(x + 3)^2 = 9$ c) $(x - 5)(x + 1) + 5 = 0$

d) $(x - 2)^2 = -4x + 2x^2$ e) $\frac{x^2-3x}{2} - 5 = \frac{x-20}{4}$ f) $(3x + 2)(3x - 2) = 77$

g) $-3(x + 1)^2 = -12$ h) $2x(x - 1) - 3 = x - 3x - 2$ i) $x.(4 - x) = 5$

Ejercicio 90:

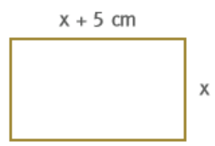
Resuelve las siguientes ecuaciones, sustituyendo convenientemente la expresión $u = x^2$.

a) $x^4 + 7x^2 + 10 = 0$ b) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$ c) $\sqrt{2x^2 + 1} = x^2 - 1$

Ejercicio 91:

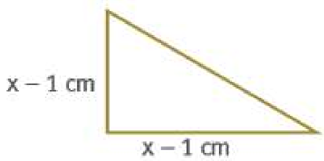
Calcula el perímetro de las figuras, sabiendo que el área de cada una es igual a 14 cm^2.

a)

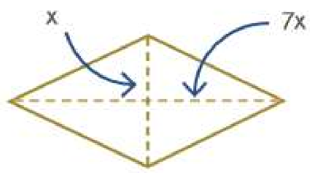


b)

c)



d)



Ejercicio 92:

Resuelve los siguientes problemas que implican el planteo de ecuaciones cuadráticas.

a) Dentro de 11 años, la edad de Marcela será la mitad del cuadrado de la edad que tenía hace 13 años. Calcula la edad actual de Marcela.

b) En cada esquina de una plancha de cartón cuadrada, se recorta un cuadrado de 5 cm de lado. Doblando hacia arriba las solapas generadas, se forma una caja cuyo volumen es de 1280 cm^3. Halla el lado de la plancha de cartón antes de ser recortada.

c) Los lados de un triángulo rectángulo tienen por medida, en cm, tres números pares consecutivos. Halla los valores de dichos lados.

d) Un poste de luz de 7 metros se rompe a una cierta altura del suelo y al doblarse, la punta libre del trozo roto cae a 3 m de la base del poste. ¿A qué altura se rompió?

El Discriminante

Recordemos la fórmula de Bhaskara: x_1 , x_2 = $\boxed{\dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$

La expresión $b^2 - 4ac$ del radicando, se llama ***discriminante*** y se simboliza con la letra griega Δ.

El discriminante permite clasificar las soluciones de una ecuación de segundo grado:

- Si $\Delta > 0$, la ecuación tiene dos **raíces reales y distintas.**
- Cuando $\Delta < 0$, la ecuación no tiene raíces reales; tiene dos **raíces complejas conjugadas**.
- Si $\Delta = 0$, la ecuación tiene una única solución real; diremos que es una ***raíz doble***.

Ejercicio 93:

Sin resolverlas, indica el tipo de solución de las siguientes ecuaciones de segundo grado.

a) $\boldsymbol{x^2 - 2x + 1 = 0}$ b) $\boldsymbol{6 + x^2 = 0}$ c) $\boldsymbol{-x^2 + 2 - x = 0}$

d) $\boldsymbol{x^2 + 2x = -3}$ e) $\boldsymbol{(2x - 1)^2 = 0}$ f) $\boldsymbol{9 - x^2 = 0}$

A continuación, se muestran ejemplos donde se verifican los tipos de solución en función del discriminante:

$\boldsymbol{x^2 - 5x + 6 = 0}$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = (-5)^2 - 4.1.6$

$\Delta = 1$

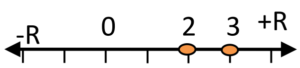
$\boldsymbol{\Delta > 0}$

Cuando $\Delta > 0$, la ecuación tiene dos **raíces reales y distintas.**

$$x_1, x_2 = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2}$$

$$x_1, x_2 = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{2}$$

$x_1 = 3$, $x_2 = 2$



$\boldsymbol{x^2 - 2x + 5 = 0}$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = (-2)^2 - 4.1.5$

$\Delta = -16$

$\boldsymbol{\Delta < 0}$

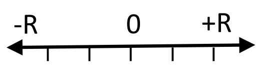
Cuando $\Delta < 0$, la ecuación no tiene raíces reales; tiene dos **raíces complejas conjugadas**.

$$x_1, x_2 = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 20}}{2}$$

$$x_1, x_2 = \frac{2 \pm \sqrt{-16}}{2}$$

$$x_1, x_2 = \frac{2 \pm 4i}{2}$$

$x_1 = 1 + 2i$, $x_2 = 1 - 2i$



$\boldsymbol{9x^2 + 6x + 1 = 0}$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = (6)^2 - 4.9.1$

$\boldsymbol{\Delta = 0}$

Cuando $\Delta = 0$, la ecuación tiene una única solución real; diremos que es una ***raíz doble***.

$$_{1,}x_2 = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 36}}{2}$$

$$x_1, x_2 = \frac{-6 \pm \sqrt{0}}{2}$$

$x_1 = -3$, $x_2 = -3$

El discriminante también se aplica en la resolución de situaciones problemáticas:

Ejemplo:

Dada la ecuación $x^2 - 12\,x + c = 0$, queremos hallar los valores de c para que las dos raíces de la ecuación sean reales y distintas. Entonces: $\Delta = b^2 - 4ac$

$$\Delta = (-12)^2 - 4c \;\; \Delta = 144 - 4c.$$

El valor del discriminante en este caso es $\Delta = 144 - 4c$

Para que las dos raíces sean reales y distintas, debe ocurrir que el discriminante sea mayor que cero.

Luego $144 - 4c > 0$, es decir $c > 36$.

De este modo, $x^2 - 12\,x + 39$ es un ejemplo del tipo de ecuación que se pide.

Ejercicio 94:

Resuelve los siguientes problemas aplicando el discriminante:

a) Dada la ecuación $x^2 - (m + 2)\,x + 10 = 0$, halla los valores de m para que las dos soluciones de dicha ecuación sean iguales.

b) ¿Qué valores debe tomar w para que la ecuación $2x^2 - x - w = 0$ no tenga raíces reales?

c) Halla los posibles valores de k para que la ecuación $k\,x^2 - x - 1 = 0$ tenga dos soluciones reales y distintas.

Completar Cuadrados

El procedimiento de Completar Cuadrados proporciona otra manera de resolver y de expresar ecuaciones de segundo grado. Recordemos el ejemplo dado en la primera página de este módulo:

$$\boldsymbol{(x+3)^2 = x^2 + 6x + 9}$$

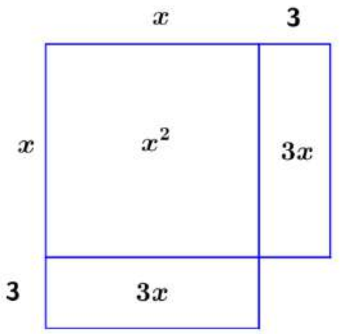
Recordemos asimismo, que ambos miembros de esta igualdad muestran dos maneras diferentes de escribir el área de un cuadrado de lado igual a: $\boldsymbol{x+3}$.

Supongamos ahora, que sólo tenemos los siguientes términos que integran esta igualdad: $\boldsymbol{x^2 + 6x}$

Geométricamente, representamos estos términos como:

- un cuadrado de área: $\boldsymbol{x^2}$
- y dos rectángulos, cada uno de área igual a $\boldsymbol{3x}$:

$$\boldsymbol{x^2 + 2.(3x)} =$$
$$\boldsymbol{x^2 + 6x}$$

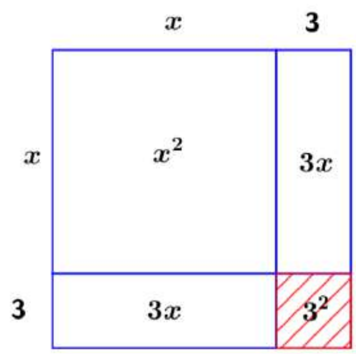


¿Qué "falta" sumar a esta expresión para ***completar el cuadrado*** *de lado igual a* $\boldsymbol{x+3}$*?*

Respuesta:

De lo trabajado en la situación inicial de este módulo, sabemos que sumando 9 logramos "completar el cuadrado", porque

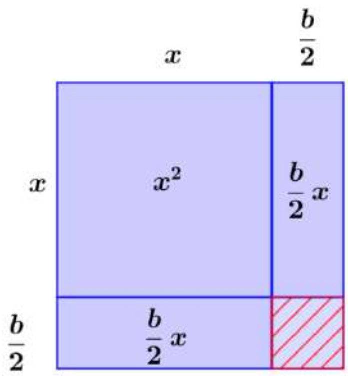
$$\boldsymbol{x^2 + 6x + 9 = (x+3)^2}$$



En otras palabras: se suma el valor del área del cuadrado rayado en la figura, que en este caso es $\boldsymbol{3^2 = 9}$.

Observemos asimismo que $\boldsymbol{9 = 3^2 = \left(\frac{6}{2}\right)^2}$

En general: Cómo Completar Cuadrados [1]



Para hacer que $\boldsymbol{x^2} + b\boldsymbol{x}$ "*complete el cuadrado*", se suma $\left(\frac{b}{2}\right)^2$:

es decir, la mitad del coeficiente que acompaña al término $\boldsymbol{x}$.

$$\boldsymbol{x^2 + bx + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2}$$

Notemos que, en esta expresión cuadrática, $a = 1$.

Cómo resolver ecuaciones cuadráticas Completando Cuadrados

Ejemplo:

$\boldsymbol{x^2 - 8x + 13 = 0}$	*Ecuación dada*
$\boldsymbol{x^2 - 8x = -13}$	*Resta 13 miembro a miembro (m.a.m)*
$\boldsymbol{x^2 - 8x + 16 = -13 + 16}$	*Completa el cuadrado: suma m.a.m* $\left(\frac{-8}{2}\right)^2 = \boldsymbol{16}$
$\boldsymbol{(x-4)^2 = 3}$	
$\boldsymbol{\lvert x-4 \rvert = \sqrt{3}}$	*Aplica raíz cuadrada m.a.m*
$\boldsymbol{x_1 = 4 + \sqrt{3}}$; $\boldsymbol{x_2 = 4 - \sqrt{3}}$	*Soluciones*

Ejemplo:

Se trata de un caso donde $\boldsymbol{a \neq 1}$

$\boldsymbol{3x^2 + 12x - 6 = 0}$	*Ecuación dada*
$\boldsymbol{3(x^2 + 4x - 2) = 0}$	***Extrae factor común: a*** *(en este caso, a = 3)*
$\boldsymbol{x^2 + 4x - 2 = 0}$	*Divide m.a.m por a*
$\boldsymbol{x^2 + 4x = 2}$	*Resta 2 m.a.m*

[1] Extraído de: Stewart, J. y otros. (2012) Precálculo, Matemáticas para el cálculo. Cengage Learning, p.48.

$$x^2 + 4x + 4 = 2 + 4 \qquad \textit{Completa el cuadrado: suma m.a.m } \left(\frac{-4}{2}\right)^2 = 4$$

$$(x+2)^2 = 6$$

$$|x+2| = \sqrt{6} \qquad \textit{Aplica raíz cuadrada m.a.m}$$

$$x_1 = -2 + \sqrt{6} \ \ ; \ \ x_2 = -2 - \sqrt{6} \qquad \textit{Soluciones}$$

Ejercicio 95:

Resuelve las siguientes ecuaciones cuadráticas completando cuadrados.

a) $x^2 - 6x - 16 = 0$ b) $x^2 + 2x = 3$ c) $x^2 - 4x + 2 = 0$ d) $x^2 + 3x = \frac{7}{4}$

e) $3x^2 - 6x - 1 = 0$ f) $-x^2 - 3x - 1 = 0$ g) $4x^2 - x = 0$ h) $x^2 = \frac{3}{4}x - \frac{1}{8}$

¡Para leer y recordar!

Toda ecuación de segundo grado puede expresarse de la siguiente manera, siendo *h, k* números reales:

$$a\,(x - h)^2 + k = 0$$

Esta expresión se denomina: ***forma canónica*** de la ecuación cuadrática.

Ejemplos:

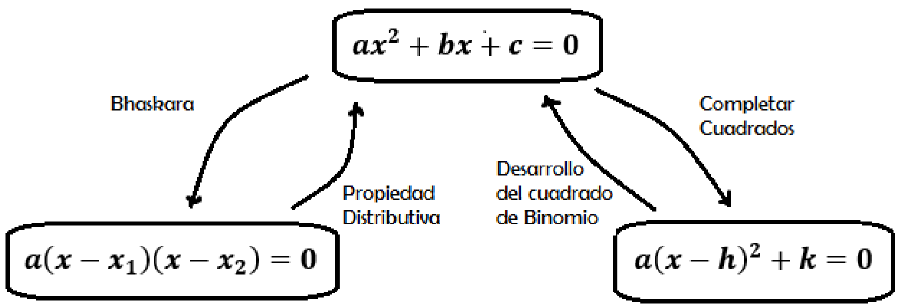
Se muestran a continuación las formas canónicas de las ecuaciones resueltas completando cuadrados en los ejemplos.

Ecuación dada	***Forma canónica*** *(luego de completar cuadrados)*
$x^2 - 8x + 13 = 0$	$(x-4)^2 - 3 = 0$
$3x^2 - 12x + 6 = 0$	$(x+2)^2 - 6 = 0$

Ejercicio 96:

Expresa las ecuaciones cuadráticas del ejercicio 95 en su forma canónica.

Para cerrar este módulo, en el siguiente diagrama se muestran las tres formas de expresar una ecuación cuadrática: forma polinómica, forma factorizada y forma canónica; junto con los métodos para obtenerlas.



FUNCIÓN CUADRÁTICA

Las funciones cuadráticas permiten modelizar situaciones referidas a distintas áreas del conocimiento, desde tiempos remotos. En la Antigüedad, los griegos las trabajaban en un método geométrico que involucraba la representación de cuadrados y rectángulos.

En el siglo XVII, luego de que Johannes Kepler (1571 – 1630) expusiera las leyes que rigen los movimientos de los planetas, los astrónomos descubrieron que las órbitas de planetas y cometas respondían a modelos cuadráticos. Actualmente, las funciones cuadráticas modelizan situaciones en el campo de la Física, la Biología, la Economía, la Astronomía, la Comunicación y la Geometría, entre otros. [2]

¡Para leer y recordar!

Definición:

Llamamos ***función cuadrática*** o de segundo grado a toda función de la forma

$$y = f(x) = ax^2 + bx + c$$

… con $a, b, c \in R$ y $a \neq 0$.

- El **dominio** de esta función es el conjunto de los números reales: $\boldsymbol{R}$
- La expresión aquí definida se denomina ***forma polinómica*** de la función cuadrática.

  En ella, cada término tiene un nombre:

  - ax^2 se denomina término cuadrático
  - bx es el término lineal
  - c es el término independiente.

Representación Gráfica y Elementos de una Función Cuadrática

La **representación gráfica** de una función cuadrática es una curva llamada **parábola**.

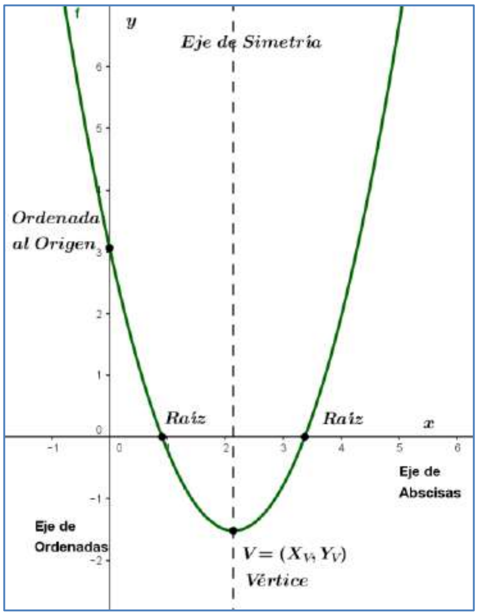
En ella, identificamos los siguientes elementos de toda función cuadrática:

- Las **raíces** son los puntos donde la función intersecta al eje de abscisas (*eje x*).
- La **ordenada al origen** es el punto donde la función intersecta al eje de ordenadas (*eje y*).

  Coincide con el término independiente en la forma polinómica de la ecuación cuadrática: o. o = (0, c)
- El **vértice** es el punto donde la función alcanza un extremo: puede ser un máximo o un mínimo.
- El **eje de simetría** es una recta que pasa por el vértice y es paralela al eje de ordenadas.

[2] Camuyrano, M. y otros (2000). Matemática I. Modelos matemáticos para interpretar la realidad.

A continuación, presentamos la parábola: es decir, la curva que representa una función cuadrática.



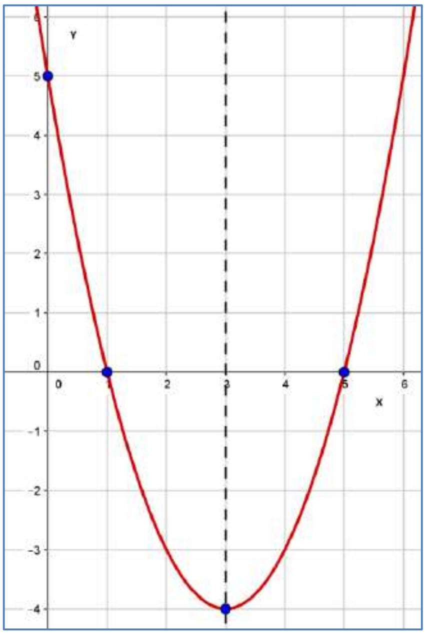
Más información en la Representación Gráfica de la Función Cuadrática…

Es posible, además de los elementos ya identificados, “leer” más información en la parábola que representa gráficamente a una función cuadrática. Lo mostraremos a través de los ejemplos siguientes.

Ejemplo:

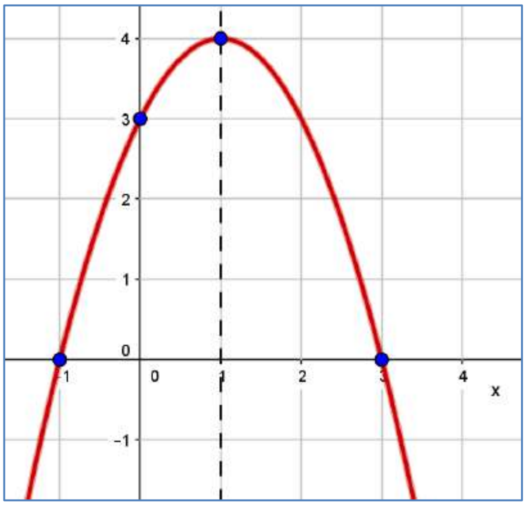
Se tiene la siguiente gráfica de una función cuadrática *f*, donde es posible identificar:

- Conjunto Dominio de *f* (Dom *f*): R
- Conjunto Imagen de f (Im f) : $[-4\ ;+\infty)$
- Ordenada al origen (o.o) : (0 ; 5)
- Raíces: (1 ; 0) y (5 ; 0)
- Conjunto de Positividad C$^+$: $(-\infty\ ; 1)U(5\ ; +\infty)$
- Conjunto de Negatividad C : (1 ; 5)
- Eje de Simetría: $x = 3$
- Vértice V: (3 ; - 4) en este caso es un mínimo
- Intervalo de Decrecimiento ID: (−∞;3)
- Intervalo de Crecimiento IC: (3 ;+∞)



Ejemplo:

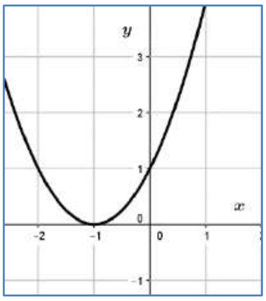
En esta gráfica de otra función cuadrática g, es posible identificar:

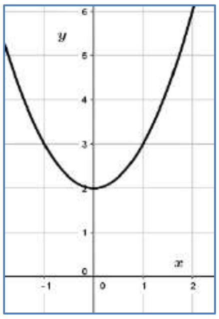


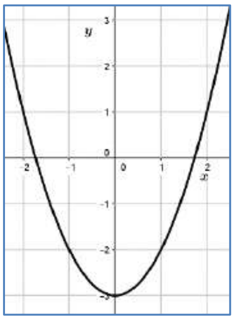
- Conjunto Dominio de f (Dom f): R
- Conjunto Imagen de f (Im f) : $(-\infty\ ;\ 4]$
- Ordenada al origen (o.o) : (0 ; 3)
- Raíces: (-1 ; 0) y (3 ; 0)
- Conjunto de Positividad C$^+$: $(-1\ ;\ 3)$
- Conjunto de Negatividad C$^-$: $(-\infty\ ;\ -1) U (3\ ; +\infty)$
- Eje de Simetría: $x = 1$
- Vértice V: (1 ; 4)   en este caso es un máximo
- Intervalo de Decrecimiento ID: $(1\ ;+\infty)$
- Intervalo de Crecimiento IC: $(-\infty\ ;1)$

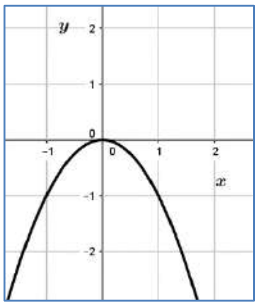
<u>Ejercicio 97</u>:

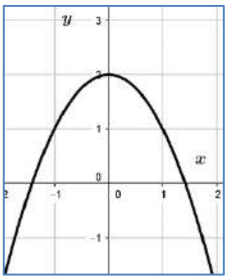
A partir de las gráficas de las siguientes funciones cuadráticas, identifica: Dominio, Imagen, o.o, raíces, conjunto de positividad, conjunto de negatividad, eje de simetría, vértice, IC, ID.

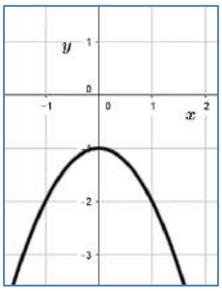
a) 

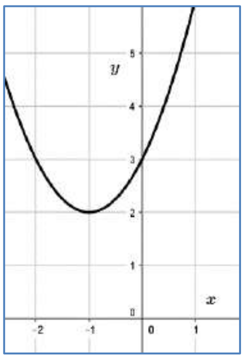
b) 

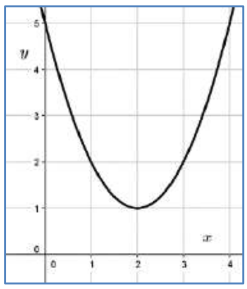
c) 

d) 

e) 

f) 

g) 

h) 

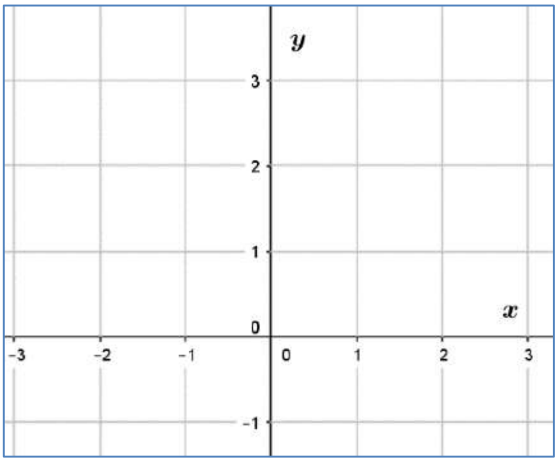
La Función Cuadrática Elemental: $y = x^2$

La función $y = f(x) = x^2$ es llamada **Función Cuadrática Elemental**. Vamos a analizarla:

- ✓ Sabemos que su dominio es Dom f : R.
- ✓ Identifica sus coeficientes: $a =$ ……, $b =$……. , $c =$ ………
- ✓ Para graficarla, completa la siguiente tabla, marca los puntos de la misma en los ejes coordenados y traza en el sistema de coordenadas proporcionado, la parábola que los contiene:

x	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	2
$f(x)$							

- ✓ Como el cuadrado de todo número real es *no negativo*, entonces Im f: …………….
- ✓ o.o = raíz = V = ……………
- ✓ Eje de simetría: ………….
- ✓ Conjunto de Positividad C^+: ………….
- ✓ Conjunto de Negatividad C^-: ………….
- ✓ Intervalo de Decrecimiento ID: ………..
- ✓ Intervalo de Crecimiento IC: ………..



Observa en particular, los puntos (-1 ; 0) y (1 ; 0). Ambos pertenecen a la función cuadrática elemental, y tienen la misma imagen. Gráficamente, en la parábola se encuentran a la misma distancia del eje de simetría. En general, definimos:

> Dos puntos que pertenecen a una función cuadrática f(x) y que equidistan del eje de simetría de f(x), tienen la misma imagen y se denominan **puntos simétricos**.

