# FACULTAD DE CIENCIAS SOCIALES
# DEPARTAMENTO DE ECONOMÍA

## DIPLOMA EN ECONOMÍA PARA NO ECONOMISTAS

### ASIGNATURA: MATEMÁTICA APLICADA A LA ECONOMÍA

### MATERIAL DE CONSULTA Y CASOS PRÁCTICOS

**CURSO 2004**
**PARTE I**

**Profesor: David Glejberman**

## INTRODUCCIÓN

Las notas que siguen han sido preparadas para el Profesor de Matemática Aplicada a la Economía[1] para ser utilizadas por los cursillistas como material de consulta alternativo de los textos recomendados en la bibliografía. Estas notas difieren del contenido de los clásicos textos de Matemática porque no se ocupan los fundamentos de la ciencia ni de su construcción mediante métodos lógico-deductivos. Como el curso es de matemática aplicada, el mismo no se ocupa de demostrar propiedades y teoremas, sino de aplicar estos resultados para la resolución de problemas relevantes de la ciencia económica.

Con ese objeto en estas notas se repasan diversos capítulos del análisis y del álgebra que los cursillistas conocieron en la enseñanza media y en las carreras universitarias de grado. Se hace especial hincapié en el álgebra matricial, el estudio de funciones, la