Ejercicio 98:

Considerando la función elemental $f(x) = x^2$:

i) Calcula: a) $f(-4)$ b) $f\left(\frac{1}{3}\right)$ c) $f\left(\sqrt{7}\right)$

ii) Indica, si es posible, los valores de x para los cuales:

a) f(x) = 100 b) f(x) = 5 c) f(x) = - 4 d) f(x) = f(5)

iii) Identifica dos pares de puntos simétricos en f(x).

Ejercicio 99:

Para cada una de las siguientes funciones:

$f(x) = x^2 - 1$ $\quad$ $g(x) = -2x^2 + 4x$ $\quad$ $h(x) = x^2 - 2x + 1$

$m(x) = -x^2 + 2x - 3$ $\quad$ $t(x) = x^2 + x - 6$ $\quad$ $s(x) = -\frac{1}{4}x^2$

a) Indica los valores de los coeficientes *a, b* y *c.*

b) Confecciona una tabla de valores con al menos cinco puntos, y al menos un par de puntos simétricos.

c) Grafica las parábolas que las representan.

Ejercicio 100:

a) ¿Cuál es el único punto de una parábola que es simétrico a sí mismo con respecto al eje de simetría?

b) Si el eje de simetría de una parábola fuera *y* = 3, ¿podríamos decir que dicha curva representa una función cuadrática? Justifica tu respuesta.

c) Una parábola pasa por los puntos simétricos (-1, 3) y (-5, 3). Escribe la ecuación de su eje de simetría.

Variación del coeficiente "*a*" en la Función Cuadrática

Vamos a estudiar las distintas curvas que se obtienen cuando varía el coeficiente cuadrático "*a*".

Observa los respectivos gráficos de las funciones f(x), t(x), s(x), p(x) y k(x) y completa los espacios en blanco:

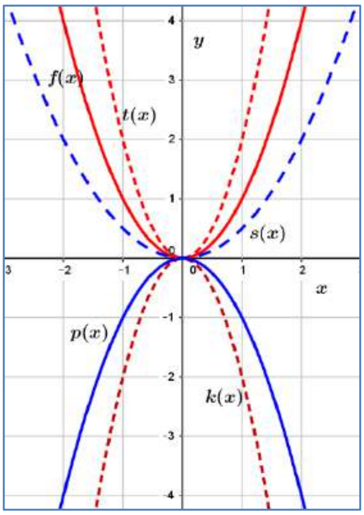
$f(x) = x^2$ $\quad$ $a =$ ……………

$t(x) = 2x^2$ $\quad$ $a =$ ………….

$s(x) =$ ….. x^2 $\quad$ $a = \frac{1}{2}$

$p(x) = -x^2$ $\quad$ $a =$ ………….

$k(x) = -2x^2$ $\quad$ $a = -2$



Escribe tus conclusiones en el siguiente cuadro:

¡Para leer y recordar!

✓ El ***signo*** de ***a*** indica hacia dónde se dirigen las ramas de las parábolas:

- Si a es positivo, las ramas van hacia ………… y el vértice es un ***mínimo***.
- Si a es negativo, las ramas van hacia ***abajo*** y el vértice es un …………… .

✓ El ***valor absoluto*** de ***a*** modifica la abertura de las parábolas:

- Cuanto ***menor*** es $|a|$, la parábola es más abierta
- Cuanto ***mayor*** es $|a|$, la parábola es más ………….

<u>Ejercicio 1</u>01:

Considera las funciones $f(x) = 3x^2$ y $g(x) = -\frac{1}{5}x^2$, y para cada una de ellas:

a) Indica los valores de los coeficientes *a, b* y *c.*

b) Indica, sin graficarlas, hacia dónde se dirigen las ramas, los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y si el vértice es un máximo o un mínimo.

<u>Ejercicio 1</u>02:

Dadas las parábolas: I) $y = 2x^2$ II) $y = 2x^2 - 3$ III) $y = -1/2\, x^2 - x + 1$ IV) $y = 5(x + 2)^2$

a) ¿Cuál es la única parábola cuyas ramas se abren hacia abajo?

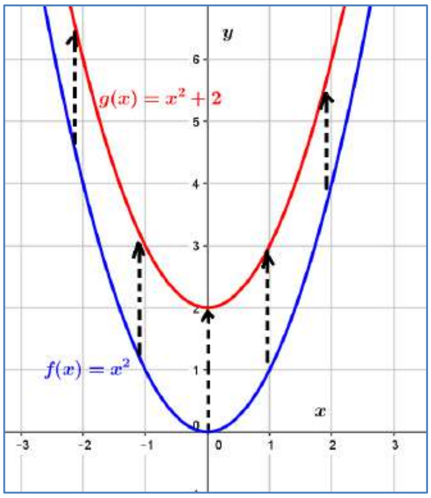
b) ¿Cuáles tienen igual abertura?

c) ¿Cuál es la más cerrada?

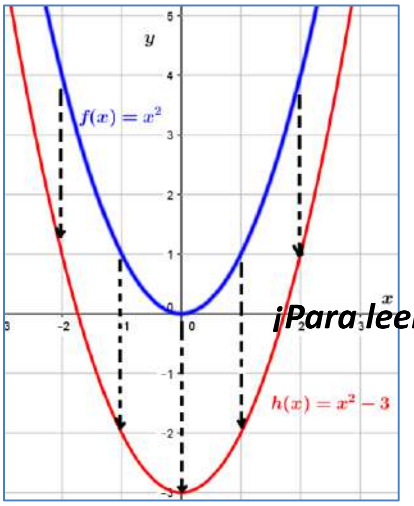
Desplazamiento Vertical de la Función Cuadrática

En este apartado, estudiaremos cómo se modifican la representación gráfica, la expresión algebraica y las propiedades de la función elemental $f(x) = x^2$ al desplazar la misma en forma vertical.

Si trasladamos la gráfica de $f(x)$ dos unidades hacia arriba, obtendremos la gráfica de la función $g(x) = x^2 + 2$.



Si ahora trasladamos la gráfica de $f(x)$ tres unidades hacia abajo, obtendremos la gráfica de la función $h(x) = x^2 - 3$.



¡Para leer y recordar!

Ejercicio 103:

Completa la siguiente tabla teniendo en cuenta las funciones mostradas anteriormente:

	y = x^2	***y = x^2 + 2***	***y = x^2 – 3***
Ordenada al Origen			
Vértice V : (Xv ; Yv)			
Conjunto Imagen : Im f			
Eje de Simetría			
Intervalo de Crecimiento			
Intervalo de Decrecimiento			
Raíces			
Conjunto de Positividad			
Conjunto de Negatividad			

¡Para leer y recordar!

El desplazamiento vertical de una función cuadrática:

- ✓ Deja invariantes el eje de simetría, la abscisa del vértice (Xv) y los intervalos de crecimiento y decrecimiento.
- ✓ Modifica las raíces y ordenada al origen, los conjuntos de positividad y negatividad, la ordenada del vértice (Yv) y el conjunto Imagen.

Ejercicio 104:

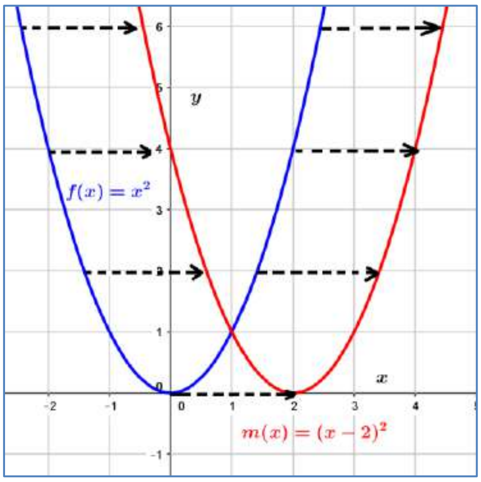
Dados los siguientes desplazamientos verticales de la función cuadrática elemental, realiza sus gráficas y en ellas, identifica: Dominio, Imagen, o.o, raíces, C^+, C^-, Eje de Simetría, Vértice, IC, ID.

a) $g(x) = x^2 + 1$ b) $h(x) = x^2 - 4$ c) $f(x) = x^2$ se desplaza dos unidades hacia abajo.

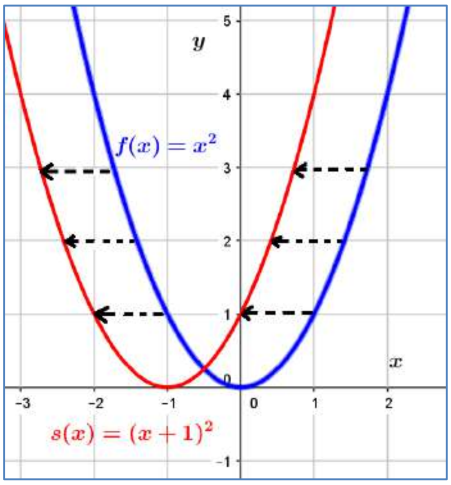
Desplazamiento Horizontal de la Función Cuadrática

¿Qué ocurrirá al desplazar la función elemental $f(x) = x^2$ en forma horizontal?

Si trasladamos la gráfica de $f(x)$ dos unidades hacia la derecha, obtendremos la gráfica de la función $m(x) = (x-2)^2$.



Si trasladamos la gráfica de $f(x)$ una unidad hacia la izquierda, obtendremos la gráfica de la función $s(x) = (x+1)^2$.



Ejercicio 105:

Completa la siguiente tabla teniendo en cuenta las funciones mostradas anteriormente:

	y = x^2	***y = $(x - 2)^2$***	***y = $(x + 1)^2$***
Ordenada al Origen			
Vértice V : (Xv, Yv)			
Conjunto Imagen : Im f			
Eje de Simetría			
Intervalo de Crecimiento			
Intervalo de Decrecimiento			
Raíces			
Conjunto de Positividad			
Conjunto de Negatividad			

El desplazamiento horizontal de una función cuadrática:

- ✓ Deja invariantes la ordenada del vértice (Yv) y el conjunto Imagen.
- ✓ Modifica las raíces y ordenada al origen, los conjuntos de positividad y negatividad, la abscisa del vértice (Xv), el eje de simetría y los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

Ejercicio 106:

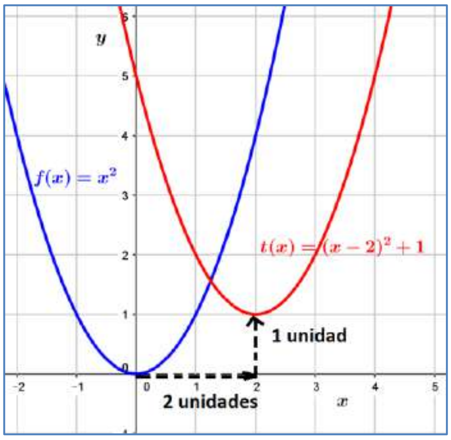
Dados los siguientes desplazamientos horizontales de la función cuadrática elemental, realiza sus gráficas y en ellas, identifica: Dominio, Imagen, o.o., raíces, C $^{+}$, C $^{-}$, Eje de Simetría, Vértice, IC, ID.

a) $g(x) = (x-2)^2$ b) $h(x) = (x+3)^2$ c) $f(x) = x^2$ se desplaza una unidad a la derecha.

Desplazamientos Combinados de la Función Cuadrática

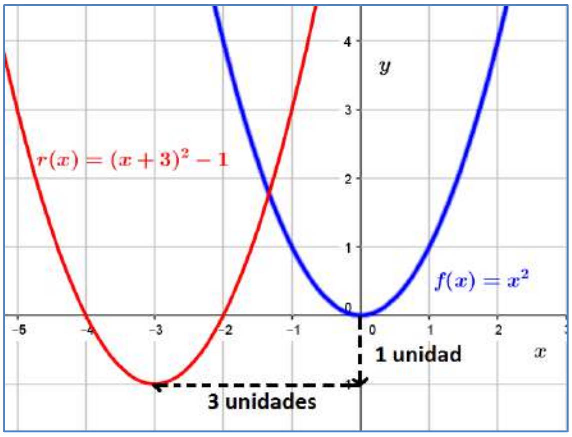
Si $f(x) = x^2$ se desplaza una unidad a la derecha y dos unidades hacia arriba, se obtiene la gráfica de

$$t(x) = (x-2)^2 + 1$$



Si $f(x) = x^2$ se desplaza tres unidades a la izquierda y una unidad hacia abajo, se obtiene la gráfica de

$$g(x) = (x+3)^2 - 1$$



Ejercicio 107:

Completa la siguiente tabla teniendo en cuenta las funciones mostradas anteriormente:

	$y = x^2$	$y = (x-2)^2 + 1$	$y = (x+3)^2 - 1$
Eje de Simetría			
Vértice V : (Xv ; Yv)			
Conjunto Imagen : Im f			

Ejercicio 108:

Escribe la expresión algebraica correspondiente a los siguientes desplazamientos de $f(x) = x^2$.

a) 3 unidades hacia arriba y 4 unidades hacia la izquierda.

b) Media unidad hacia abajo y una unidad hacia la derecha.

c) Dos unidades hacia la derecha y 1,5 unidades hacia abajo.

Ejercicio 109:

Indica cuál fue el desplazamiento aplicado a la función cuadrática elemental para obtener cada una de las siguientes expresiones algebraicas:

a) $y = (x-5)^2$ b) $y = (x+4)^2 - \frac{7}{2}$ c) $y = 2x^2 + 2{,}5$

Ejercicio 110:

Grafica las funciones del ejercicio anterior, señalando en cada caso el vértice y el eje de simetría.

Ejercicio 111:

Escribe la expresión de la función que resulta de trasladar el vértice de $y = x^2$ al punto (2 ; 1).

Forma Canónica de la Función Cuadrática

¡Para leer y recordar!

La expresión algebraica obtenida luego de aplicar desplazamientos a la función cuadrática elemental se denomina ***forma canónica***:

$$\boldsymbol{y = f(x) = a(x - h)^2 + k}$$

✓ La forma canónica proporciona la siguiente información sobre la función cuadrática:

- el valor y signo de la abertura ***a***
- las coordenadas del vértice **V = (h ; k)**
- la ecuación del eje de simetría **x = h**.

Ejercicio 112:

Sin realizar cálculos, determina el valor de *a,* el vértice y la ecuación del eje de simetría de las siguientes funciones cuadráticas dadas en su forma canónica:

a) $y = (x - 2)^2 - 4$ b) $y = (x + 3)^2 + 2$ c) $y = 3x^2 + 5$

d) $y = 2(x - 2)^2$ e) $y = \frac{1}{2}(x + 1)^2 - 3$

Ejercicio 113:
Escribe la forma canónica de las parábolas representadas en el ejercicio 97 de este módulo, suponiendo que *a* = 1 o *a* = -1, según corresponda.

Ejercicio 114:
Escribe la forma canónica de las funciones cuadráticas que tienen la misma abertura que f(x) = x^2 y cuyo vértice es:

a) (2; 3) b) (- 5; 4) c) (1; - 5) d) (- 4; - 6)

Ejercicio 115:
Halla en cada caso, el valor del coeficiente *a* de la función cuadrática :

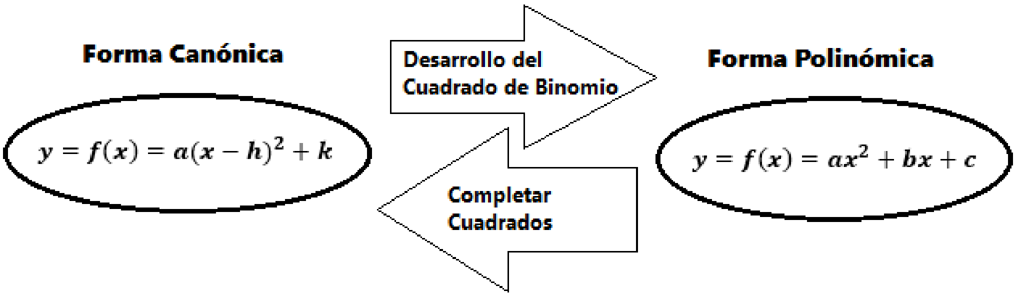
a) Su gráfico pasa por el punto (1, - 1) y su vértice es V = (- 2, 3).

b) Su vértice es $V = \left(-\frac{1}{2}, -2\right)$ y una de sus raíces es x = 3.

c) Su gráfico intersecta al eje y en (0, 3) y su vértice es V = (1, 2).

d) El vértice es V = (- 2, 1) y la ordenada al origen es 4.

- ✓ Para expresar una función cuadrática en su forma polinómica, a partir de la forma canónica: **se desarrolla el cuadrado aplicando propiedades algebraicas.**
- ✓ Para expresar una función cuadrática en su forma canónica, a partir de la forma polinómica: **se aplica el método de completar cuadrados.**



Ejercicio 116:
Expresa en su forma polinómica las funciones cuadráticas que han sido representadas en el ejercicio 97 y retomadas en el ejercicio 113 de este módulo.

Ejercicio 117:
Escribe en su forma polinómica las funciones cuadráticas del ejercicio 112.

Para hallar las coordenadas del vértice de una función cuadrática a partir de su forma polinómica:

- ✓ La abscisa del vértice se obtiene aplicando la fórmula: $\boldsymbol{x_V = -\frac{b}{2a}}$
- ✓ La ordenada del vértice se obtiene reemplazando la abscisa Xv en la función: $\boldsymbol{y_V = f(x_v)}$

Ejercicio 118:
Halla el vértice y la ecuación del eje de simetría de cada una de estas parábolas.

a) $y = 2x^2 - 6x - 1$ b) $y = -3x^2 + 2x + 9$ c) $y = (0,5)x^2 - 3x + 1$ d) $y = 2x^2 + 5$

Ejercicio 119:
Expresa las siguientes funciones cuadráticas en su forma canónica:

a) $y = x^2 + x$ b) $y = x^2 + 2x - 1$ c) $y = 2x - x^2$

d) $y = x^2 - 6x + 1$ e) $y = -x^2 + 4x + 3$ f) $y = 3x^2 - 12x + 13$

Aplicación de la Función Cuadrática en la Resolución de Problemas de máximos y mínimos

A continuación, se mostrarán algunos ejemplos de situaciones problemáticas que se modelizan planteando una función cuadrática y hallando su vértice, que puede ser un máximo o un mínimo.

Ejemplo:

Entre todos los números enteros cuya resta es 100, determinar el par cuyo producto es el menor posible. ¿Cuánto vale este producto mínimo?

Sean **x** e **y** estos números. Sabemos que **x - y = 100**. Luego **x – 100 = y**.
Entonces, su producto es: **P = x. y = x . (x – 100)**

$$P(x) = x^2 - 100x$$

Ésta es una función cuadrática expresada en su forma polinómica, donde *a = 1, b = – 100, c = 0.*

Observemos que el signo del coeficiente *a* es positivo, luego la función cuadrática tendrá un valor mínimo en su vértice. Para hallar las coordenadas del mismo, aplicamos las fórmulas correspondientes:

$$x_V = -\frac{b}{2a}$$

$$x_V = -\frac{-100}{2.(1)} = 50$$

Cuando x = 50, entonces y = 50 – 100 = – 50.

Y el valor mínimo de P(x) es

$$y_V = P(x_v)$$

$$y_V = 50^2 - 100 \cdot 50$$

$$y_V = -2.500$$

Ejemplo:

Los ingresos mensuales de un fabricante de zapatos están dados, en pesos, por la siguiente función $f(x) = 1000x - 2x^2$ donde x : es la cantidad de pares de zapatos que fabrica en el mes. ¿Qué cantidad de pares debe fabricar mensualmente para obtener el mayor ingreso? ¿Cuál es el monto de ese ingreso máximo?

Observemos que el signo del coeficiente *a* es negativo, luego la función cuadrática tendrá un valor mínimo en su vértice. Hallamos entonces la abscisa del mismo: $x_V = -\frac{b}{2a}$

$$x_V = -\frac{1000}{2.(-2)} = 250$$

Luego, para obtener el mayor ingreso posible el fabricante deberá confeccionar 250 pares de zapatos al mes.

La ordenada del vértice es :

$$y_V = f(x_v)$$
$$y_V = 1000\ (250) - 2(250)^2$$
$$y_V = 125000$$

Es decir, que la ganancia máxima mensual es de $ 125.000.

Ejercicio 120:

Resuelve los siguientes problemas planteando una función cuadrática y hallando, según corresponda, su máximo o su mínimo.

a) Si la diferencia entre dos números es 6, ¿cuáles deben ser los números para obtener el producto mínimo? ¿Cuál es ese producto?
b) ¿Cuál es la máxima superficie que se puede delimitar con una soga de 100 m de largo dispuesta en forma rectangular sobre el piso?
c) La altura en metros (m) alcanzada por una pelota que es lanzada verticalmente hacia arriba, en relación al tiempo t, está dada por la siguiente función: $h(t) = -3t^2 + 24t$. Encuentra el tiempo de altura máxima, y el valor en m de dicha altura.
d) Determina dos números positivos cuya suma es 100 y la suma de sus cuadrados es mínima.

Las Raíces de la Función Cuadrática

Recordemos la definición de *ceros* o *raíces*: se trata de aquellos puntos de la función donde la abscisa es nula. Otra manera de expresarlo es: aquellos puntos donde la gráfica de la función intersecta el eje x.

Para hallar las raíces de una función f(x), se plantea $\boldsymbol{f(x)=0}$ y se despeja, si es posible, los valores de **x** que verifican esta ecuación.

Para hallar las raíces de una función cuadrática a partir de su forma polinómica se plantea

$$\boldsymbol{f(x)=0}$$

$$\boldsymbol{ax^2+bx+c=0}$$

Es decir: **se plantea y se resuelve una ecuación cuadrática.**

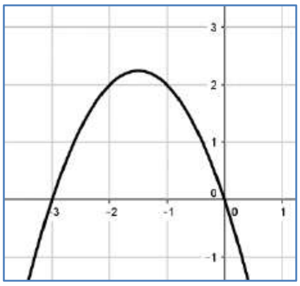
Se tienen tres situaciones posibles para clasificar las raíces de una función cuadrática. Para hacerlo recordemos, del módulo de Ecuación Cuadrática, la definición de *discriminante*: **$\Delta = b^2 - 4ac$.**

Asimismo:

Cuando $\Delta > 0$, la función tiene dos **raíces reales y distintas.**
Ejemplo:

y = - x² – 3x → $y = -x^2 - 3x$

$\Delta = b^2 - 4ac = 1 > 0$

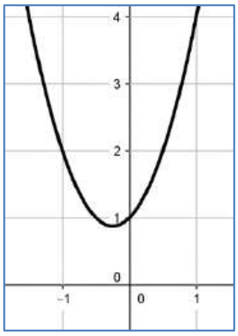


La parábola "cruza" el eje x.

Cuando $\Delta < 0$, la función tiene dos **raíces complejas conjugadas**.
Ejemplo:

$y = 2x^2 + x + 1$

$\Delta = b^2 - 4ac = 1 - 8 = -7 < 0$

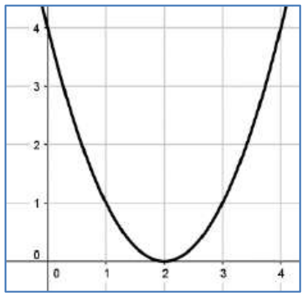


La parábola no toca el eje x.

Cuando $\Delta = 0$, la función tiene una única raíz***, diremos raíz doble***.
Ejemplo:

$y = x^2 - 4x + 4$

$\Delta = b^2 - 4ac = 16 - 16 = 0$



La parábola se posiciona sobre el eje x.

Ejercicio 121:

Halla el número de puntos de corte con el eje x que tienen las siguientes funciones cuadráticas:

a) $y = 2x^2 - x + 3$ b) $y = x^2 - 2x + 1$ c) $y = 7x - x^2$

d) $y = -x^2 - 6x - 9$ e) $y = -3x^2 - 7x - 3$ f) $y = 2x^2 + 3$

Ejercicio 122:
Marca una X donde corresponda:

Función	***Signo del Discriminante***			***Tipos de Raíces***		
	$\Delta > 0$	***$\Delta < 0$***	***$\Delta = 0$***	***Reales distintas***	***Reales iguales***	***Complejas***
$y = x^2 + 5x - 14$						
$y = x^2 + 10x + 29$						
$y = -x^2 - 3x$						
$y = (1/3)x^2 - 2x + 3$						

Cómo graficar la Función Cuadrática a partir de su Forma Polinómica

En los siguientes ejemplos, realizaremos los cálculos previos necesarios y graficaremos una función cuadrática a partir de su forma polinómica.

Ejemplo :
$y = f(x) = 2x^2 - 5x + 2$

Al estar expresada en forma polinómica, identificamos ***a* = 2 , *b* = - 5, *c* = 2.**

- El valor de ***a* es positivo**, por lo tanto las ramas de la parábola irán ***hacia arriba***.

- La ordenada al origen se lee en el término independiente: **o.o. = (0 ; 2)**

- Para hallar las raíces, igualamos la función a cero: $y = f(x) = 0$
$$2x^2 - 5x + 2 = 0$$

Hemos obtenido una ecuación cuadrática completa. Recordemos la manera de resolverla:

$$x_1 , x_2 = \boxed{\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

$$x_1 , x_2 = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4\,.\,2\,.2}}{2\,.\,2}$$

$$x_1 , x_2 = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{4} = \frac{5 \pm \sqrt{9}}{4} = \frac{5 \pm 3}{4}$$

$$x_1 , x_2 = \begin{cases} x_1 = \frac{5+3}{4} = \frac{8}{4} = 2 \\ x_2 = \frac{5-3}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \end{cases}$$ .... Luego las raíces son: $\begin{cases} \boldsymbol{x_1 = 2} \\ \boldsymbol{x_2 = \frac{1}{2}} \end{cases}$

- El cálculo del vértice se realiza aplicando las fórmulas correspondientes para hallar Xv e Yv:

$$x_V = -\frac{b}{2a}$$

$$x_V = -\frac{(-5)}{2(2)} = \boldsymbol{\frac{5}{4}}$$

$$y_V = f(x_v)$$

$$y_V = (x_v)^2 + 2x_v - 12$$

$$y_V = 2\left(\frac{5}{4}\right)^2 - 5\left(\frac{5}{4}\right) + 2$$

$$y_V = \frac{25}{8} - \frac{25}{4} + 2 = \frac{25 - 50 + 16}{8} = -\boldsymbol{\frac{9}{8}}$$

Otra forma de hallar Xv en una función cuadrática con dos raíces reales distintas:

Cuando la función tiene raíces reales distintas $\boldsymbol{x_1}$ y $\boldsymbol{x_2}$, las mismas equidistan del eje de simetría.

Luego, la abscisa del vértice puede obtenerse haciendo $\boldsymbol{x_V = \frac{x_1 + x_2}{2}}$

Luego $\boldsymbol{V = \left(\frac{5}{4}; -\frac{9}{8}\right)}$

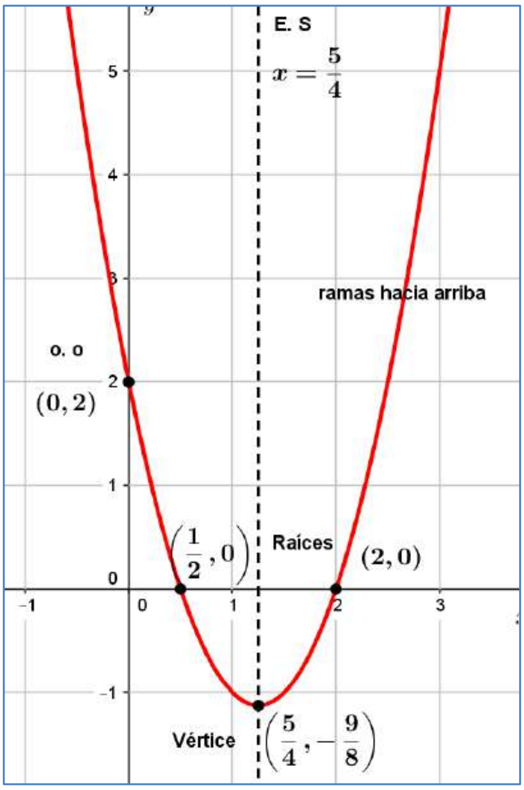
En nuestro caso, bastaría con plantear $x_V = \frac{\frac{1}{2}+2}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{5}{4}$

La ordenada y_V se calcula de igual manera, reemplazando la abscisa hallada en la función.

- Finalmente, el eje de simetría (E. S) es una recta paralela al eje y, de ecuación $\boldsymbol{x = \frac{5}{4}}$

Estamos ahora en condiciones de **graficar la función**. Recuperemos entonces los elementos calculados:

Valor de a	***Positivo (ramas hacia arriba)***
(o.o)	**(0 ; 2)**
Raíces	$\begin{cases} \boldsymbol{x_1 = 2} \\ \boldsymbol{x_2 = \frac{1}{2}} \end{cases}$
Vértice	$\boldsymbol{V = \left(\frac{5}{4} ; -\frac{9}{8}\right)}$
E. S	$\boldsymbol{x = \frac{5}{4}}$



Asimismo, en el gráfico podemos leer:

- Dom f : R
- Im f: $\left[-\frac{9}{8} ; +\infty\right)$
- C ⁺: $\left(-\infty ; \frac{1}{2}\right) U (2 ; +\infty)$
- C ⁻: $\left(\frac{1}{2} ; 2\right)$
- ID: $\left(-\infty ; \frac{5}{4}\right)$
- IC: $\left(\frac{5}{4} ; +\infty\right)$

Ejemplo:

$y = f(x) = 5x - x^2$, identificamos ***a* = - 1 , *b* = 5, *c* = 0.**

- El valor de ***a* es negativo**, luego las ramas de la parábola irán ***hacia abajo***.
- La ordenada al origen se lee en el término independiente: **o.o. = (0 ; 0)**
- Para hallar las raíces, igualamos la función a cero: $y = f(x) = 0$

$$-x^2 + 5x = 0$$

Hemos obtenido una ecuación cuadrática incompleta.

Recordemos la manera de resolverla: $x(-x + 5) = 0$ entonces $x = 0$ ó $-x + 5 = 0$

Raíces reales y distintas $\begin{cases} \boldsymbol{x_1 = 0} \\ \boldsymbol{x_2 = 5} \end{cases}$

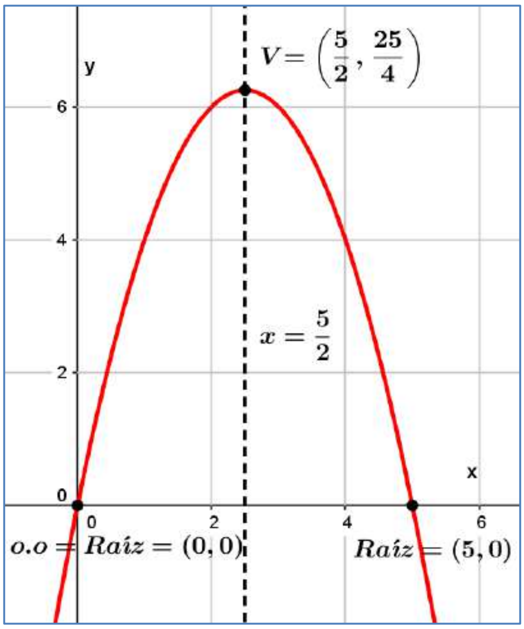
- Realizamos ahora el cálculo del vértice: $x_V = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{5}{2}$ $y_V = f(x_v)$

$$y_v = \frac{5}{2}\left(-\frac{5}{2} + 5\right) = \frac{25}{4}$$

Luego $\boldsymbol{V = \left(\frac{5}{2} ; \frac{25}{4}\right)}$

- Finalmente, el eje de simetría (E. S) tiene como ecuación a $\boldsymbol{x = \frac{5}{2}}$.

Gráfico de la función:

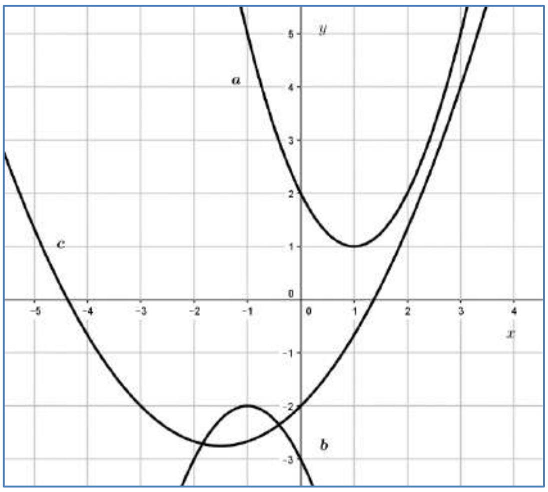


Valor de a	***Positivo (ramas hacia arriba)***
(o.o)	**(0, 0)**
Raíces	$\begin{cases} \boldsymbol{x_1 = 0} \\ \boldsymbol{x_2 = 5} \end{cases}$
Vértice	$\boldsymbol{V = \left(\frac{5}{2}, \frac{25}{4}\right)}$
E. S	$\boldsymbol{x = \frac{5}{2}}$

Asimismo, en el gráfico leemos:

- Dom f : R
- Im f: $(-\infty, \frac{25}{4}]$
- C ⁺: $(0,5)$
- C ⁻: $(-\infty, 0)U(5, +\infty)$
- IC: $\left(-\infty, \frac{5}{2}\right)$
- ID: $\left(\frac{5}{2}, +\infty\right)$

Ejercicio 123:



Asigna a cada una de las parábolas su correspondiente expresión algebraica. Fundamenta en cada caso tu elección, con tus palabras.

i) $y = \frac{1}{3}x^2 + x - 2$

ii) $y = x^2 - 2x + 2$

iii) $y = -x^2 - 2x - 3$

Ejercicio 124:
Realiza los cálculos previos necesarios y grafica las funciones del ejercicio 121.

Ejercicio 125:
Averigua cuál es el punto simétrico del punto (-2 ; -5) con respecto al eje de simetría de la parábola

$y = - 2x^2 - 16x - 29$.

Forma Factorizada de la Función Cuadrática

¡Para leer y recordar!

Una vez obtenidas las raíces de una función cuadrática,

es posible expresar dicha función en su ***forma factorizada***:

$$y = f(x) = a\,(x - x_1)(x - x_2)$$

- ✓ La forma factorizada proporciona la siguiente información sobre la función cuadrática:
- el valor y signo de la abertura ***a***
- las raíces $\mathbf{x_1}$ y $\mathbf{x_2}$.

Ejercicio 126:
Sin realizar cálculos, identifica y clasifica las raíces de las siguientes funciones cuadráticas.

a) $y = 2(x-1)(x+3)$ b) $y = 5x\,(x-4)$ c) $y = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2$ d) $y = -(x-2i)(x+2i)$

Ejercicio 127:
Suponiendo que *a* = 1, escribe la forma factorizada de las funciones cuadráticas que, en cada

caso, tienen las siguientes raíces reales:

a) $x_1 = 5 \quad x_2 = -1$ b) $x_1 = \sqrt{2} \quad x_2 = -\sqrt{2}$ c) $x_1 = \frac{1}{2} \quad x_2 = -\frac{1}{3}$

d) $x_1 = x_2 = -\frac{1}{4}$ e) $x_1 = -\frac{3}{4} \quad x_2 = -\frac{1}{2}$ f) $x_1 = 3 - \sqrt{2} \quad x_2 = 3 + \sqrt{2}$

Ejercicio 128:
Escribe la expresión de todas las funciones cuadráticas cuya intersección con el eje x son los puntos (2 ; 0) y (3 ; 0).

Ejercicio 129:
Escribe la forma factorizada de una función cuadrática tal que:

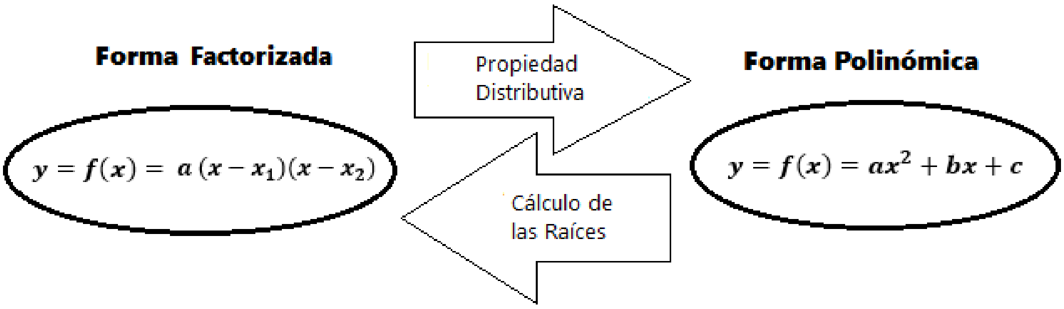
a) Pasa por los puntos (0 ; 0), (4 ; 0) y (2 ; - 4).

b) Su ordenada al origen es y = 5 y sus raíces son $x_1 = -1$ y $x_2 = 1$.

c) Tiene por raíces a $x_1 = -2$ y $x_2 = -3$ y pasa por el punto (0, 6).

- ✓ Para expresar una función cuadrática en su forma polinómica, a partir de la forma factorizada: **se aplica la propiedad distributiva.**

- ✓ Para expresar una función cuadrática en su forma factorizada, a partir de la forma polinómica: **se realiza el cálculo de sus raíces.**



Ejercicio 130:

Expresa en forma factorizada las siguientes funciones cuadráticas:

a) $y = 3x^2 - 6x$ b) $y = x^2 - 13x + 42$ c) $y = 2x - x^2$

d) $y = x^2 + 14x + 49$ e) $y = 6x^2 - 24$ f) $y = -4x^2 - 3$

Es posible expresar una función cuadrática de tres formas:

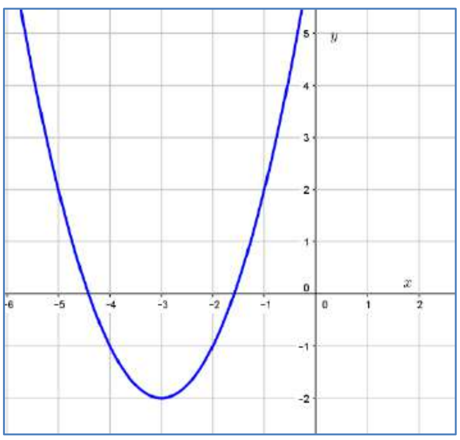
¡Para leer y recordar!

Forma	*Expresión*	*Información que brinda*
Polinómica	***$y = a\,x^2 + bx + c$ $\quad a \neq 0$***	***a , c : ordenada al origen***
Canónica	***$y = a\,(x - h)^2 + k$ $\quad a \neq 0$***	***a, vértice V = (h, k)***
Factorizada	***$y = a\,(x - x_1)\,(x - x_2)$ $\quad a \neq 0$***	***a , raíces : x_1 x_2***

Ejercicio 131:

Escribe las funciones cuadráticas graficadas en su forma indicada:

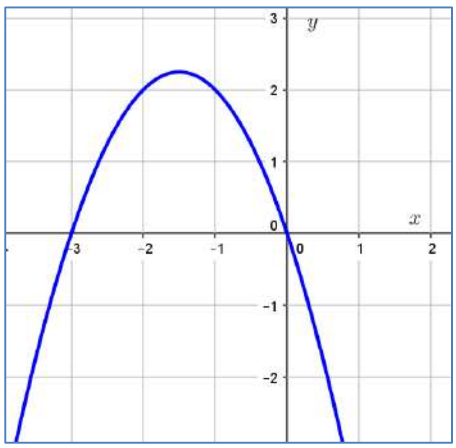
a)



Forma canónica:…………………………..

Forma polinómica: …………………………

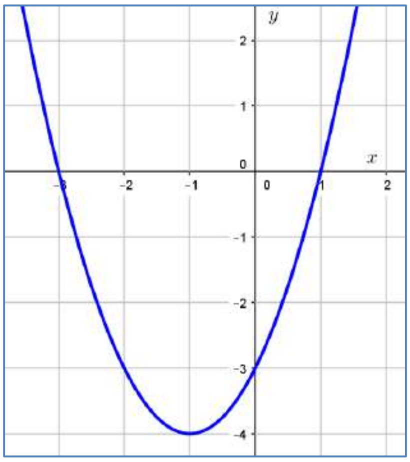
b)



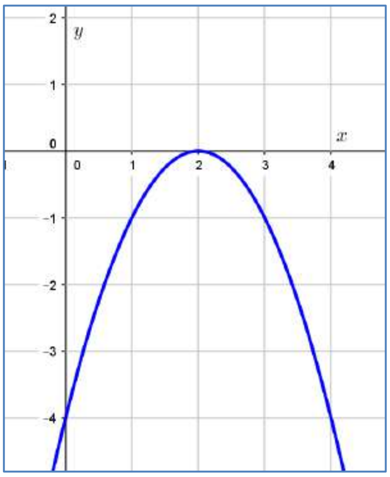
Forma Factorizada:………………………..

Forma Polinómica:………………………

c)



d)



Forma Factorizada:…………………………….

Forma Polinómica:………………………….

Forma canónica:………………………….

Forma polinómica: ………………………..

Ejercicio 132:

Completa la siguiente tabla con las expresiones equivalentes que faltan:

Forma Factorizada	*Forma Polinómica*	*Forma Canónica*
$y = -(x-2)(x+2)$		
	$y = 2x^2 + 4x - 6$	
		$y = (1/2)(x-4)^2 - 8$

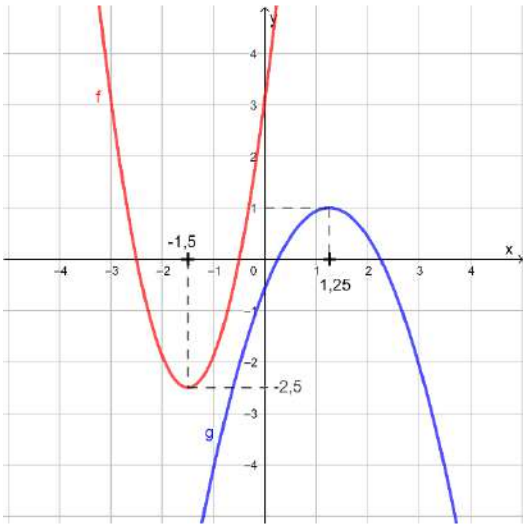
Ejercicio 133:

Para cada una de las funciones graficadas:

a) Escribe su forma canónica

b) Exprésalas en su forma polinómica

c) Calcula sus raíces y exprésalas en su forma factorizada.



Ejercicio 134:

a) Cierta función cuadrática pasa por los puntos (1 ; 1) , (0 ; 0) y (- 1 ; 1). Determina su forma polinómica.
b) Encuentra la forma polinómica de una función cuadrática que pasa por los puntos A (1, 4) ; B (2, 15) y cuya ordenada al origen es y = - 1.
c) Halla el valor de b para que la parábola $y = x^2 + b x + 3$ tenga su vértice en el punto (2, - 1).

Ejercicio 135:
Se quieren construir cajas de base cuadrada y de altura igual a 20 cm.

a) ¿Cuál será el volumen de la caja cuando la medida del lado de la base es de 10 cm? ¿Y si mide 2 dm?
b) Escribe una expresión algebraica que relacione el lado de la base con el volumen de la caja.

Ejercicio 136:
Expresa el área del triángulo equilátero en función de su lado x.

Ejercicio 137:
En una isla se introdujeron 112 iguanas. Al principio se reprodujeron con rapidez, pero al tiempo los recursos de la isla comenzaron a escasear y la población decreció. El número de iguanas a los **t** años está dado por:
$I(t) = -t^2 + 22t + 112$ (t > 0).

a) ¿En cuántos años la población de iguanas llegó a su máximo valor?
b) ¿En qué momento la población de iguanas se extinguirá?

POLINOMIOS Y FACTORIZACIÓN

En las unidades anteriores hemos estudiado las ecuaciones de primer y segundo grado.

$$a\,x + b = 0 \qquad a \neq 0$$

$$a\,x^2 + b\,x + c = 0 \qquad a \neq 0$$

Estas son casos particulares de ecuaciones de carácter más general, las llamadas **ecuaciones polinómicas,** y éstas a su vez de las **ecuaciones racionales**.

Para estudiar estas ecuaciones será necesario introducir previamente algunos conceptos como los de polinomios y expresiones racionales, con sus cuatro operaciones, y la noción de divisibilidad que ya vimos en la Unidad 1 para números enteros.

POLINOMIOS

¡Para leer y recordar!

Definición

-Llamamos ***polinomio*** a toda expresión de la forma

$$a_n x^n + a_{n-1}\,x^{n-1} + \ldots + a_1\,x + a_0$$

donde $n \in N_0$ y $a_n,\ a_{n-1},\ \ldots,\ a_1,\ a_0$ son números reales, que denominamos *coeficientes*.

- Si $a_n \neq 0$, decimos que el polinomio tiene ***grado n***.
- a_n es llamado el ***coeficiente principal***.
- el coeficiente a_0 recibe el nombre de ***término independiente***.

-El polinomio cuyos coeficientes son todos iguales a cero recibe el nombre de ***polinomio nulo***.

- El polinomio nulo carece de grado.

Ejemplo:

En el polinomio $4x^5 + 3x^4 - 2x^3 - \frac{1}{2}x + 1$, se tiene que:

- Grado $\rightarrow$ 5
- Coeficientes $\rightarrow$ 4, 3, -2, 0, $-\frac{1}{2}$, 1
- Coeficiente principal $\rightarrow$ 4
- Término independiente $\rightarrow$ 1

Operaciones con Polinomios

A continuación mostraremos cómo se pueden realizar las operaciones básicas de suma, resta, multiplicación y división entre polinomios.

Suma de Polinomios

Calculemos la suma de: $\boldsymbol{p}\ (\boldsymbol{x}) = 3x^2 + 2x + 1$ y $\boldsymbol{q}\ (\boldsymbol{x}) = 5x^3 - 7x + 8$

Una forma práctica de realizar esta operación es ordenar los polinomios y escribir uno debajo del otro. Si falta algún término intermedio en algún polinomio, lo *completamos* escribiendo dicho término con coeficiente 0,o dejando el espacio vacío.

$$\begin{array}{lccccc} p\ (x) & = & & +3x^2 & +2x & +1 \\ +q\ (x) & = & +5x^3 & +0x^2 & -7x & +8 \\ \hline p\ (x)+q\ (x) & = & 5x^3 & +3x^2 & -5x & +9 \end{array}$$

Resta de Polinomios

Realicemos ahora la resta de: $\boldsymbol{p}\ (\boldsymbol{x}) = x^5 + 2x^4 - 7x^3 + 8$ y $\boldsymbol{q}(\boldsymbol{x}) = x^5 + 5x^4 - 4x^2 + 5$

Para este caso también es conveniente ordenar los polinomios y escribir uno debajo del otro.

$$\begin{array}{lcccccc} p\ (x) & = & x^5 & +2x^4 & -7x^3 & & +8 \\ -\ q\ (x) & = & x^5 & +5x^4 & & -4x^2 & +5 \\ \hline p\ (x)-q\ (x) & = & & -3x^4 & -7x^3 & +4x^2 & +3 \end{array}$$

El polinomio que resulta de la suma o la resta puede ser el polinomio nulo, o su grado puede ser menor o igual al del polinomio de mayor grado que estamos sumando o restando.

$$\textbf{grado}\ (p\ (x) \pm q\ (x)) \leq \textbf{máx}\ \{\textbf{grado}\ p\ (x),\ \textbf{grado}\ q\ (x)\}$$

Ejercicio 138:
Dados los siguientes polinomios, resuelve las operaciones requeridas.

$$a(x) = -2x^3 + x^2 - \frac{1}{2}x \quad b(x) = 3x - 4 + \frac{1}{2}x^3 - 2x^2 \qquad c(x) = x^4 - 5x + 2x^3$$

i) *a(x) + b(x)*

ii) *a(x) - b(x)*

iii) *c(x) - b(x)*

Producto de Polinomios

Para calcular el producto de dos polinomios multiplicamos cada uno de los términos de un polinomio por cada uno de los términos del otro y sumamos, es decir: aplicamos la ***propiedad distributiva*** que ya conocemos.

Ejemplo:
Sean $p(x) = 2x^3 – 4x$ y $q(x) = 5x^2 – x + 2$

Resolvamos p(x). q(x)

$p(x) . q(x) = (2x^3 – 4x) . (5x^2 – x + 2) = 10x^5 – 2x^4 + 4x^3 – 20x^3 +4x^2 – 8x = 10x^5 – 2x^4 -16x^3 +4x^2 – 8x$

Ejercicio 139:

Resuelve los siguientes productos de polinomios:

a) $(x^3 – x + 1) (x^2 – x)$
b) $\left(-\frac{2}{3}x + x^3\right)(2x - 3x^2 + 1)$
c) $(2x - 3x^2 + 1)\left(-2x^3 - \frac{1}{2} + 3x\right)$

Ejercicio 140:

Realiza las operaciones combinadas entre los polinomios dados.

$$b(x) = -\frac{1}{3} + \frac{3}{10}x^3 \qquad t(x) = x - \frac{1}{5}x^3 \qquad z(x) = 2x^2 - \frac{1}{2} + 3x^4$$

a) $[b(x)]^2$ =

b) $[b(x) + z(x)] . t(x)$ =

División de Polinomios

Recordemos que en la Unidad 1 estudiamos el algoritmo de la división, también llamado algoritmo de Euclides, para la división de números enteros.

Al realizar una división entre dos números enteros puede que el resto sea distinto de cero.

Pero el resto de la división entre dos números enteros **nunca** puede ser negativo.

Así, si queremos dividir 7 por 4 obtenemos

$$\begin{array}{rcr|lcl} \textit{Dividendo} & \rightarrow & 7 & 4 & \rightarrow & \textit{Divisor} \\ \cline{4-4} \textit{Resto} & \rightarrow & 3 & 1 & \rightarrow & \textit{Cociente} \end{array}$$

Se verifica entonces que

$$7 = 4 \,.\, 1 + 3 \ ,$$

y el resto es siempre menor que el valor absoluto del divisor, en este caso, $3 < |4|$.

Vamos a utilizar esta misma idea para realizar la división de polinomio, teniendo en cuenta que:

- El **grado** del polinomio dividendo debe ser **mayor o igual** que el grado del divisor.
- Los polinomios dividendo y divisor deben estar **completos** y **ordenados** decrecientemente.

Ejemplo:

Hallemos el cociente y el resto de la división entre los polinomios $a(x) = 8\,x^4 + 6\,x^3 - 4$ y $b\,(x) = 2\,x^2$.

$$\begin{array}{rrrr|l} & 8x^4 & +\,6x^3 & -\,4 & 2x^2 \\ \cline{5-5} - & & & & 4x^2 + 3x \\ & 8x^4 & & & \\ \cline{1-4} & 0x^4 & +\,6x^3 & -\,4 & \\ - & & & & \\ & & 6x^3 & & \\ \cline{1-4} & & 0x^3 & -\,4 & \end{array}$$

Cociente: $q\,(x) = 4\,x^2 + 3\,x$
Resto: $r\,(x) = -\,4$

Ejemplo:

Hallaremos el cociente y el resto de la división entre $a\,(x) = 2\,x^2 + 3x^4 + x - 1$ y $b\,(x) = x^2 + x - 2$.

$$\begin{array}{rrrrr|l} 3x^4 & 0x^3 & +\,2x^2 & +\,x & -\,1 & x^2 + x - 2 \\ \cline{6-6} -\,3x^4 & -3x^3 & +6x^2 & & & 3x^2 - 3x + 11 \\ \cline{1-5} & -\,3\,x^3 & +\,8x^2 & +\,x & -\,1 & \\ & 3x^3 & +\,3x^2 & -6x & & \\ \cline{1-5} & & 11x^2 & -5x & -\,1 & \\ & & -\,11x^2 & -11x & +22 & \\ \cline{1-5} & & & -16x & +21 & \end{array}$$

Cociente: $q\,(x) = 3\,x^2 - 3\,x + 11$
Resto: $r\,(x) = -16x + 21$

Algoritmo de la División de Polinomios

Al dividir dos polinomios *a* (*x*) y *b* (*x*) se obtiene

¡Para leer y recordar!

$$\begin{array}{r|l} a(x) & b(x) \\ \cline{2-2} r(x) & q(x) \end{array}$$

…donde $r(x) = 0$ ó grado $r(x) <$ grado $b(x)$

Entonces se verifica la identidad $a(x) = b(x) . q(x) + r(x)$

Ejercicio 141:
Verifica esta identidad en los dos ejemplos realizados anteriormente.

Ejercicio 142:
a) Halla el cociente y el resto de las siguientes divisiones.
b) Verifica aplicando en cada caso el algoritmo de la división.

I. $(x^5 + 7x^3 - 5x + 1) : (2x + x^3) =$

II. $(x^3 + x - 5x^2) : (x^2 - 1) =$

III. $(x^4 - 11x^2 - 20 + 30x - 2x^3) : (-2 + x^2 + 3x) =$

Regla de Ruffini

Se aplica al dividir un polinomio P(x) por otro polinomio de la forma $(x - a), \ a \in \Re$.

Ejemplo:
Mostraremos una comparación entre la división convencional y esta regla.

<table>
<tr><th>División convencional</th><th>Regla de Ruffini</th></tr>
<tr><td>

$$\begin{array}{lrrrr|l} & 3x^3 & +7x^2 & +6x & -1 & x+2 \\ \cline{6-6} + & -3x^3 & -6x^2 & & & 3x^2+x+4 \\ \cline{2-5} & & x^2 & +6x & -1 & \\ + & & -x^2 & -2x & & \\ \cline{2-5} & & & 4x & -1 & \\ + & & & -4x & -8 & \\ \cline{2-5} & & & & -9 & \end{array}$$

Cociente: $q(x) = 3x^2 + x + 4$
Resto: $r(x) = -9$

</td><td>

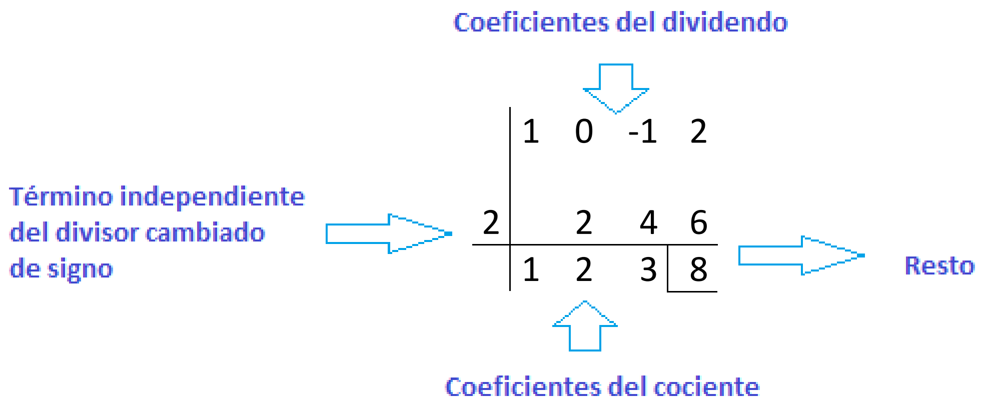
$$\begin{array}{r|rrr|r} & 3 & 7 & 6 & -1 \\ -2 & & -6 & -2 & -8 \\ \hline & 3 & 1 & 4 & -9 \end{array}$$

Cociente: $q(x) = 3x^2 + x + 4$
Resto: $r(x) = -9$

</td></tr>
</table>

Ejemplo:

Dados $P(x) = x^3 – x + 2$ y $Q(x) = x – 2$, aplicamos la Regla de Ruffini para hallar P(x): Q(x)



Cociente: $C(x) = x^2 + 2x + 3$
Resto: $R(x) = 8$

Observa que el grado del polinomio cociente es una unidad menor que el grado del dividendo.

Ejercicio 143:

Resuelve aplicando en cada caso la Regla de Ruffini.

a) $(2x^3 + 3x - 1) : (x - 2) =$

b) $(- 2x^3 + x^4 – 1) : (x + 2) =$

c) $\left(x^4 - \frac{2}{3}x^3 + x - \frac{4}{3}\right) : (x-1) =$

Ejercicio 144:
Halla en cada caso, el cociente y resto de la división entre *a* (*x*) y *b* (*x*), aplicando el método que creas conveniente.

a) $a(x) = 2x^3 + 3x^2 + x – 1$; $b(x) = x^2 – 1$

b) $a(x) = 2x^5 + 8x^3 - x^6$; $b(x) = x^2 + 2x$

c) $a(x) = x^4 - 2x^3 + 2x^2 – 3x - 2$; $b(x) = x – 2$

d) $a(x) = x^6 + 4x^5 - 7x^3 - 4$; $b(x) = x + 1$

e) $a(x) = 2x^7 + 3x^6 + 18x^3 + 29x + 10$; $b(x) = 2x^2 + 3x$

f) $a(x) = - 2x^5 - 4x^4 - x^3 - 8$; $b(x) = x + 2$

Ejercicio 145:
¿Es cierto que existe un polinomio $k(x)$ tal que $6x^6 - 9x^4 + 10x^2 - 15 = k(x) \cdot (2x^2 - 3)$?

Valor Numérico de un Polinomio

¡Para leer y recordar!

Definición:

El **valor numérico de un polinomio** es el valor que se obtiene al *reemplazar* la variable por un número y *efectuar las operaciones indicadas.*

Ejemplo: El valor numérico del polinomio $p\ (x) = 5x^4 – 4x^2 + 6x - 1$ para $x = 2$

es $p\ (2) = 5.(2)^4 – 4.(2)^2 + 6.2 – 1 = 51$

Ejercicio 146:
Encuentra los valores numéricos del polinomio p(x) del ejemplo recién citado para $x = 0$, $x = 3$, $x = -1$.

Raíz de un Polinomio

¡Para leer y recordar!

Definición:

Un número $\boldsymbol{a}$ es una ***raíz* de un polinomio** $p\ (x)$ si el polinomio se anula para ese valor.

Es decir, $\boldsymbol{x = a}$ **es raíz del polinomio** $\boldsymbol{p\ (x)}$ **sí y sólo sí** $\boldsymbol{p\ (a) = 0}$.

Ejemplo: x = 2 es raíz de $p(x) = x^2 – 4x + 4$ porque $p(2) = 2^2 -4.2 + 4 = 0$

Ejercicio 147:
Determina si x= 1 es raíz del polinomio $p(x) = x^3 – x^2 – 2x$. ¿Puedes encontrar otras raíces del polinomio?

Ejercicio 148:
Marca la opción correcta:
Las raíces del polinomio $p(x) = 6\ x^3 + 13\ x^2 – x – 2$ son:

i. $\{-2,\frac{1}{2},\frac{1}{3}\}$ ii. $\{-2,\frac{1}{2},-\frac{1}{3}\}$ iii. $\{-1,0,-6\}$ iv. Ninguna de las anteriores

Ejercicio 149:
El polinomio $p(x) = x^4 - ax^3 + bx^2$ tiene como raíces $x = 3$ y $x = - 1$. Halla los valores de a y b.

Divisibilidad de Polinomios

¡Para leer y recordar!

Si al realizar la división entera entre los polinomios

$a(x)$ y $b(x)$ el resto es nulo, decimos que

a **(*x*) es *divisible* por *b* (*x*)**, o que ***b*** **(*x*) *divide* a *a*(*x*).**

En este caso, podemos expresar al polinomio $a(x)$ como $a(x) = b(x) \cdot q(x)$.

Ejemplo:

¿Es el polinomio $p(x) = 20x^5 + 7x^4 - 3x^3 - 24x^2 + 6x$ divisible por $q(x) = 4x^2 – x$?

Aplicando el algoritmo de la división, obtenemos que:

$$q(x) = (5x^3 + 3x^2 - 6) \text{ y } r(x) = 0$$

luego, podemos afirmar : $4x^2 – x$ ***divide a*** $20x^5 + 7x^4 - 3x^3 - 24x^2 + 6x$

y $20x^5 + 7x^4 - 3x^3 - 24x^2 + 6x = (5x^3 + 3x^2 – 6)(4x^2 - x)$

Teorema del Resto

Como hemos visto en apartados anteriores, mediante la Regla de Ruffini se obtiene de forma sencilla el cociente y el resto de la división de un polinomio entre el binomio (x - a).

También hemos revisado el valor numérico de un polinomio.

Resuelve en grupo la siguiente actividad, teniendo estos conceptos en cuenta:

<u>Ejercicio 150</u>:

a) Calcula el cociente y el resto de las siguientes divisiones:

i) $(2x^3 + 6x^2 - 1) : (x + 3)$

ii) $(x^4 + 2x^3 - x^2 + 3x - 5) : (x - 1)$

b) Calcula el valor numérico de los polinomios dividendo del inciso a), para los valores x = -3 y x = 1 respectivamente.

c) Compara dicho valor numérico con el resto obtenido en las divisiones efectuadas en el inciso a).

¿Qué has observado?

El resultado que seguro has observado se puede expresar como el enunciado del:

Teorema del resto:

"El resto de la división de un polinomio P(x) entre un binomio de la forma (x - a), es igual al valor numérico del polinomio cuando x toma el valor "a" que podemos expresar como P(a)"

Ejercicio 151:

a) Calcula el valor numérico del polinomio $p(x) = x^3 + 6x^2 - 3x - 4$ en los casos: $x = 0$; $x = -2$ y $x = 1$.

b) Realiza la división del polinomio por el binomio del tipo (x - a) adecuado, y comprueba que el resto de la división coincide con el valor numérico calculado.

Ejercicio 152:

Calcula el resto de las siguientes divisiones de polinomios, sin realizar la operación.

a) $(5x^2 - 2x + 4) : (x + 3)$

b) $(12x^4 - 5x^2 + 2x - 5) : (x - 2)$

c) $(2x^3 - 4x^2 - 3) : (x - 1)$

d) $\left(\frac{3}{2}x^3 + 4x^2 + 3\right) : (x + 2)$

Ejercicio 153:

Encuentra los valores de a tales que al dividir $x^2 + 5x - 2$ por $x - a$, el resto sea – 8.

Un Caso Particular Muy Importante

Si a es raíz del polinomio p (x), entonces el resto de la división entre p (x) y (x - a) es 0.

es decir: (x - a) divide a p (x);

es decir: p(x) es divisible por (x – a).

Demostremos este resultado:

Aplicando el algoritmo de la división entre un polinomio $p(x)$ y el binomio $(x - a)$ obtenemos:

$$p(x) = (x - a) . q(x) + r(x)$$

donde $r(x) = 0$, ó grado $r(x) <$ grado $(x - a) = 1$

es decir: $r(x) = r$ es un polinomio constante.

Entonces podemos expresar: $p(x) = (x - a) .q(x) + r$

Si a es raíz del polinomio $p(x)$, entonces: $0 = p(a) = (a - a) . q(a) + r = r$

Es decir: $\boldsymbol{r = 0}$.

FACTORIZACIÓN DE POLINOMIOS

Si se realiza el producto (x-2).(x+3) , se obtiene el polinomio $x^2 + x - 6$, por lo que dicho polinomio puede expresarse como producto de factores: $x^2 + x - 6 = (x-2)(x+3)$

Conseguir, cuando sea posible, expresar un polinomio como producto de polinomios primos es lo que se denomina "*factorizar el polinomio*".

- Para obtener polinomios primos del tipo (x – a), bastará con encontrar valores de "a" para los que la división, que se efectúa por la regla de Ruffini, sea exacta (resto = 0) y aplicar el algoritmo de la división : "***Dividendo = divisor · cociente + resto***"

- Como el resto es igual a cero, D(x) = d(x) · c(x) , obteniéndose el polinomio dividendo descompuesto en dos factores .

Ejemplo:

Sea $p(x) = x^3 - x^2 - 14x + 24$.

- Como $p(2) = 8 - 4 - 28 + 24 = 0$; entonces 2 es una raíz de $p(x)$.
- Luego $p(x)$ es divisible por x – 2, es decir: $p(x) = (x - 2)\ q(x)$

Si aplicamos la regla de Ruffini para calcular el cociente $q(x)$ entre $p(x)$ y el binomio (x – 2), obtenemos :
$q(x) = x^2 + x - 12$ entonces $\mathbf{x^3 - x^2 - 14x + 24 = (x^2 + x - 12).(x - 2)}$) (1)

Como hemos visto anteriormente, podemos calcular las raíces de $(x^2 + x - 12)$,que son:
$x_1 = 3$, $x_2 = -4$.
Luego, podemos expresar a $q(x)$ como sigue: $q(x) = \mathbf{x^2 + x - 12 = (x - 3)(x + 4)}$. (2)

Si reemplazamos (2) en (1) obtenemos: $\mathbf{x^3 - x^2 - 14x + 24 = (x - 2)(x - 3)(x + 4)}$

Observa que es más sencillo encontrar las raíces de cada factor, que las raíces del polinomio original.

Ejercicio 154:

Dado el polinomio $p(x) = 2x^3 + x^2 - 5x + 2$

a) Encuentra algún valor de "a" para los que el valor numérico del polinomio sea 0.

b) Verifica que el resto de la división de p(x) por x – a sea cero.

c) Factoriza el polinomio.

Ejercicio 155:

Halla todas las raíces de los siguientes polinomios, sabiendo que r es una de ellas:

a) $c(x) = 2x^3 + 6x^2 - 2x - 6$, $r = -3$

b) $a(x) = x^4 - x^3 + 3x^2 - 3x$, $r = 1$

Una regla muy útil: los valores de "x = a" enteros, para los que el valor numérico de un polinomio es cero, son siempre divisores del término independiente del polinomio.

Resumen: Dado un polinomio P(x), las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- El valor numérico para x = a es 0 o sea P(a) = 0
- La división del polinomio P(x) entre el binomio (x - a) es exacta
- (x - a) es un factor del polinomio: P(x) = (x - a) C(x), siendo C (x) el cociente de P(x) : (x-a)
- La ecuación P(x) = 0 tiene una solución para x = a.

Ejercicio 156:

Factoriza los siguientes polinomios comprobando cada una de las cuatro afirmaciones anteriores:

a) $p(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$

b) $q(x) = x^4 - 1$

c) $r(x) = x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x + 24$ (Una raíz es x = 4)

Algunos Casos "Especiales" de Factorización de Polinomios

Factor Común	A veces ocurre que en un polinomio $p(x)$ la variable x aparece en todos los términos, en estos casos resulta conveniente extraer ***factor común***.

El procedimiento consiste en:

- extraer la variable x de cada término elevada a **la menor** de sus potencias y extraer un número que es factor de **todos** los coeficientes.

Siempre podemos verificar si la factorización obtenida es correcta, aplicando la propiedad distributiva.

Ejemplo:

$p(x) = 4x^5 + 8x^4 + 6x^3 - 10x^2 = 2x^2 \cdot (2x^3 + 4x^2 + 3x - 5)$

Ejercicio 157:

Extrae factor común:

a) $p(x) = 4x^5 + 2x^4 + 6x^3 - 10x^2$

b) $q(x) = x + 3x^4 - 5x^2 + 4x^3$

c) $(x) = 3x^2 - 6x$

Diferencia de Cuadrados

$$\boldsymbol{a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)}$$

Observemos que...

todo número positivo es el cuadrado de su propia raíz cuadrada.

Ejemplos:

i) $p(x) = x^2 - 25 = (x - 5)(x + 5)$

ii) $q(x) = x^4 - 9x^2 = (x^2)^2 - (3x)^2 = (x^2 - 3x)(x^2 + 3x)$

iii) $r(x) = x^2 - 6 = x^2 - \left(\sqrt{6}\right)^2 = (x - \sqrt{6})(x + \sqrt{6})$

Ejercicio 158:

Factoriza aplicando diferencia de cuadrados:

a) $p(x) = x^2 - 25$

b) $r(x) = 4x^6 - 1$

c) $s(x) = 9x^4 - x^6$

d) $m(x) = x^2 - 6$

e) $q(x) = 16 - x^4$

Ejercicio 159:

Factoriza los siguientes polinomios aplicando la combinación de los dos casos vistos:

a) $a(x) = x^3 - 25x$

b) $j(x) = 2x^5 - 32x$

c) $s(x) = 6x^6 - 54x^2$

d) $z(x) = 3x^3 - 12x$

e) $t(x) = x^7 - 3x$

Factor Común por Grupos

Algunos polinomios presentan una estructura que nos permite formar grupos de igual cantidad de términos y sacar factor común en cada uno de esos grupos.

Una vez hecho esto, aparece un nuevo factor común en todos los grupos. El término técnico de este procedimiento es extracción de ***factor común por grupos***.

Ejemplos:

i) $p(x) = 7x^5 - 5x^4 + 14x - 10 = (7x^5 - 5x^4) + (14x - 10) =$

$= x^4 . (7x - 5) + 2 . (7x - 5) = (x^4 + 2) . (7x - 5)$

ii) $q(x) = x^7 + 3x^3 + 3x^8 + x^2 - 2x^5 - 2 =$

$= (3x^8 + x^7 - 2x^5) + (3x^3 + x^2 - 2) =$

$= x^5 . (3x^3 + x^2 - 2) + (3x^3 + x^2 - 2) =$

$= (x^5 + 1) . (3x^3 + x^2 - 2)$

Ejercicio 160:

Extrae factor común por grupos en los siguientes polinomios:

a) $p(x) = x^3 + x^2 + 4x + 4$

b) $q(x) = x^3 - 2x^2 - 3x + 6$

c) $r(x) = x^3 + 3x^2 - x - 3$

d) $s(x) = 3x^3 + 5x^2 - 6x - 10$

Analicemos ahora el resultado de elevar un binomio al cuadrado.

$(x + 3)^2 = (x + 3)(x + 3)$

Al desarrollar $(x + 3)^2$ obtenemos tres términos:

$$(x + 3)^2 = x^2 + 6x + 9$$

- en uno aparece el cuadrado de x,
- en otro aparece 9 que es el cuadrado de 3,
- y en otro aparece $6x$ que es el doble del producto entre x y 3.

$(x - 3)^2 = (x - 3)(x - 3)$

Al desarrollar $(x - 3)^2$, obtenemos una expresión similar donde la única diferencia está en el término del doble producto, que aparece restando: $(x - 3)^2 = x^2 - 6x + 9$

Resumiendo: $(x + 3)^2 = x^2 + 6x + 9$ y $(x - 3)^2 = x^2 - 6x + 9$

A las expresiones en el miembro derecho se las denomina ***Trinomio Cuadrado Perfecto***.

Generalizando estos resultados para el cuadrado de cualquier binomio:

Trinomio Cuadrado Perfecto

$$\boldsymbol{a^2 + 2\,a\,b + b^2 = (a + b)^2}$$
$$\boldsymbol{a^2 - 2\,a\,b + b^2 = (a - b)^2}$$

Ejemplos:

a) $p(x) = x^2 - 10\,x + 25 = x^2 - 2\,.\,5.\,x + 5^2 = (x - 5)^2$

b) $q(x) = 9\,x^4 + 36\,x^2 + 36 = (3\,x^2)^2 + 2\,.\,3\,x^2.\,6 + 6^2 = (3\,x^2 + 6)^2$

c) $r(x) = x^2 - x + 0{,}25 = x^2 - 2\,.\,\frac{1}{2}\,x + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2$

Ejercicio 161:
Factoriza aplicando el caso recién revisado.

a) $p(x) = x^2 + 6x + 9$

b) $q(x) = 4x^2 - 8x + 4$

c) $r(x) = x^4 - 4x^2 + 4$

d) $s(x) = 4x^4 + 4x^2 + 1$

Ejercicio 162:
Expresa los siguientes polinomios como productos:

$a(x) = x^3 - x^2 + x - 1$

$b(x) = 3\,x^3 - 6\,x^2 - 3\,x + 6$

$c(x) = 4\,x^2 + 4\,x + 1$

$d(x) = 3\,x^6 - 12\,x^5 + 9\,x^4 - 3\,x^2 + 12\,x - 9$

$f(x) = 25\,x^6 + 20\,x^3 + 4$

$g(x) = x^6 - \frac{1}{16}x^2$

Ejercicio 163:
Halla todas las raíces reales de los polinomios del ejercicio anterior.

Ejercicio 164:
Expresa los siguientes polinomios como productos y halla sus raíces reales.

a) $a(x) = x^4 - x$

b) $b(x) = 2\,x^7 + 3\,x^6 - 5\,x^5$

c) $c(x) = 5\,x^3 - 10\,x^2 + 5\,x - 10$

d) $d(x) = x^2 - 6\,x + 9$

e) $e(x) = -2\,x^2 + 162$

f) $f(x) = x^4 - 81$

g) $g(x) = 4\,x^7 + 4\,x$

h) $h(x) = 3\,x^2 - 15$

i) $i(x) = x^4 + 12\,x^2 + 36$

j) $j(x) = 2\,x^3 - 48\,x^2 + 288\,x$

EXPRESIONES RACIONALES

¡Para leer y recordar!

Definición:
Así como llamamos números racionales a los números que se pueden expresar de la forma $\frac{a}{b}$ con a , $b \in$ Z, y $b \neq 0$,

llamamos ***expresiones racionales*** a las expresiones de la forma $\frac{p(x)}{q(x)}$ donde $p(x)$ y $q(x)$ son polinomios y $q(x)$ no es el polinomio nulo.

$p(x)$ recibe el nombre de ***numerador*** y $q(x)$ el de ***denominador***.

Ejemplos:

a) $\frac{3}{x}$ donde $p(x) = 3$, y $q(x) = x$.

b) $\frac{-3x^2+5x-1}{x^3+6x^2+\sqrt{2}}$ donde $p(x) = -3x^2 + 5x - 1$, y $q(x) = x^3 + 6x^2 + \sqrt{2}$.

c) $x^3 + 3x^2 - x - 3$ donde $p(x) = x^3 + 3x^2 - x - 3$, y $q(x) = 1$.

Expresiones Racionales Irreducibles

¡Para leer y recordar!

Al trabajar con expresiones racionales es conveniente tener una expresión equivalente más simple.

Es posible simplificarlas cuando existen factores comunes al numerador y al denominador, en caso contrario, la expresión racional recibe el nombre de ***irreducible***.

Una herramienta útil para simplificar expresiones racionales es la factorización de polinomios, que ya hemos estudiado en esta unidad.

Ejemplos:
Vamos a simplificar algunas expresiones racionales para que resulten irreducibles.

i) $p(x) = \frac{x+1}{x^2+x} = \frac{x+1}{x(x+1)} = \boxed{\frac{1}{x}}$

ii) $q(x) = \frac{x^4+x^2}{x^4-1} = \frac{x^2(x^2+1)}{(x^2-1)(x^2+1)} = \boxed{\frac{x^2}{x^2-1}}$

Ejercicio 165:

Simplifica las siguientes expresiones racionales para que resulten irreducibles.

a) $r(x) = \frac{-x+2}{x^3-4x}$ b) $g(x) = \frac{x^2+7x+10}{x^2-25}$

c) $j(x) = \frac{x^2-6x+9}{x^2-3x}$ d) $w(x) = \frac{x^5-16x}{x^2}$

Operaciones con Expresiones Racionales

Suma y Resta – Expresiones de Igual Denominador

Observemos la similitud con las sumas y restas de fracciones.

Para sumar o restar dos expresiones racionales de igual denominador, operamos como lo hacíamos con los números racionales :

$$\boxed{\frac{p(x)}{m(x)} \pm \frac{q(x)}{m(x)} = \frac{p(x) \pm q(x)}{m(x)}}$$

Ejemplo:

Consideremos las siguientes expresiones algebraicas: $\frac{-2x^2}{x^2-9}$ y $\frac{x^2-3x}{x^2-9}$

Su suma es:

$$\frac{-2x^2}{x^2-9} + \frac{x^2-3x}{x^2-9} = \frac{-2x^2+x^2-3x}{x^2-9} = \frac{-x^2-3x}{x^2-9} = \frac{-x\,(x+3)}{(x-3)(x+3)} = \boxed{\frac{-x}{(x-3)}}$$

Y su resta es:

$$\frac{-2x^2}{x^2-9} - \frac{x^2-3x}{x^2-9} = \frac{-2x^2-(x^2-3x)}{x^2-9} = \boxed{\frac{-3x^2+3x}{x^2-9}}$$

Ejercicio 166:

Resuelve las siguientes sumas y restas de expresiones con igual denominador.

a) $\frac{2x-x^3}{x^2} + \frac{x\,(x+2)}{x^2}$ b) $\frac{3x^3+1}{12x^2} - \frac{5x^3-1}{12x^2}$

c) $\frac{1}{x-1} - \frac{2x-1}{x-1}$ d) $\frac{1+x}{x^2-1} + \frac{5x^2+x}{x^2-1} - \frac{4x^2}{x^2-1}$

¡Para leer y recordar!

Definición:

Dos fracciones se dicen ***equivalentes*** si una de ellas se ha obtenido simplificando la otra o bien si ambas, al simplificarse dan lugar a la misma fracción.

Ejemplo: $\frac{45}{30} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$son fracciones equivalentes.

- La fracción que ya no puede simplificarse más, se denomina ***irreducible***.

Suma y Resta – Expresiones de Distinto Denominador

Recordemos que para sumar o restar números racionales de distinto denominador, debemos sumar o restar fracciones equivalentes que tengan el mismo denominador.

Ejemplo:

$$\frac{11}{12} + \frac{7}{10} = \frac{11}{2^2 .3} + \frac{7}{2.5}$$

$$= \frac{5.11 + 2.3.7}{2^2 .3.5}$$

$$= \frac{55 + 42}{60} = \frac{97}{60}$$

Lo más conveniente es tomar como denominador común el mínimo común múltiplo (m.c.m.) de los dos denominadores. Hemos visto que una forma de hallar el m.c.m. es factorizar ambos denominadores y luego multiplicar los factores comunes y no comunes con el máximo exponente con el que aparecen en cada factorización.

Para sumar o restar expresiones racionales procedemos en forma análoga.

Ejemplo:

Calculemos $\frac{2}{3x^2 - 6x + 3} + \frac{x}{x^2 + 3x - 4}$

En primer lugar, hallamos el común denominador de ambas expresiones, para lo que debemos factorizar cada uno de los denominadores (*Te sugerimos revisar el apartado de Factorización*).

- $3x^2 - 6x + 3 = 3(x^2 - 2x + 1) = 3(x - 1)^2$
- $x^2 + 3x - 4 = (x - 1)(x + 4)$
- ***Por lo tanto el denominador común es*** **$3(x - 1)^2 (x + 4)$***(¿Por qué?)*

Luego: $$\frac{2}{3x^2 - 6x + 3} + \frac{x}{x^2 + 3x - 4} = \frac{2}{3(x-1)^2} + \frac{x}{(x-1)(x+4)} =$$

$$\frac{2(x+4) + x.3(x-1)}{3(x-1)^2 (x+4)} = \boxed{\frac{3x^2 - x + 8}{3(x-1)^2 (x+4)}}$$

Ejercicio 167:
Realiza la resta entre las expresiones racionales del último ejemplo.

Ejercicio 168:
Resuelve las operaciones propuestas de expresiones con distinto denominador.

a) $\frac{1}{2x-1}+\frac{2x}{1-2x}$ b) $\frac{2}{x^2-9}+\frac{x+1}{x^2+6x+9}$

c) $\frac{8}{x^2-4}+\frac{x+4}{x+2}$ d) $\frac{x+5}{x^2-25}+\frac{x+2}{2x^2-6x-20}-\frac{21}{2x+2}$

Producto

Para multiplicar dos expresiones racionales procedemos en forma similar a como lo hacemos con los números racionales:

$$\boxed{\frac{a(x)}{b(x)}\cdot\frac{c(x)}{d(x)}=\frac{a(x).c(x)}{b(x).d(x)}}$$

Ejemplo:

Vamos a resolver y expresar como fracción irreducible la expresión:

$$\left(\frac{-x^2+4x}{x^2-9}\right)\cdot\left(\frac{5x+15}{x^3-4x^2}\right)$$

$$\left(\frac{-x^2+4x}{x^2-9}\right)\cdot\left(\frac{5x+15}{x^3-4x^2}\right)=\frac{(-x^2+4x).(5x+15)}{(x^2-9).(x^3-4x^2)}=\frac{-x\,(x-4).5\,(x+3)}{(x-3).(x+3).x^2\,(x-4)}=\boxed{\frac{-5}{x.(x-3)}}$$

División

Para dividir dos expresiones racionales multiplicamos la primera por la inversa de la segunda:

$$\boxed{\frac{a(x)}{b(x)}\cdot\frac{c(x)}{d(x)}=\frac{a(x)}{b(x)}\cdot\frac{d(x)}{c(x)}=\frac{a(x).d(x)}{b(x).c(x)}}$$

Ejemplo:

Calculemos $\frac{5\ x+10}{x^2-1}:\frac{3x+6}{x+1}$ expresando el resultado como fracción irreducible.

$$\frac{5\ x+10}{x^2-1}:\frac{3x+6}{x+1}=\frac{5\ x+10}{x^2-1}.\boxed{\frac{x+1}{3x+6}}=\frac{(5\ x+10)(x+1)}{(x^2-1)(3\ x+6)}=$$

$$=\frac{5\,(x+2)\,(x+1)}{(x\ -1)(x\ +1)\,3\,(x+2)}=\boxed{\frac{5}{3\ (x\ -1)}}$$

Ejercicio 169:

Resuelve los siguientes productos y divisiones entre expresiones racionales y expresa el resultado como fracción irreducible.

a) $\dfrac{x^2-16}{x^2}\cdot\dfrac{x^2-4x}{x^2-x-12}$ b) $\dfrac{x^2+5x+6}{3x-3}\cdot\dfrac{x^2-x}{x+2}$

c) $\dfrac{x^2-4}{x}:\dfrac{x-2}{x+4}$ d) $\dfrac{x^2-16}{x-1}:\dfrac{x^2+8x+16}{x-1}$

Raíz de una Expresión Racional

Definición   ***¡Para leer y recordar!***

Un número *a* es una ***raíz*** de una expresión racional

$$\frac{p(x)}{q(x)} \quad \text{si} \quad p(a) = 0 \quad \text{y} \quad q(a) \neq 0.$$

Es decir, las raíces de la expresión racional son los ceros del polinomio numerador que **NO** anulan al polinomio denominador.

Ejemplos:

a) $x = 0$ es raíz de la expresión racional $p(x) = \dfrac{2x}{x-2}$, puesto que, 0 es raíz del numerador y no anula al denominador.

b) $x = 5$ no es raíz de la expresión racional $q(x) = \dfrac{(x-5)^2}{x-5}$ aunque anule al numerador, ya que también anula al denominador.

Ecuaciones Racionales

¡Para leer y recordar!

Definición:

Dados dos polinomios *p(x)* y *q(x)*, donde *q(x)* no es el polinomio nulo,

Se denomina ***ecuación racional*** a toda expresión del tipo $\dfrac{p(x)}{q(x)} = 0$

- Resolver una ecuación racional implica encontrar las raíces de la expresión racional, es decir: aquellas raíces del numerador *p(x)* que no anulen al denominador *q(x).*

Para resolver ecuaciones de este tipo hay que tener la precaución de descartar aquellos valores que anulen los denominadores de las expresiones racionales involucradas.

Ejemplos:

Resolvamos las siguientes ecuaciones racionales:

a) $\frac{x^2 - 4}{5x^3} = 0$ Luego $x \neq 0$ pues este valor anula el denominador.

Por lo tanto, $x^2 - 4 = 0$ y las soluciones de la ecuación racional son $\begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = -2 \end{cases}$

b) $\frac{-x^2 + 4}{x^3 - 8} = 0$ Luego $x \neq 2$ pues este valor es raíz de $x^3 - 8$.

De esta manera $-x^2 + 4 = 0$ y las raíces del numerador son $\begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = -2 \end{cases}$

Por lo tanto, la única solución de la ecuación racional es $\boldsymbol{x = -2}$.

c) $\frac{2x+1}{x+3} = \frac{2x+2}{x-1}$ $x \neq -3$ y $x \neq 1$

$(2x + 1)(x - 1) = (2x + 2)(x + 3)$

$2x^2 - 2x + x - 1 = 2x^2 + 6x + 2x + 6$

$-x - 1 = 8x + 6$

$-7 = 9x$ Luego la solución de la ecuación racional es $x = -\frac{7}{9}$.

d) $\frac{x - 1}{x^2 - 1} = \frac{1}{x}$ $x \neq 0$, $x \neq 1$ y $x \neq -1$

$x(x - 1) = x^2 - 1$

$x = 1$ Luego, la ecuación **no tiene solución** *(¿Por qué?)*

Ejercicio 170:

Resuelve las siguientes ecuaciones racionales.

a) $\frac{2x-1}{3x+2} = 7$

b) $\frac{-2-7x}{4} + 1 = \frac{1-x}{5}$

c) $\frac{-2-4x}{3} = \frac{x-1}{4} + 5$

d) $\frac{2x+1}{x+3} = 1 + \frac{x+3}{x-1}$

e) $\frac{x+4}{x-4} - \frac{x-4}{x+4} = \frac{(2x)^2}{x^2-16}$

f) $\frac{x^2}{x+2} \cdot \frac{x^2-16}{x^3+4x^2} = 0$

g) $\frac{x}{x-1} + \frac{3}{x^2-1} = \frac{x^3+3}{x^3-1}$

h) $\frac{x^2+x-2}{x^2-4} - \frac{x+5}{x-2} = 0$

i) $\frac{x+10}{x-4} + \frac{2(x^2-4)}{x^2+4x+4} = 0$

j) $\frac{x^2+2x+4}{(x+2)^2} : \frac{x^3-8}{x^2-4} = 1$

GEOMETRÍA

Breve Introducción

La Geometría es una de las ramas más antiguas de la Matemática, la primera en desarrollarse como un cuerpo teórico ordenado, y este desarrollo fue luego tomado como referencia para el desarrollo de otras áreas matemáticas.
Así mismo, la Geometría desarrolló sus propias ramas: cada vez que las herramientas teóricas se mostraban insuficientes para resolver nuevos desafíos, distintos problemas prácticos motivaron el desarrollo de "nuevas geometrías".
Intentaremos en este módulo introducir el potencial de la Geometría para las aplicaciones, a la par de vislumbrar su importancia teórica.

Para precalentar: ¡Algunas ideas importantes!

Rectas Paralelas, Coincidentes y Secantes

Dos rectas en un mismo plano:

- Son ***secantes*** si y solo sí tienen un punto en común.

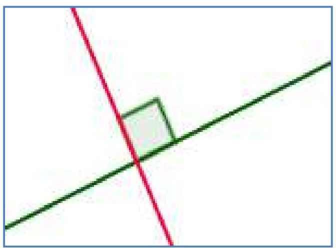
  También decimos "se intersectan" o "se cortan" en un punto.
- Son ***paralelas*** si no tienen ningún punto en común.
- Son ***coincidentes*** si tienen todos sus puntos en común.

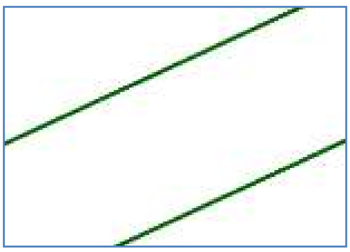
Rectas Perpendiculares y oblicuas

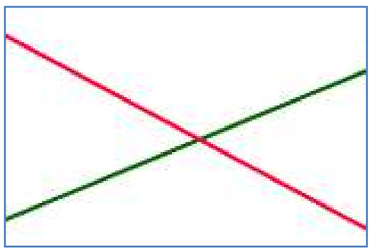
- Dos rectas secantes son ***perpendiculares***, si y sólo si forman entre sí un ángulo recto .
- Dos rectas secantes son ***oblicuas*** si no son perpendiculares.

Ejercicio 171:

a) Realiza un cuadro sinóptico con los conceptos recién expuestos.
b) En cada figura, identifica cuál par de rectas son: paralelas, perpendiculares y oblicuas.







.
…………………………………… …………………………………. ……………………………………

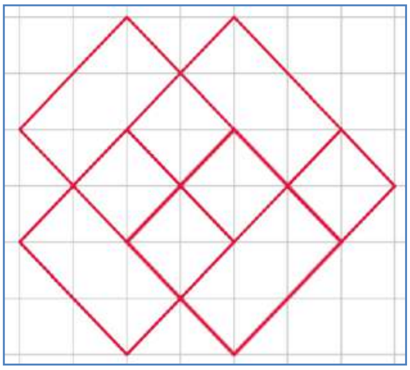
Ejercicio 172:
El siguiente plano corresponde al centro de la ciudad de La Plata.

Observándolo, indica:

a) Dos calles paralelas.
b) Dos calles oblicuas.
c) Dos calles perpendiculares.
d) Dos calles que forman un ángulo recto.
e) ¿Es verdadera la siguiente afirmación?
Justifica tu respuesta:

"La Diagonal 73 es perpendicular a la Calle 11".

Ejercicio 173
Observa atentamente la siguiente figura y responde:



a) ¿Cuántos pares de rectas distintas paralelas hay?
b) ¿Cuántos pares de rectas distintas perpendiculares hay?
c) ¿Cuántos cuadrados puedes contar?

Ejercicio 174
Con regla y compás, traza las rectas que se detallan:

1. Con la regla, traza una recta. Llámala **r**. Marca un punto cualquiera sobre **r**, llámalo **M**.

2. Apoya el compás en **M** y traza un arco que corte a **r** en dos puntos más. Llama a estos puntos **A** y **B**.
¿Qué puedes observar si comparas las *distancias* **AM** y **MB**?

3. Haciendo centro con el compás en **A**, realiza una marca sobre el arco, de la amplitud que desees. Sin modificar esta amplitud – es decir, sin cerrar o abrir más el compás – repite este paso pero haciendo centro en **B**. La idea es obtener dos marcas sobre el arco trazado en el paso anterior.

4. Nuevamente con la regla, une las dos marcas realizadas sobre el arco, y traza una segunda recta, Denomínala **p**. ¿Cómo son entre sí **r** y **p**?

Ejercicio 175: Sobre el gráfico realizado en el ejercicio 174, traza la tercera recta que se detalla:

1. Centrando el compás en **A**, toma una amplitud mayor a **AM**, pero no mayor a **B**.

2. Realiza una marca y repite el paso anterior centrando el compás en **B**, con la misma amplitud.

Busca que sendas marcas se intersecten – o "*se corten*" -. Llama **P** al punto de intersección así obtenido.

3. Con la regla, traza la recta que une a **M** y a **P**; llámala **q**. ¿Cómo son entre sí **r** y **q**?

¿Y si comparas **p** y **q**?

Ejercicio 176:

A partir de lo trabajado en los ejercicios 174 y 175 responde:

a) Si una recta es paralela a otra y ésta es paralela a una tercera,
¿Cómo son entre sí la primera y la tercera?

b) Si una recta es paralela a otra y ésta es perpendicular a una tercera,
¿Cómo son entre sí la primera y la tercera?

c) Si una recta es perpendicular a otra y ésta es paralela a una tercera,
¿Cómo son entre sí la primera y la tercera?

d) Si una recta es perpendicular a otra y ésta es perpendicular a una tercera,
¿Cómo son entre sí la primera y la tercera?

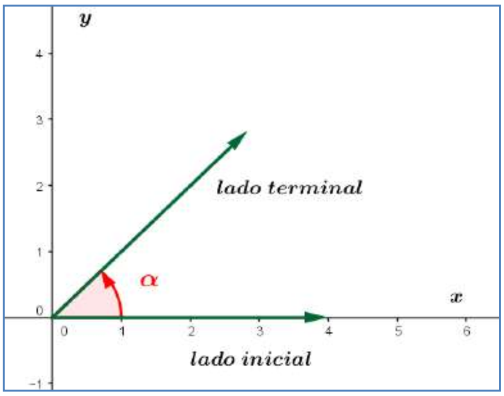
Los instrumentos por excelencia de la Geometría Clásica
son **la Regla y el Compás**.
Ambos derivan de la geometría egipcia, hecha con cuerdas.

La regla permite unir dos puntos, tal como los conectaríamos
al tender una cuerda desde un origen hasta una posición de destino.

El compás permite trazar circunferencias, tal como haríamos
fijando un extremo de una cuerda en lo que sería el centro,
y haciendo girar la cuerda extendida.

Con estos instrumentos se pueden realizar distintas construcciones,
además de trasladar elementos y figuras,
reemplazando la noción de movimiento en el plano.

Ángulos Orientados en el Plano Cartesiano



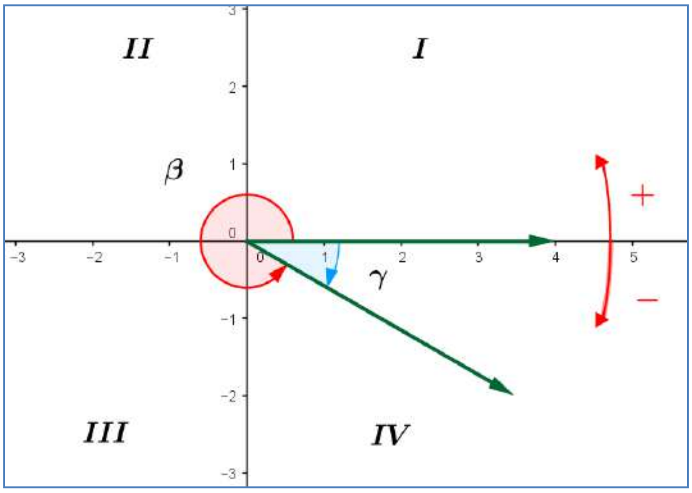
Así representamos ángulos en el plano cartesiano:

- El ángulo se centra en el origen de coordenadas: (0,0).
- Su lado inicial coincide con el eje de abscisas (eje x).
- La orientación puede ser en ***sentido anti horario*** como en el ejemplo que se ilustra, con ***signo positivo***;
- o bien el ángulo puede orientarse en ***sentido horario***, con ***signo negativo***.

Los ángulos se representan utilizando letras del Alfabeto Griego. Puedes verlas en el Apéndice.

Otra forma de representación de un ángulo es realizar una marca sobre la letra mayúscula que indica el origen del ángulo: $\hat{O}$

El plano cartesiano se divide en cuatro ***cuadrantes*** que suelen representarse con números romanos, como vemos en el gráfico siguiente, donde también se representan los dos sentidos posibles para orientar los ángulos :



Sistemas de Medición de Ángulos: El Sistema Sexagesimal

¡Para leer y recordar!

- La unidad de medida del sistema sexagesimal se obtiene dividiendo un ángulo recto (R) en 90 partes iguales, y tomando una de ellas.

- Esta unidad se denomina ***grado sexagesimal*** y se denota : **1 °.**

$$1\,° = \frac{1R}{90} \qquad 1R = 90°$$

- A su vez, un grado se subdivide en 60 partes iguales, y una de estas partes se denomina ***minuto***. Se denota : **1'** . Luego **1 ° = 60 '**

-Así mismo, un minuto se subdivide en 60 partes iguales; una de las cuales se denomina ***segundo***. Se denota : **1''.** Luego **1' = 60 ''.**

Ejercicio 177:

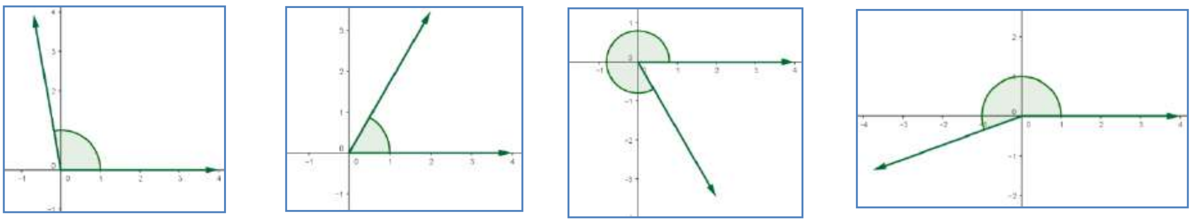
a) ¿A qué cuadrante pertenecen los siguientes ángulos?

300°, 192°, 93°, 180° 1', 150°, 35°.

b) Expresa en grados, minutos y segundos: 23,18° ; 107,03°.

Ejercicio 178:

Los ángulos dibujados miden 60°, 100°, 200° y 300°. Indica cuál es cada uno de ellos y el cuadrante al cual pertenece. ¿En qué sentido están orientados?



Ejercicio 179:

Indica cuáles de las siguientes afirmaciones referidas son falsas. Justifica.

a) Los lados terminales de α = 180° y de β° = 270°, son semirrectas opuestas.

b) α = - 100° pertenece al IV cuadrante.

c) Los lados terminales de α = 0° y de β° = 360°, son coincidentes.

d) 15 ° 24 ' = 924 '

e) 1 ° = 3600 ''

f) 132,5 ° = 132 ° 5 '

Sistemas de Medición de Ángulos: El Sistema Radial

¡Para leer y recordar!

- En el sistema radial la unidad de medida es el **radián**.

- Un ***radián*** es la amplitud del ángulo central que en una circunferencia determina un arco de la misma longitud que el radio. Se denota: **1 rad.**

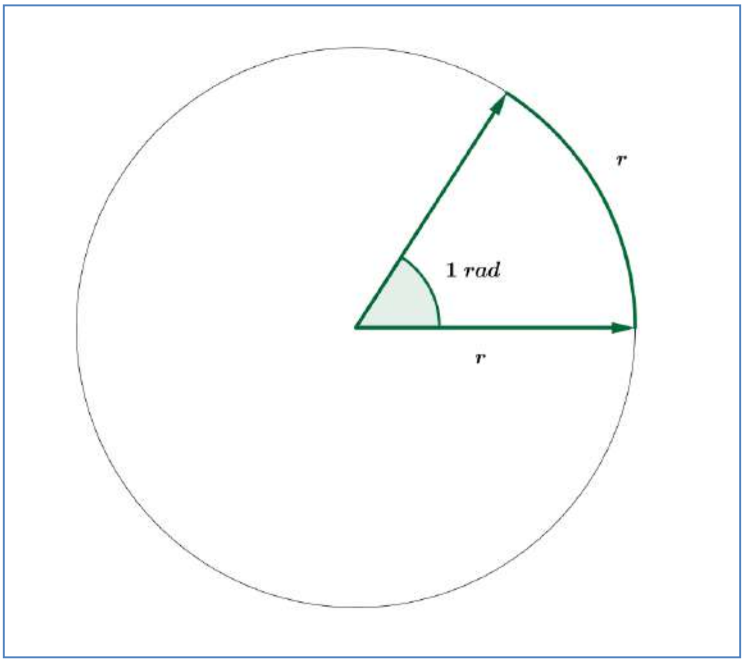
En el gráfico se ilustra el ángulo de 1 radián de amplitud.

En toda circunferencia,
el radio está comprendido
2 π veces en su longitud.

Entonces, un ángulo de un giro completo mide **2 π rad** .

… Es decir que:

$$\mathbf{360° = 2\,\pi\,rad}$$



He aquí la **equivalencia entre los sistemas sexagesimal y radial.**

Ejercicio 180:

a) ¿Cuántos grados mide un radián?

b) Completa la siguiente tabla:

Grados	**0**	30º			**90º**		135º	150º		240º	270º		**360º**
Radianes	**0**		$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$		$\frac{2}{3}\pi$			π			$\frac{5}{3}\pi$	**2 π**

Ejercicio 181:

a) Pasa a radianes las siguientes medidas: 25º 15 ’ , 31º 12’ 45”

b) Pasa las siguientes medidas a grados sexagesimales: 2,5 rad; 5π rad

Ejercicio 182:

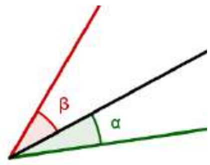
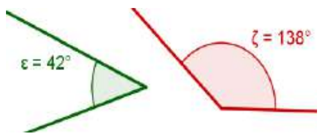
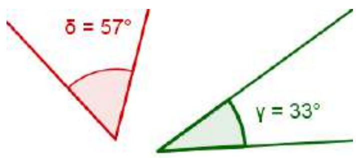
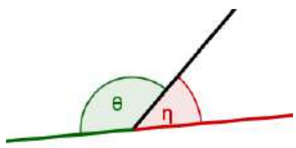
a) En una circunferencia de 10 cm de radio, un arco mide 6 cm. ¿Cuánto mide, en grados y en radianes, el ángulo correspondiente?

b) Un ángulo mide 3 radianes. Si dibujamos su arco tomando un radio de 5 cm, ¿Cuánto medirá dicho arco?

Relaciones entre Dos Ángulos

¡Para leer y recordar!

Dos ángulos son:

Consecutivos	Tienen un lado en común y ningún otro punto en común.	
Suplementarios	Su suma es un ángulo llano (180º) .	
Complementarios	Su suma es un ángulo recto (90º).	
Adyacentes	Tienen un lado en común y sus otros lados son semirrectas opuestas.	

Ejercicio 183:

Un ángulo llano está formado por dos semirrectas opuestas.

¿Es correcto entonces afirmar que dos ángulos adyacentes, son suplementarios? Justifica tu respuesta.

Ejercicio 184:

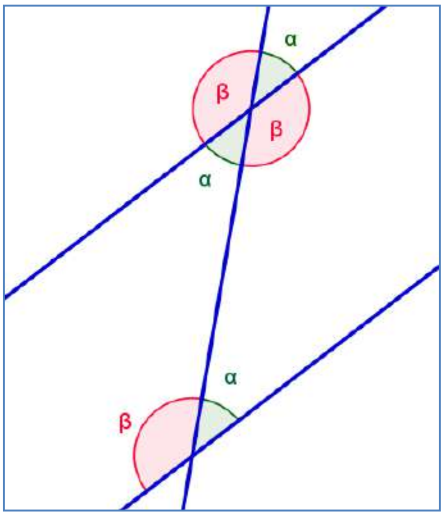
a) Determina dos ángulos suplementarios que se diferencien en 42º.

b) Determina dos ángulos complementarios sabiendo que un es siete veces más grande que el otro.

c) Determina dos ángulos complementarios que se diferencian en 15º.

Ángulos entre rectas paralelas

A partir del siguiente gráfico de dos rectas paralelas cortadas por una recta transversal, podemos observar las siguientes propiedades:



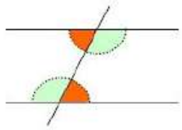
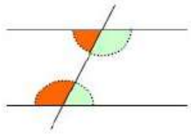
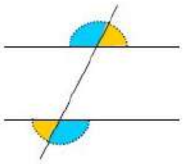
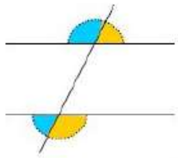
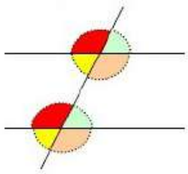
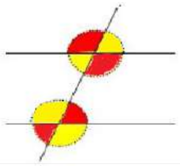
Los ángulos opuestos por el vértice, son iguales.

- La suma de dos ángulos diferentes es **180º.** Luego estos ángulos son suplementarios.

- La suma de todos los ángulos que se puedan delimitar tomando cualquier punto como vértice, es de **360º.**

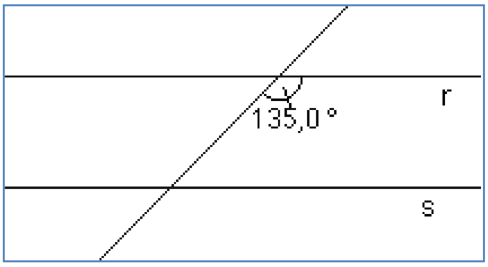
Se pueden representar los ángulos alternos internos entre paralelas, dibujando una letra Z.

En la siguiente tabla se definen los ángulos entre paralelas tomados de a pares, según su posición:

ALTERNOS INTERNOS Se ubican a los lados opuestos de la secante ENTRE las paralelas. 	**CONJUGADOS INTERNOS** Se ubican del mismo lado de la secante y ENTRE las paralelas. 
ALTERNOS EXTERNOS Se ubican a los lados opuestos de la secante FUERA de las paralelas. 	**CONJUGADOS EXTERNOS** Se ubican del mismo lado de la secante y FUERA de las paralelas. 
CORRESPONDIENTES Se ubican del mismo lado de la secante, uno es interno y otro externo. 	**OPUESTOS POR EL VÉRTICE** Se ubican a los lados opuestos de la secante. Uno es interno y otro externo. 

Ejercicio 185:

Las rectas **r**, **s** de la figura son paralelas.



a) Determina la amplitud de todos los ángulos.

b) Determina la suma de:

- Dos ángulos adyacentes ....
- Dos ángulos conjugados internos ....
- Dos ángulos conjugados externos ....

Ejercicio 186:

Observa el gráfico del ejercicio 185 y en función de lo trabajado en este ejercicio y de los apuntes teóricos de la página anterior, responde:

a) ¿Cuántas amplitudes diferentes de ángulos hay? ....

b) ¿Cuánto vale la suma de dos ángulos de diferente amplitud? ....

Ejercicio 187

Completa las líneas de puntos con “a veces”, “siempre” o “nunca”.

a) Los ángulos complementarios .... son iguales.

b) Los ángulos adyacentes .... son suplementarios.

c) Los ángulos suplementarios ………………………… son adyacentes.

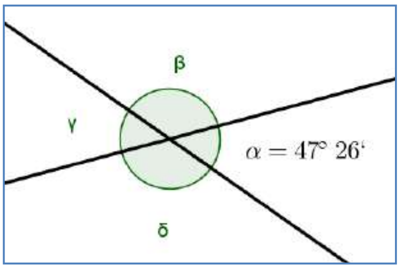
d) Los ángulos adyacentes ……………………………… son consecutivos.

e) Los ángulos adyacentes ……………………………… son complementarios.

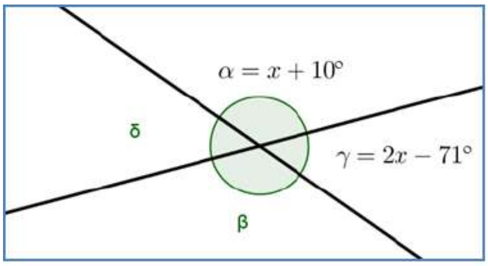
Ejercicio 188:

Calcula las medidas de los ángulos α, β, γ y δ.

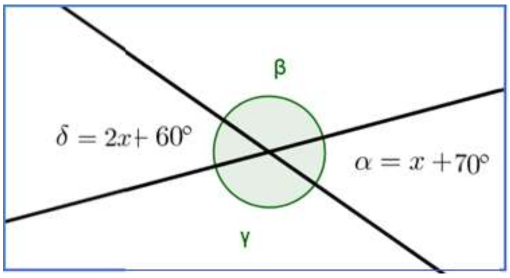
a)



b)



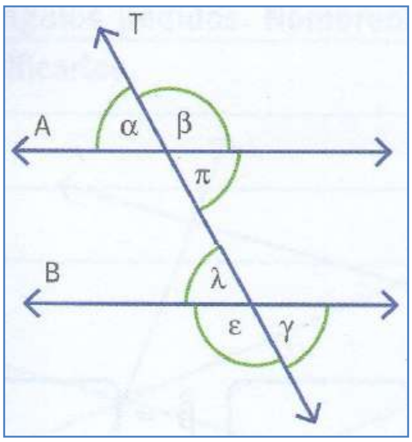
c)



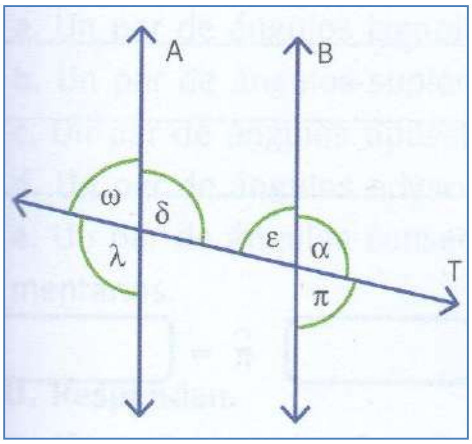
Ejercicio 189:

Calcula la medida de los ángulos teniendo en cuenta los datos, en cada caso.

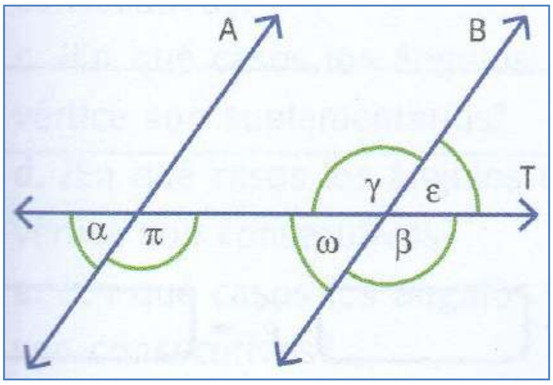
a) A // B y α= 47°



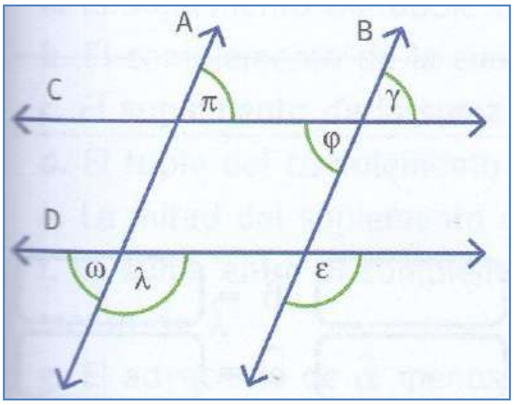
b) A // B y δ = 108° 26’



c) A // B y ε = 39° 52’



d) A // B , C // D y π = 56° 41’ 5”



Perímetro y Área

¡Para leer y recordar!

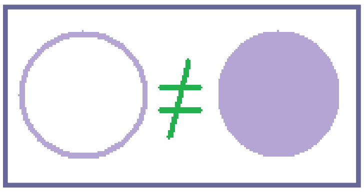
Definición:

- ***Perímetro*** es la medida del contorno de una superficie.
- ***Área*** es la medida de la superficie que delimita una figura cerrada.

Un ejemplo que ilustra estas dos definiciones, es la diferencia entre *Circunferencia* y *Círculo*:

La ***Circunferencia*** es el contorno de un círculo.

El perímetro de un círculo, es la medida de su circunferencia.



Circunferencia *Círculo*

¡NO son términos equivalentes!

Completa el espacio con la fórmula correspondiente:

Perímetro de la Circunferencia: ………………………

Por otra parte, el ***Círculo*** es la figura geométrica de limitada por una circunferencia.

Es decir, la circunferencia y su interior.

El área de un círculo es la medida de su superficie.

Completa el espacio con la fórmula correspondiente:

Área del Círculo: ……………………………

Ejercicio 190:

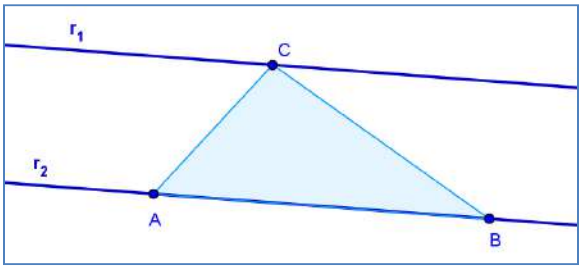
Dibuja en una hoja cuadriculada, tomando como unidad de área a un cuadradito y como unidad de perímetro a un lado de dicho cuadradito:

a) Tres figuras diferentes con igual área y diferente perímetro.
b) Tres figuras diferentes con igual perímetro y diferente área.
c) Tres figuras diferentes cuya área sea 8 u. a (unidades de área). Calcula sus perímetros.
d) Tres figuras diferentes cuyo perímetro sea 20 u. p (unidades de perímetro). Calcula sus áreas.

Ejercicio 191:

Tenemos el siguiente triángulo ABC construido sobre las rectas r_1 y r_2 .

Si r_1 y r_2 son paralelas, responde justificando tus respuestas:



a) ¿Qué ocurre con el área del triángulo ABC si movemos el punto A a lo largo de r_2?

b) ¿Y si movemos el punto C sobre r_1?

Ejercicio 192:

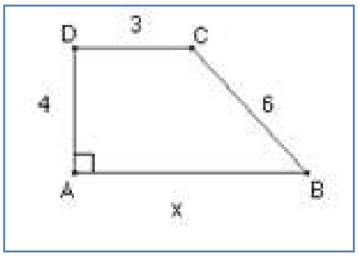
Responde si las siguientes afirmaciones son Verdadero o Falso. Justifica las respuestas falsas.

a) Si disminuye la altura de un rectángulo, entonces también disminuye su perímetro.
b) Un paralelogramo tiene un lado que mide 3 cm y otro que mide 6 cm. Su área es imposible de calcular con estos datos.
c) Un cuadrado de perímetro igual a 24 cm, tiene un área de 24 cm^2.
d) Se dibuja un rombo con su diagonal mayor que mide 8 cm, y su lado que mide 5 cm. El perímetro de la figura es de 40 cm.
e) Se tiene un primer rectángulo de base igual a 15 m y de altura igual a 6 m, y un segundo rectángulo cuya base es disminuye en 3 m y su altura aumenta en 3 m con respecto al primero. Entonces el área del segundo rectángulo es la misma que el área del primero.

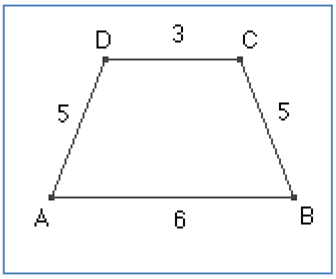
Ejercicio 193:

Dados los siguientes trapecios, calcula en cada caso lo requerido.

a) Trapecio Rectángulo. Halla su área y su perímetro.



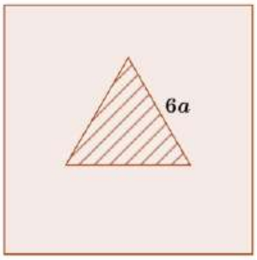
b) Trapecio Isósceles. Halla su área y su altura.



Ejercicio 194:

El cuadrado y el triángulo equilátero de la figura, verifican la siguiente relación:

"El perímetro del triángulo es igual a las tres octavas partes del perímetro del cuadrado".

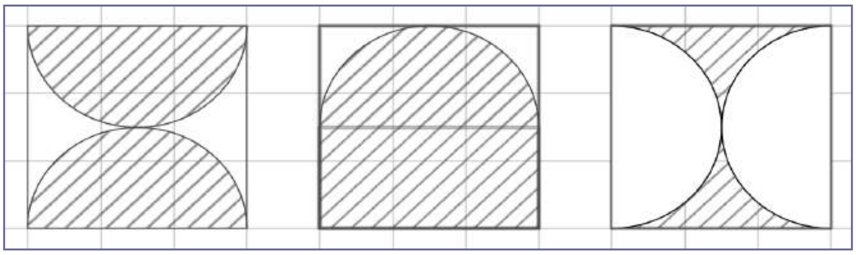


a) Escribe la expresión del perímetro del cuadrado en relación a a.

b) Si el perímetro del cuadrado es de 120 cm, indica cuántos cm miden el lado del triángulo y el lado del cuadrado, respectivamente.

Ejercicio 195:

Calcula el perímetro y el área de las siguientes figuras rayadas, en función del radio **r** del círculo.



Ejercicio 196:

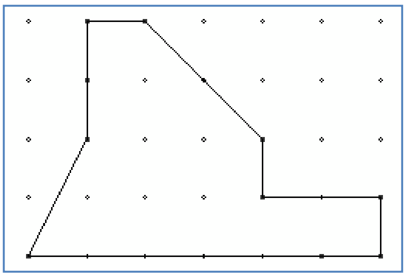
¿Existe alguna circunferencia cuya longitud, medida en cm, sea igual al área de su círculo, medida en cm^2?

Realiza el planteo y resuelve la ecuación resultante.

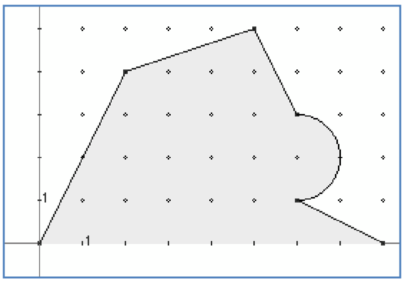
Ejercicio 197:

En cada caso, halla el área y el perímetro de cada figura compuesta, descomponiendo la misma en figuras más sencillas. Toma como unidad de referencia que un lado de la cuadrícula = 1 cm.

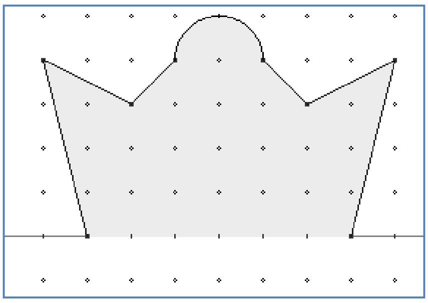
a)



b)



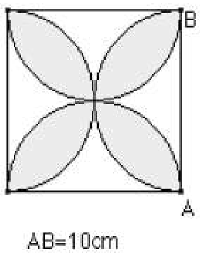
c)



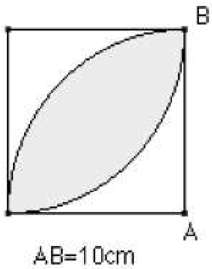
<u>Ejercicio 198</u>:

Calcula en cada caso, el ***área*** y el ***perímetro*** de la figura sombreada.

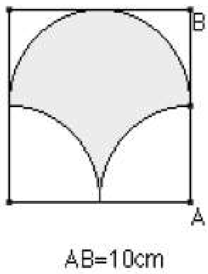
a)



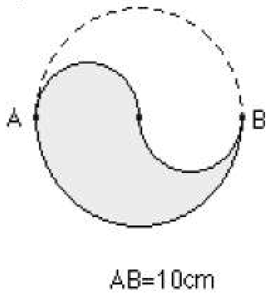
b)



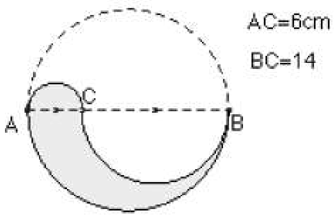
c)



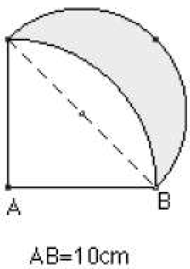
d)



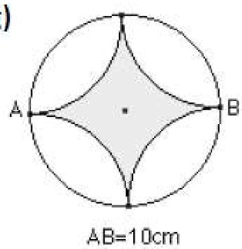
e)



f)



g)



Ángulos interiores de un triángulo

Pensemos en un triángulo cualquiera y en sus ángulos interiores.

Intuitivamente es claro lo que sigue (*por qué?*):

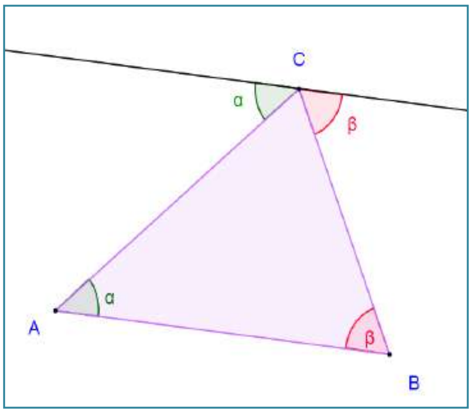
- Ninguno de los ángulos interiores puede medir 180º
- Tampoco es posible que dos de estos ángulos midan 90º

… ¿Qué podemos decir de los tres ángulos? :

En todo triángulo, la suma de los ángulos interiores es igual a 180º.

… La demostración se deduce a partir de la siguiente figura. ¿La razonamos juntos?

-Trazamos la paralela al lado AB que pasa por C.



- Aplicamos la "regla de la Z" y podemos ver dos pares de ángulos alternos internos: α y β.

- A su vez, α y β son dos de los ángulos interiores del triángulo ABC. Entonces mirando sobre C:

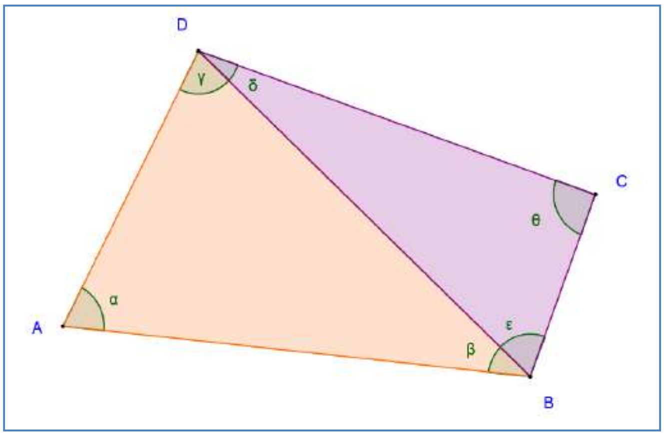
¡vemos que la propiedad se cumple!

… y así hemos demostrado nuestro primer teorema.

Ejercicio 199:

Observa el siguiente gráfico y completa lo indicado.

Consideremos un cuadrilátero cualquiera ABCD y dividámoslo en dos triángulos.



Sabemos que en el triángulo ABD, la suma de sus ángulos interiores $\alpha + \beta + \gamma =$.................. (1)

La suma de ángulos interiores del triángulo BCD: ………………… (2)

Sumando los resultados (1) y (2), obtenemos: ……………………………………

Concluimos que:

En todo cuadrilátero, la suma de los ángulos interiores es igual a ………

Ejercicio 200:

En un paralelogramo, la suma entre la mitad de uno de sus ángulos y la tercera parte de otro, no opuesto con el primero, es igual a 79º.

¿Cuál es la amplitud de los ángulos interiores del paralelogramo?

a) Representa gráficamente el enunciado construyendo un paralelogramo cualquiera.

b) Llama x a uno de los ángulos del enunciado, e y al otro. Escribe la ecuación a partir de:

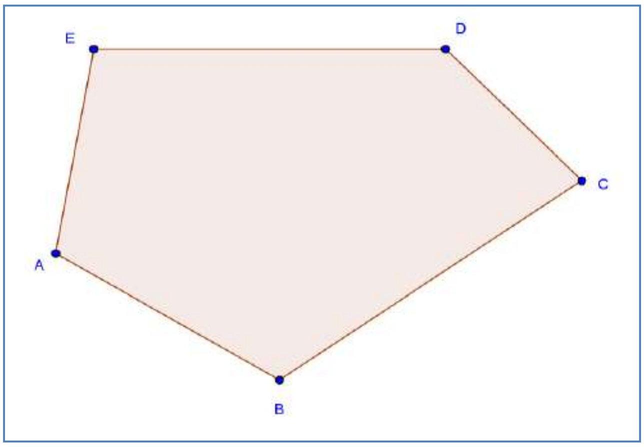
La suma entre la mitad de uno de sus ángulos y la tercera parte de otro (…) es igual a 79º.

c) Este problema tiene dos incógnitas. En base al trabajo realizado en el ejercicio 196, propone la segunda ecuación necesaria para resolverlo.

d) Ahora has logrado escribir el sistema de dos ecuaciones lineales que el enunciado requiere. Resuelve este sistema y encuentra la amplitud de los ángulos.

Ejercicio 201:

Elige uno de los vértices del siguiente pentágono ABCDE y a partir de él descompone la figura en triángulos. Repite el procedimiento realizado en el ejercicio 199 y determina cuánto vale la suma de los ángulos interiores de un pentágono.



Ejercicio 202:

Observa tu trabajo realizado para determinar los ángulos interiores del triángulo, el cuadrilátero y el pentágono.

a) Registra en la tabla cuántos vértices tiene, en cuántos triángulos fue representado, y el valor de la suma de los ángulos interiores de cada polígono.

	Nº de vértices	**Nº de triángulos**	**Suma de los ángulos interiores**
Triángulo			
Cuadrilátero			
Pentágono			

b) Observando esta información, encuentra una expresión para la suma de los ángulos interiores de un polígono cualquiera, en relación al número de vértices **n**.

Verifica que la misma se cumpla para otros polígonos con más lados.

Razones y Proporciones

¡Para leer y recordar!

Definición :

- Una *razón* es el cociente indicado entre dos cantidades.
- La razón entre dos cantidades a y b , con b$\neq 0$ y se indica $\frac{a}{b}$.
- Por ejemplo, la razón entre 2 y 5 es $\frac{2}{5}$

Ejercicio 203:
Completa el cuadro.

Lenguaje Coloquial	***Razón***
De cada ….. familias que tienen televisión, ….. están abonadas al cable.	$\frac{5}{8}$
En una ciudad, 32 de cada 50 alumnos del nivel inicial concurren a escuelas públicas.	
En una provincia, para las elecciones de presidente del 2015, no concurrieron a votar …… de cada …….. electores.	$\frac{16}{100}$
En una escuela, cuatro de cada doce alumnos aprobaron todas las evaluaciones del primer trimestre.	

¡Para leer y recordar!

Definición :

- Una *proporción* es la igualdad entre dos razones.
- En símbolos: $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ donde b y c no pueden ser nulos (escribimos: $b\ \neq 0,\ d \neq 0$)
- De la definición surge la siguiente ***propiedad***: $a.d = b.c$

Ejercicio 204:

Jésica y Ximena encontraron el siguiente desafío en una revista de acertijos y crucigramas, e intentaron resolverlo:

"Escriban tres proporciones distintas con los números 3, 5, 12 y 20".

Jésica escribió: $\frac{3}{5}=\frac{12}{20}\frac{5}{3}=\frac{12}{20}\frac{20}{5}=\frac{12}{3}$

Ximena escribió: $\frac{5}{3}=\frac{20}{12}\frac{3}{12}=\frac{5}{20}\frac{3}{5}=\frac{20}{12}$

¿Son correctas todas las proporciones que escribieron las chicas? ¿Por qué?

Ejercicio 205:

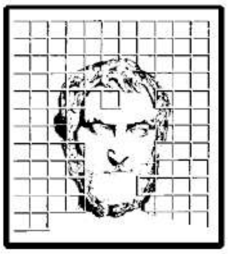
El perímetro de un triángulo ABC es igual a 30 cm. Además, se pueden establecer las siguientes proporciones entre sus lados:

$$\frac{a}{18\ cm} = \frac{b}{15\ cm} = \frac{c}{12\ cm}$$

¿Cuánto miden los lados a, b, y c?

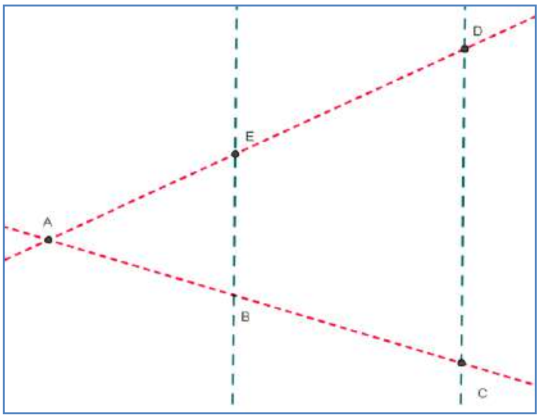
El Teorema de Thales

Si varias rectas paralelas son cortadas por dos rectas transversales, entonces los segmentos correspondientes entre cada recta transversal resultan ser proporcionales.



Thales (640 – 550 a.C) fue un comerciante de la ciudad de Mileto (Grecia) que se dedicó a estudiar filosofía y matemática. Logró aportes teóricos que hicieron de la Geometría una ciencia, y no sólo una herramienta para contar o medir.

El siguiente gráfico muestra la situación que describe el enunciado del teorema.



Las rectas BE y CD son **paralelas**.

Estas rectas son cortadas por otras dos rectas llamadas transversales

Este teorema enuncia que los segmentos formados de manera correspondiente entre cada paralela, son ***proporcionales***.

Es decir:

$$\frac{\boldsymbol{AB}}{\boldsymbol{BC}} = \frac{\boldsymbol{AE}}{\boldsymbol{ED}}$$

Ejercicio 206:

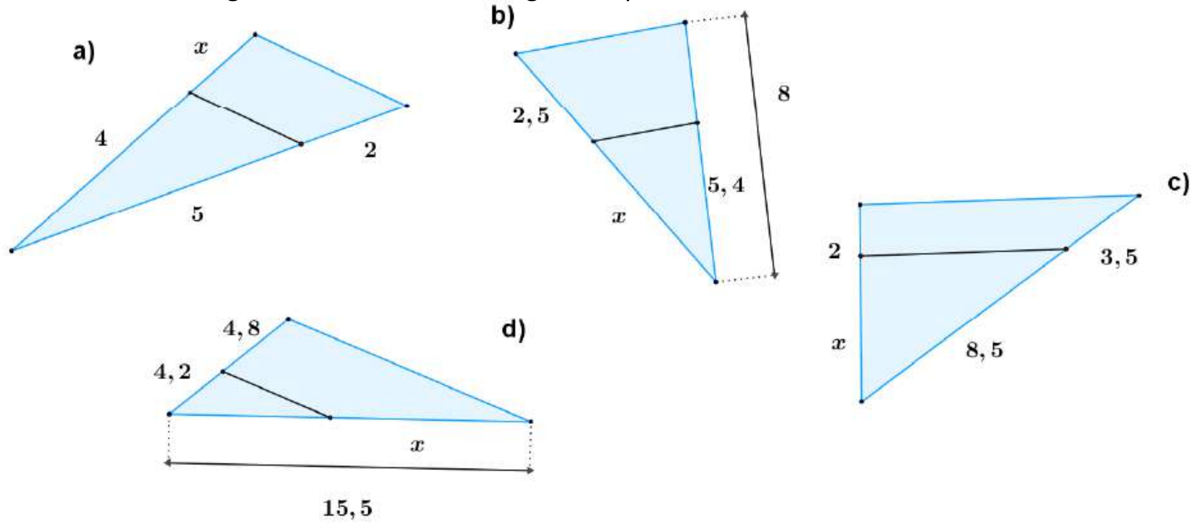
Teniendo en cuenta el gráfico anterior, y sabiendo que:

AB = 15 cm BC = 5 cm AE = x + 15 cm ED = x

Aplica el teorema de Thales para conocer cuánto miden los segmentos AE y ED.

Ejercicio 207:

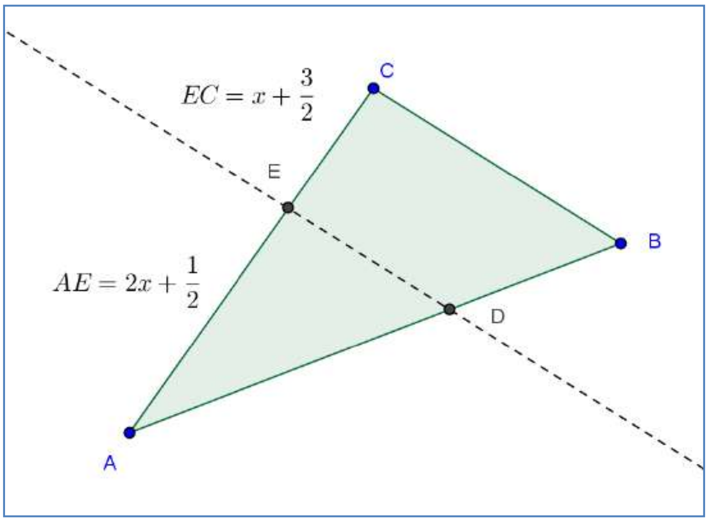
En cada uno de los triángulos se ha trazado un segmento paralelo a uno de sus lados. Halla el valor de **x**.



Ejercicio 208:

Teniendo en cuenta los datos de la figura, y sabiendo que la recta ED es paralela a BC,

AB = 16 cm, y DB = 9 cm, calcula las medidas de los segmentos AE y EC.



Triángulos Semejantes

Definición: ***¡Para leer y recordar!***

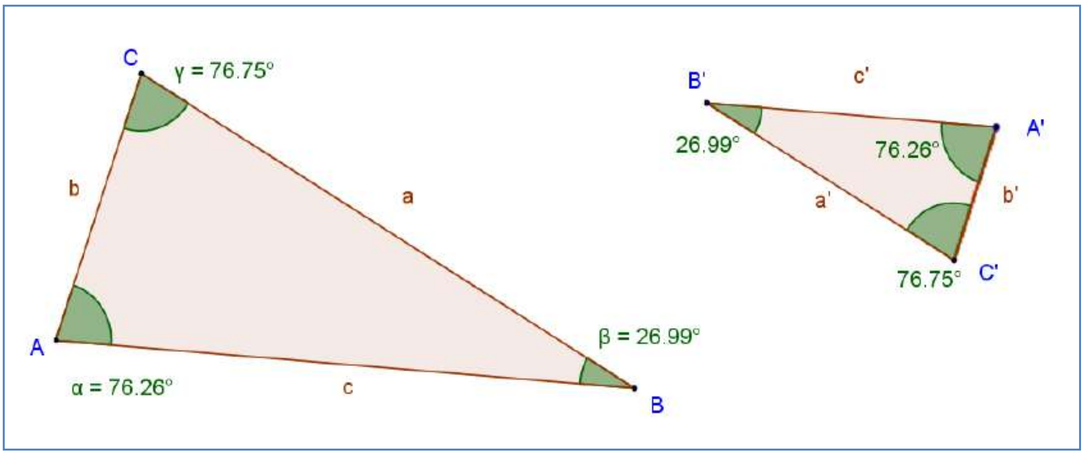
Dos triángulos son *semejantes* cuando:

- Sus lados respectivos son proporcionales, y

- Los ángulos que forman pares de lados proporcionales, son iguales.

Los pares de lados proporcionales entre sí se denominan **homólogos**.

Dados dos triángulos semejantes, no es posible “moverlos” para que uno coincida con el otro, pero podemos pensar que uno es un *modelo a escala* del otro.



En el ejemplo que se ilustra, la proporción que se establece entre los respectivos lados de cada triángulo es la siguiente:

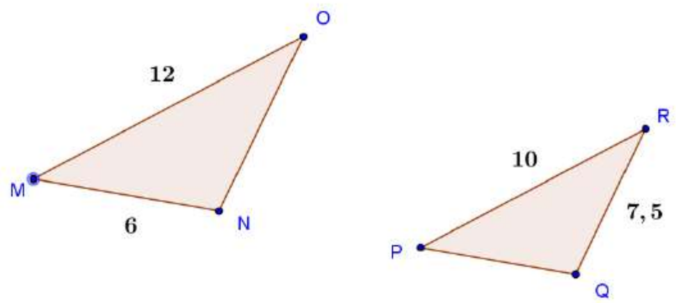
$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$$

… donde (*a, a'*); (*b, b'*) y (*c, c'*) son pares de lados homólogos, y los ángulos formados por pares de lados homólogos, son iguales.

Ejercicio 209:

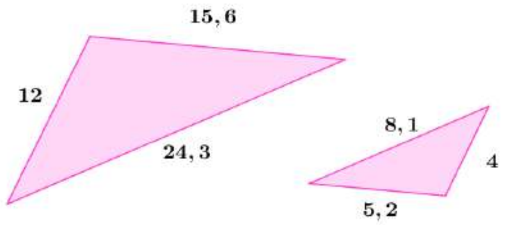
Los triángulos MNO y PQR son semejantes. OM y RP son homólogos.

a) Indica las medidas de los lados NO y PQ.
b) Comprueba si la razón entre los perímetros de los triángulos es igual a la razón entre los lados homólogos.

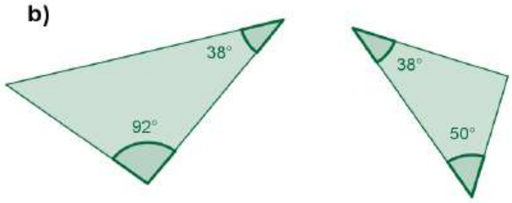


Ejercicio 210: En cada caso, considera la información dada para determinar si los pares de triángulos son semejantes. Justifica tu respuesta.

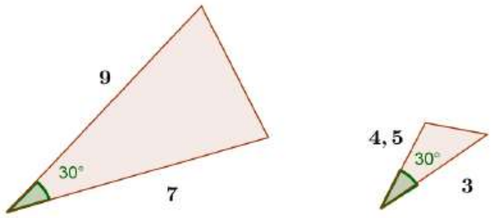
a)



b)



c)



Criterios de Semejanza de Triángulos

Para poder asegurar que dos triángulos son semejantes, basta con que se cumplan algunas condiciones específicas:

¡Para leer y recordar!

Criterio Ángulo – Ángulo – Ángulo (A – A – A)

Si dos triángulos ABC y A'B'C' tienen dos ángulos iguales ($\hat{A}$ con $\widehat{A}'$, $\hat{B}$ con $\widehat{B}'$), entonces el ángulo C es igual al ángulo $\widehat{C}'$ y los triángulos son semejantes.

Criterio Lado – Lado – Lado (L – L – L)

Si los lados de los triángulos ABC y A'B'C' son proporcionales: $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$

entonces los triángulos son semejantes.

Criterio Lado – Ángulo – Lado (L – A – L)

Si dos lados de los triángulos ABC y A'B'C' son proporcionales, es decir: $\frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$

y los ángulos $\hat{A}$ y $\widehat{A}'$ comprendidos entre ellos son iguales, entonces los triángulos son semejantes.

Ejercicio 211:

Sean los triángulos ABC y A'B'C'. Sabemos que $\begin{matrix} a = 4\ cm & a' = 6\ cm \\ b = 6\ cm & b' = 9\ cm \\ c = 8\ cm & c' = 12\ cm \end{matrix}$

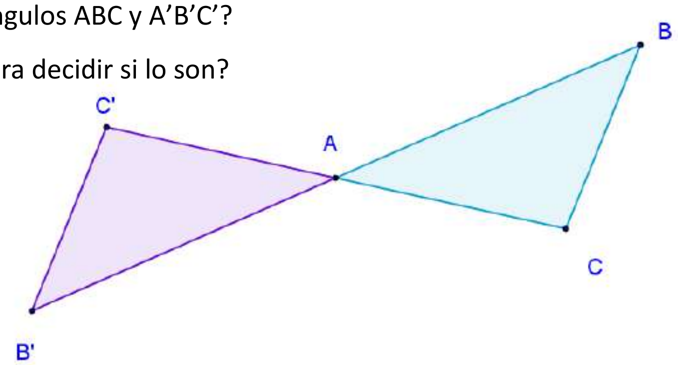
¿Son semejantes? ¿Qué criterio se aplica para decidir si lo son?

Ejercicio 212:

En la siguiente figura, se sabe que $\overline{AB} = \overline{AB'}$ y que $\overline{AC} = \overline{AC'}$.

¿Son semejantes los triángulos ABC y A'B'C'?

¿Qué criterio se aplica para decidir si lo son?



El Triángulo Rectángulo

Así se denomina a todo triángulo cuyo uno de sus ángulos interiores es recto.

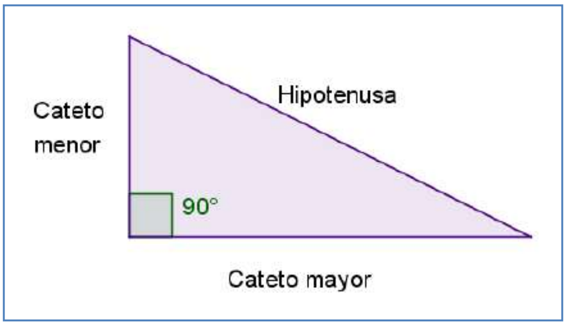
También sus lados reciben nombres especiales.

Los lados que forman el ángulo recto

son llamados ***catetos***,

y el lado opuesto al ángulo recto

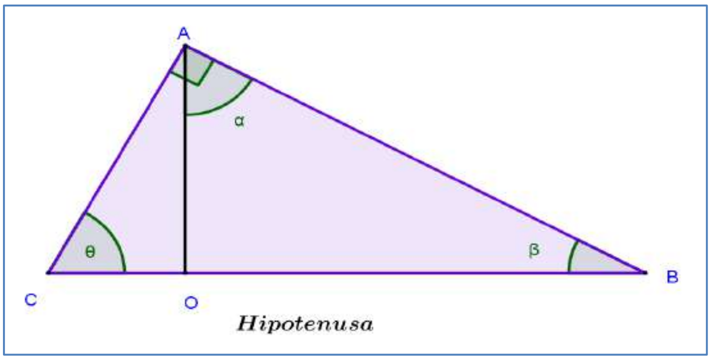
se llama ***hipotenusa***.



Triángulos Rectángulos y Semejanza

Si en un triángulo rectángulo ABC trazamos la recta que es perpendicular a la hipotenusa

y que pasa por el vértice opuesto, quedan determinados dos nuevos triángulos rectángulos AOB y AOC:



Los tres triángulos AOB, AOC y ABC tienen un ángulo recto. Por lo tanto, si logramos demostrar que tienen otro ángulo igual, podremos aplicar el criterio A – A – A y asegurar que son semejantes.

- Los triángulos ABC y AOC tienen el ángulo θ en común.
- Los triángulos ABC y AOB tienen el ángulo β en común.
- Además, en el triángulo AOB : $\alpha + \beta = 90\,°$ y en el triángulo ABC : $\beta + \theta = 90\,°$

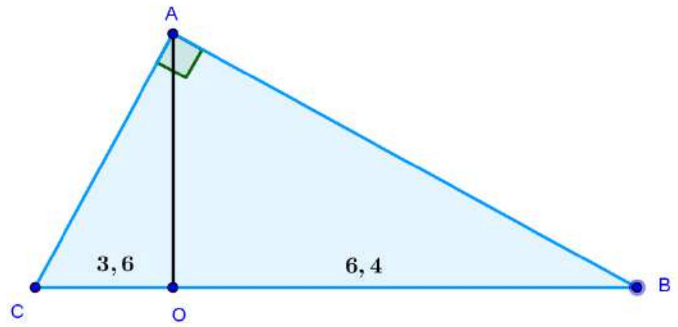
  … Por lo tanto $\alpha = \theta$,

  y por el criterio A – A – A, **los triángulos AOB, AOC y ABC son semejantes,**

  y $\dfrac{\overline{\mathbf{CO}}}{\overline{\mathbf{AO}}} = \dfrac{\overline{\mathbf{AO}}}{\overline{\mathbf{OB}}} = \dfrac{\overline{\mathbf{AC}}}{\overline{\mathbf{AB}}}$ **pues estos lados forman respectivamente los ángulos de 90** °.

<u>Ejercicio 213</u>:

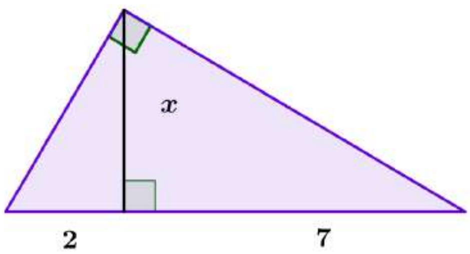
El triángulo ABC es rectángulo en el vértice A, y $\overline{\text{AO}}$ es perpendicular a la hipotenusa. Calcula la medida de $\overline{\text{AO}}$.



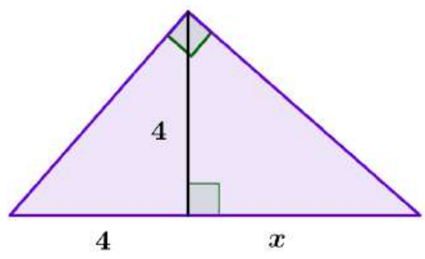
<u>Ejercicio 214</u>

En los siguientes triángulos rectángulos, halla en cada caso el valor de x.

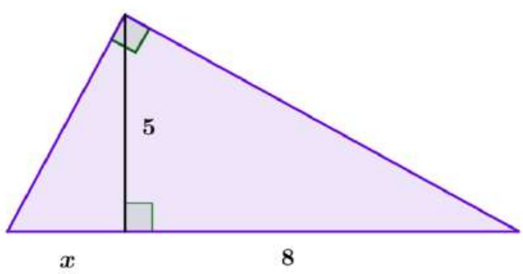
a)



b)



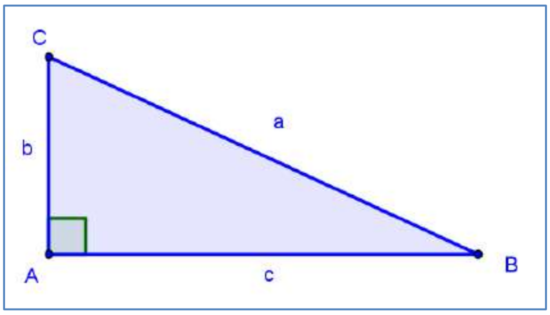
c)



El Teorema de Pitágoras

Este teorema enuncia una relación entre las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo. Si llamamos ***a*** a la longitud de la hipotenusa, y **b** y **c** a la longitud de los catetos, tenemos que:

$$a^2 = b^2 + c^2$$



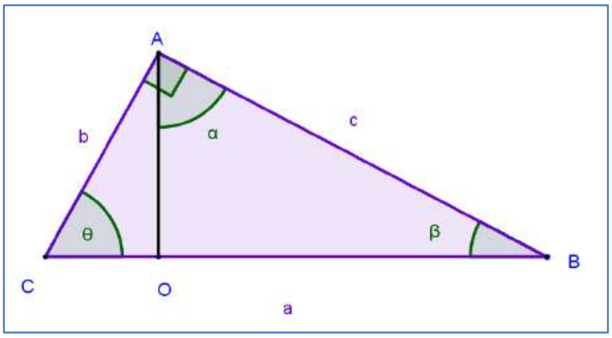
Hay diversas demostraciones de este teorema. Aquí presentamos una que aplica lo que se ha trabajado en relación a los triángulos rectángulos semejantes:

Recuperando el gráfico realizado en el anterior apartado, observa las siguientes equivalencias para las denominaciones de los lados de los triángulos:

$\overline{\mathbf{BC}} = \overline{\mathbf{CO}} + \overline{\mathbf{OB}} = \mathbf{a}$ es la hipotenusa

$\overline{\mathbf{AC}} = \mathbf{b}$ es el cateto menor

$\overline{\mathbf{AB}} = \mathbf{c}$ es el cateto mayor



Ya se ha mostrado que los triángulos ABC, AOC y AOB son rectángulos y semejantes.

Tomando los triángulos ABC y AOC, y mirando los lados que respectivamente forman el ángulo θ:

$$\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}} = \frac{\mathbf{b}}{\overline{\mathbf{CO}}} \quad \text{entonces} \quad \mathbf{a}.(\overline{\mathbf{CO}}) = \mathbf{b}^2 (1)$$

Tomando los triángulos ABC y AOB, y mirando los lados que respectivamente forman el ángulo β:

$$\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{c}} = \frac{\mathbf{c}}{\overline{\mathbf{OB}}} \quad \text{entonces} \quad \mathbf{a}.(\overline{\mathbf{OB}}) = \mathbf{c}^2 \qquad (2)$$

Si ahora sumamos miembro a miembro, las igualdades 1 y 2 : (1) + (2)

$$\mathbf{a}.(\overline{\mathbf{CO}}) + \mathbf{a}.(\overline{\mathbf{OB}}) = \mathbf{b}^2 + \mathbf{c}^2$$

$$\mathbf{a}.(\overline{\mathbf{CO}} + \overline{\mathbf{OB}}) = \mathbf{b}^2 + \mathbf{c}^2$$

$$\mathbf{a}.\mathbf{a} = \mathbf{b}^2 + \mathbf{c}^2$$

$$a^2 = \mathbf{b}^2 + \mathbf{c}^2$$

…¡ y así demostramos el Teorema de Pitágoras!

El **teorema de Pitágoras** establece que en todo triángulo rectángulo el cuadrado de la longitud de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de las respectivas longitudes de los catetos.

También se verifica el r**ecíproco del teorema de Pitágoras:**

Si en un triángulo, el cuadrado de uno de los lados es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados, entonces el triángulo es rectángulo.

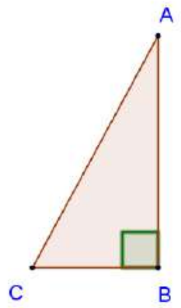
Ejercicio 215:

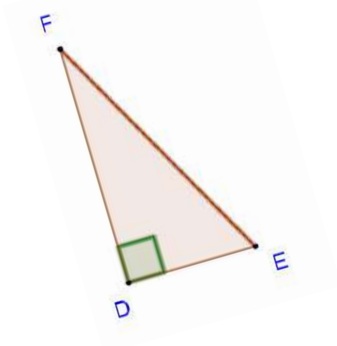
i) Identifica en cada triángulo la hipotenusa y los catetos.

ii) Calcula el valor de los lados que faltan en cada triángulo.

iii) Halla el perímetro y el área de cada triángulo.

a) Datos: $\overline{AC}$ = 8 cm; $\overline{AB}$= 6 cm b) Datos : $\overline{DF}$ = 12 cm ; $\overline{EF}$ = 13 cm





Ejercicio 216:

Completa la tabla siguiente, donde **a**, **b** y **c** son las medidas de los lados un triángulo ABC, y en particular **a** es la medida del lado mayor.

a	b	c	¿Es ABC un triángulo rectángulo?
10	8	4	
13	5		sí
	8	15	sí
25	7		sí

Ejercicio 217:

Una escalera de 2,5 m de longitud está apoyada en una pared, separada en 1,5 m del zócalo. Llega a una altura de 1,8 m.

a) Grafica la situación planteada.

b) ¿Fue la pared construida en escuadra? Es decir: ¿Forman la pared y el piso un ángulo recto?

Ejercicio 218:

Si se sabe que uno de los lados de un rectángulo mide 3 dm y su diagonal 6,5dm, calcula el perímetro y el área del rectángulo. Expresa el resultado en cm y cm^2.

Ejercicio 219:

Calcula:

a) El área de un triángulo isósceles de 26 cm de perímetro, cuya base mide 6 cm.

b) El perímetro de un trapecio isósceles de 18,75 cm^2 de área, cuyas bases menor y mayor miden 4 cm y 8,5 cm respectivamente.

Ejercicio 220:

El área de un rectángulo es de20cm^2 y un lado mide 0,10 m. Calcula el perímetro y la diagonal del rectángulo en cm.

Ejercicio 221:

El área de un trapecio isósceles es de20cm^2y las bases miden 7 cm y 3 cm.

Calcula la altura y el perímetro del trapecio.

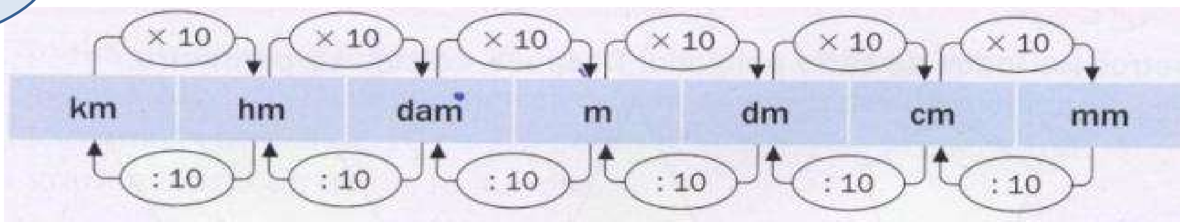
Ejercicio 222:

Se tiene un rombo cuya diagonal mayor mide 300 cm y su diagonal menor, 2,5 m.

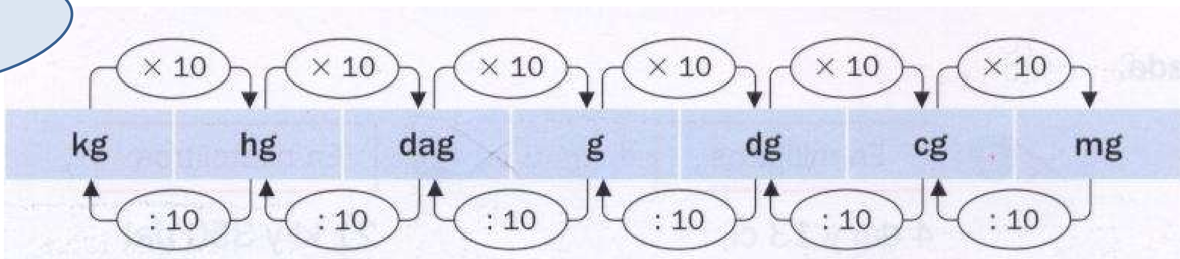
Calcula su perímetro expresado en m.

APÉNDICE A – Unidades de Medida

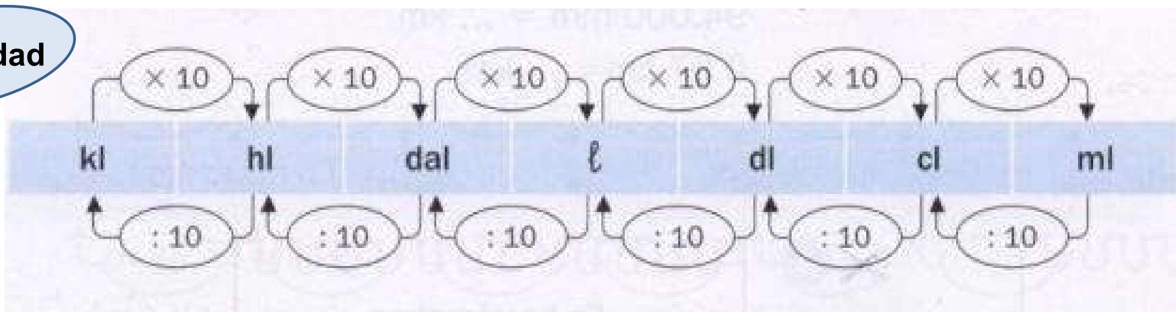
Longitud



Peso

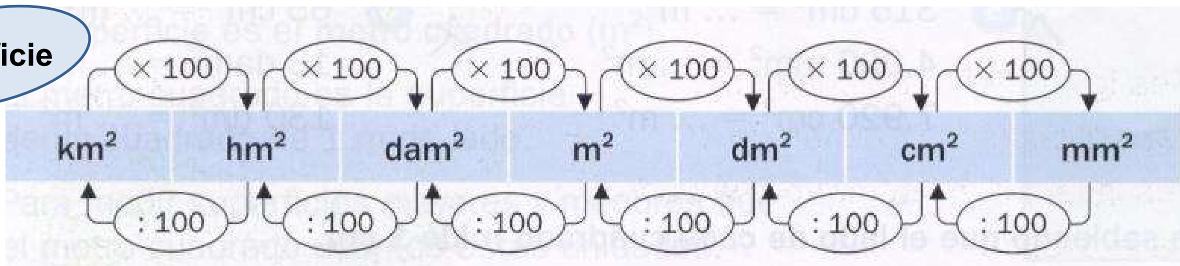


Capacidad



NOTA 1 l = 1 dcm^3

Superficie



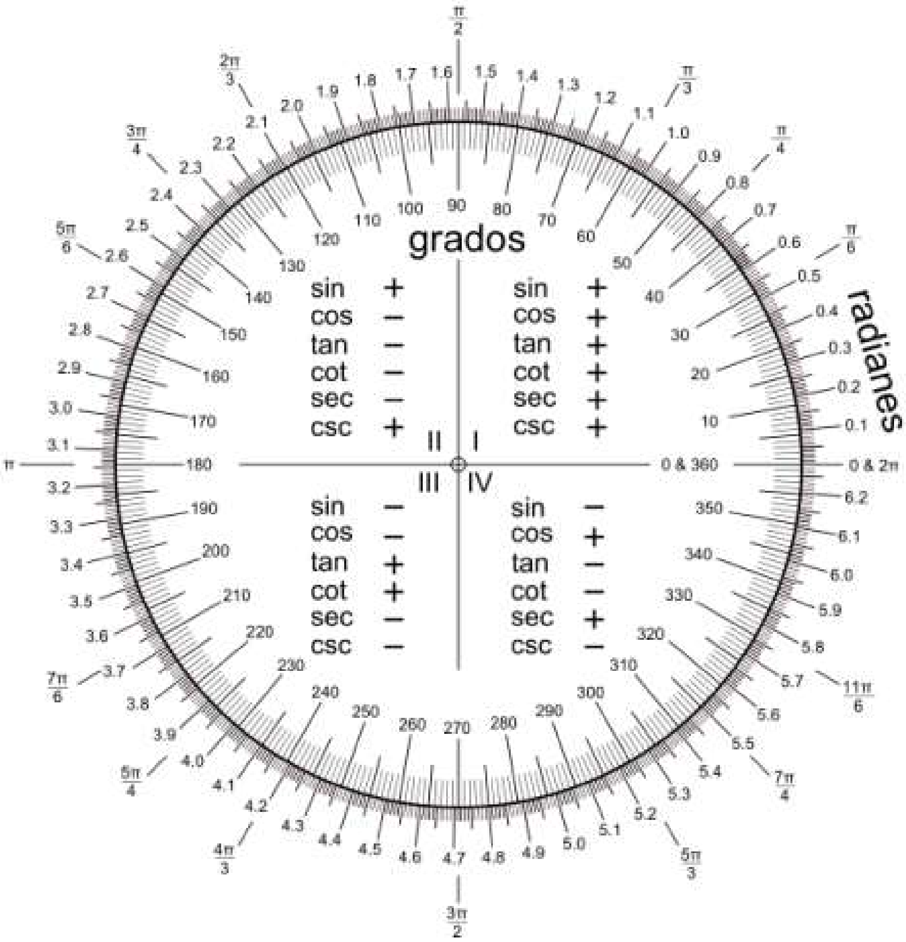
NOTA 1 hectárea = 1 hm^2

APÉNDICE B – Medición de Ángulos – Sistemas Sexagesimal y Radial

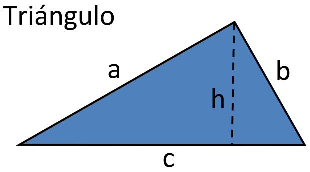
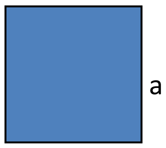
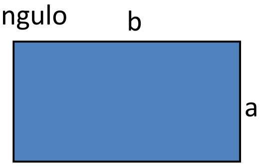
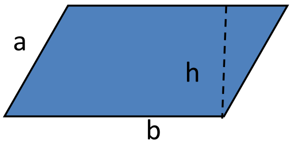
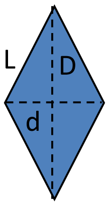
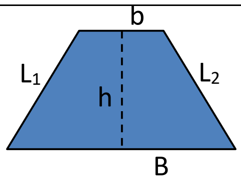
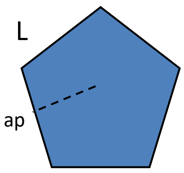
MEDIDAS DE ÁNGULOS			Equivalencias
Unidad	grado	$1° = \frac{1\ llano}{180}$	$1° = 60' = 3600''$
Submúltiplos	minutos	$1' = \frac{1°}{60}$	$1' = \left(\frac{1}{60}\right)^{o} = 60''$
	segundos	$1'' = \frac{1'}{60}$	$1''=\left(\frac{1}{3600}\right)^{o} = \left(\frac{1}{60}\right)'$

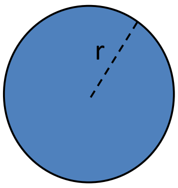
Relaciones de equivalencias entre los dos sistemas:

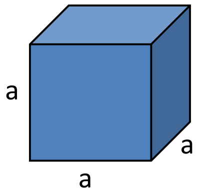
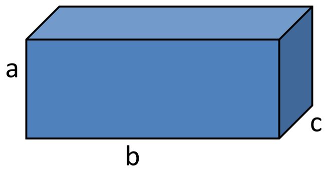
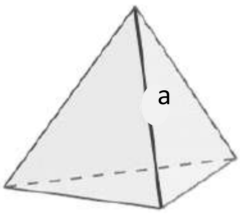
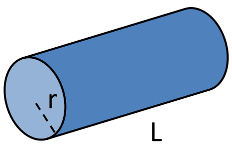
$$1 \text{ giro} = 2\pi \text{ rad} = 360°$$
$$1 \text{ llano} = \pi \text{ rad} = 180°$$
$$1 \text{ recto} = \frac{\pi}{2} \text{ rad} = 90°$$

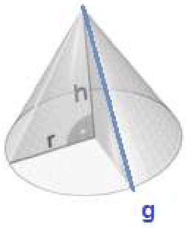
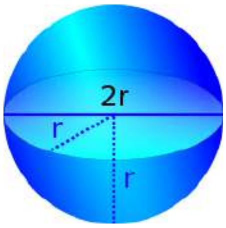


APÉNDICE C – Fórmulas de Perímetros, Áreas y Volúmenes más usadas

Figura	Perímetro	Área
Triángulo  	$P = a + b + c$	$A = \frac{h\,c}{2}$
Cuadrado  	$P = 4\,a$	$A = a^2$
Rectángulo  	$P = 2\,a + 2\,b$	$A = a\;b$
Paralelogramo  	$P = 2\,a + 2\,b$	$A = h\,b$
Rombo  	$P = 4\,L$	$A = \frac{D\,d}{2}$
Trapecio  	$P = B + b + L_1 + L_2$	$A = \frac{(B+b)}{2}\,h$
Polígono regular de n lados  (ap) : apotema	$P = n\,L$	$A = \frac{n\,L}{2}(ap)$

Circunferencia y Círculo  	$P = 2\pi\, r$ (circunferencia)	$A = \pi\, r^2$ (círculo)

Cuerpo Geométrico	**Área**	**Volumen**
Cubo  	$A = 6\, a^2$	$V = a^3$
Paralelepípedo  	$A = 2ab + 2bc + 2ac$	$V = a\, b\, c$
Tetraedro Regular  	$A = \sqrt{3}a^2$	$V = \frac{\sqrt{2}}{12}a^3$
Cilindro  	$A = 2\,\pi\, r^2 + 2\,\pi\, r\, L$ (con tapa) $A = \pi\, r^2 + 2\,\pi\, r\, L$ (sin tapa)	$V = \pi\, r^2\, L$

Cono 	A =π rg + π r ^{2}	$V = \frac{1}{3}\pi r^2$ h
Esfera 	A = 4π r ^{2}	$V = \frac{4}{3}\pi r^3$

APÉNDICE D – Aproximación y Redondeo

Al operar con números decimales de muchas cifras, se emplean valores aproximados.

La **aproximación por defecto** es cuando el cálculo aproximado es menor que el número dado.

La **aproximación por exceso** es cuando el cálculo aproximado es mayor que el número dado.

Ejemplo:$\sqrt{7} \cong 2.6457513110645905905016157536393$

Aproximación por defecto: $2.6457 < \sqrt{7}$

Aproximación por exceso:$2.646 > \sqrt{7}$

El **redondeo** consiste en **aumentar en una unidad** la última cifra conservada siempre que la primera omitida sea **mayor o igual que 5**.

APÉNDICE E – Notación Científica

Para expresar un número en **NOTACIÓN CIENTÍFICA** se lo debe escribir de la siguiente forma **N 10^n**, donde **N** es un número real de una sola cifra entera distinta de cero y **n** es un número entero

La notación científica permite captar rápidamente el **orden de magnitud** de una cantidad por medio del exponente **n**.

N EXP n

N EXP n +/- si **n** es un número negativo

Ejemplos:

- Edad de la Tierra:
  4 000 000 000 años = 4 10^{9} años   4 EXP 9

- Diámetro del núcleo de un átomo:
  0,000 000 000 000 003 m = 3 10^{-15} m   3 EXP 15 +/-

APÉNDICE F – Porcentajes

Los porcentajes son fracciones de denominador 100.

También se pueden pensar como decimales.

Un porcentaje **p**, se escribe **p %**.

$$\underbrace{\frac{50}{100} = \frac{1}{2}}_{\text{como fracción}} = \underbrace{0{,}5}_{\text{como decimal}} = \underbrace{50\ \%}_{\text{como porcentaje}}$$

Ejemplo: ¿qué porcentaje de 25 es 20?

Tener un porcentaje de algo significa que tienes ese porcentaje de cada 100.

Se puede establecer una proporción para descubrir qué porcentaje de 25necesitamos tomar para obtener 20.

$$\frac{\text{porcentaje}}{100} = \frac{20}{25}$$

$$\frac{\text{porcentaje}}{100} = \frac{4}{5}$$

$$\text{porcentaje} = \frac{4}{5} * 100$$

$$\mathbf{porcentaje} = \mathbf{80}\ \%$$

APENDICE G - Cifras significativas de un número.

Son aquellas que tienen un significado real y, por tanto, aportan alguna información. Toda medición experimental es inexacta y se debe expresar con sus cifras significativas.

Ejemplo: Medimos la longitud de una hoja de papel con una regla graduada en milímetros. El resultado se puede expresar de la siguiente manera:

Longitud (L) = 29,7cm

No es esta la única forma de expresar el resultado, pues también puede ser:

L = 0,297 m L = 2,97 dm L = 297 mm

Se exprese como se exprese el resultado tiene tres cifras significativas, que son los dígitos considerados como ciertos en la medida.

Cumplen con la definición pues tienen un significado real y aportan información.

Un resultado como L = 0,2970 m no tiene sentido ya que el instrumento que hemos utilizado para medir no es capaz de resolver las diezmilésimas de metro.

Por tanto, y siguiendo con el ejemplo, el número que expresa la cantidad en la medida tiene tres cifras significativas.

Pero, de esas tres cifras sabemos que dos son verdaderas y una es **incierta**:

L = 0,29$\underline{7}$ m

La incertidumbre de la última cifra también se puede poner de manifiesto si realizamos una misma medida con dos instrumentos diferentes, en nuestro caso dos reglas milimetradas. No hay dos reglas iguales y, por tanto, cada instrumento puede aportar una medida diferente.

La última cifra de la medida de nuestro ejemplo es significativa pero incierta, la forma más correcta de indicarlo (asumiendo por ahora que la incertidumbre es de ±1 mm), es L = 0,297 ± 0,001 m

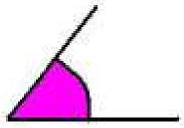
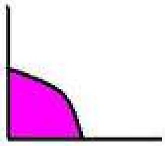
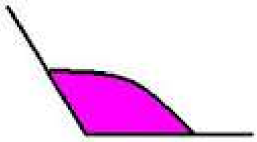
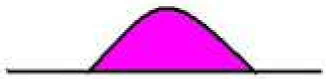
El llamado convenio de cifras significativas que asume que “**cuando un número se expresa con sus cifras significativas, la última cifra es siempre incierta”.**

APÉNDICE H – Alfabeto Griego

Α	α	alpha	Ι	ι	iota	Ρ	ρ	rho
Β	β	beta	Κ	κ	kappa	Σ	σ	sigma
Γ	γ	gamma	Λ	λ	lambda	Τ	τ	tau
Ε	ε	epsilon	Μ	μ	mu	Υ	υ	upsilon
Δ	δ	delta	Ν	ν	nu	Φ	φ	phi
Ζ	ζ	zeta	Ξ	ξ	xi	Χ	χ	chi
Η	η	eta	Ο	ο	omicron	Ψ	ψ	psi
Θ	θ	theta	Π	π	pi	Ω	ω	omega

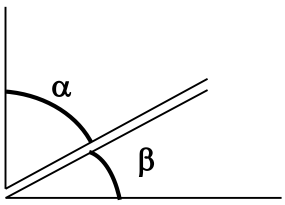
I– Clasificación de Ángulos

Según su amplitud

Nombre	Figura	Amplitud en radianes
Agudo		$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$
Recto		$\theta = \frac{\pi}{2}$
Obtuso		$\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$
Llano		$\theta = \pi$

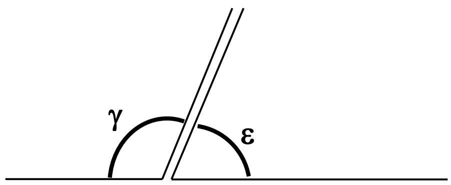
Según su suma

ANGULOS COMPLEMENTARIOS



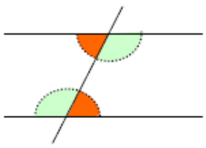
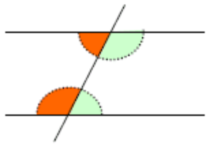
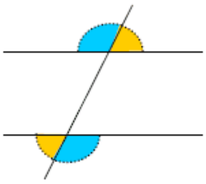
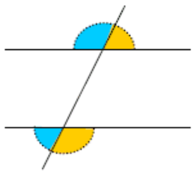
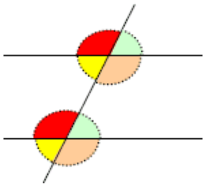
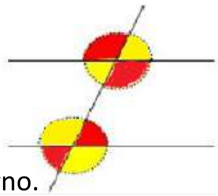
$\alpha + \beta = 90º$

ANGULOS SUPLEMENTARIOS

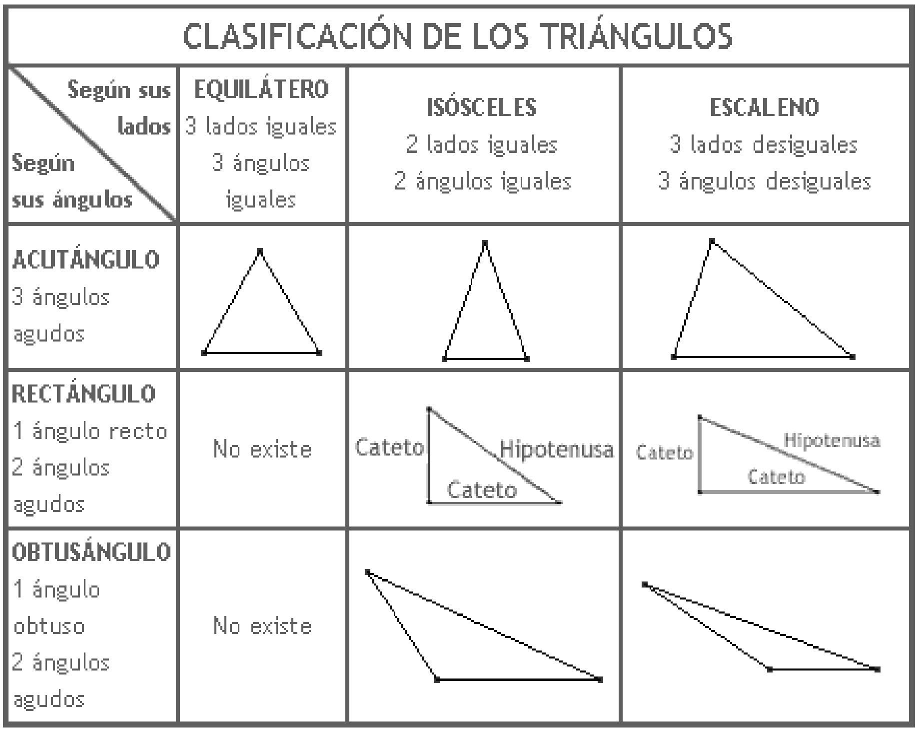


$\gamma + \varepsilon = 180º$

APÉNDICE J– Ángulos entre paralelas

ÁNGULOS IGUALES		ÁNGULOS SUPLEMENTARIOS	
ALTERNOS INTERNOS Se ubican a los lados opuestos de la secante ENTRE las paralelas		**CONJUGADOS INTERNOS** Se ubican del mismo lado de la secante y ENTRE las paralelas	
ALTERNOS EXTERNOS Se ubican a los lados opuestos de la secante FUERA de las paralelas		**CONJUGADOS EXTERNOS** Se ubican del mismo lado de la secante y FUERA de las paralelas	
CORRESPONDIENTES Se ubican del mismo lado de la secante, uno es interno y otro externo		**OPUESTOS POR EL VÉRTICE** Se ubican a los lados opuestos de la secante. Uno es interno y otro externo.	

APÉNDICE K - Clasificación de Triángulos



CLASIFICACIÓN DE LOS TRIÁNGULOS			
Según sus lados / Según sus ángulos	EQUILÁTERO 3 lados iguales 3 ángulos iguales	ISÓSCELES 2 lados iguales 2 ángulos iguales	ESCALENO 3 lados desiguales 3 ángulos desiguales
ACUTÁNGULO 3 ángulos agudos			
RECTÁNGULO 1 ángulo recto 2 ángulos agudos	No existe	Cateto, Hipotenusa, Cateto	Cateto, Hipotenusa, Cateto
OBTUSÁNGULO 1 ángulo obtuso 2 ángulos agudos	No existe		

APÉNDICE L– Demostraciones en Matemática

Las demostraciones en Matemática parten de

- **Axiomas:** Afirmaciones iniciales que se aceptan como bases.
- Un conjunto de axiomas que no entran mutuamente en contradicción, forma un **sistema axiomático.**

A partir de un sistema axiomático se construyen las demostraciones, las cuales derivan en diferentes *resultados*:

- **Proposición:** Resultado intermedio y relativamente inmediato – de sencilla demostración -, con cierta importancia en sí mismo.
  Puede ser una consecuencia directa de una definición, que conviene escribirpara referirnos a ella cuando la necesitemos.
- **Teorema:** Resultado importante, no tan inmediato como una Proposición.
- **Lema**: Resultado auxiliar, paso en una demostración de un teorema, pero que conviene aislar porque se repite en las demostraciones de

  distintos teoremas.
- **Corolario**: Resultado que se demuestra de inmediato a partir de la aplicación de un Teorema. Suele ser un caso particular de una situación mucho más amplia, que conviene aislar por alguna razón.

APÉNDICE M - Razones e Identidades Trigonométricas

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE ALGUNOS ÁNGULOS.					
	0º	**30º**	**45º**	**60º**	**90º**
sen	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
cos	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0
tg	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$	$\pm\infty$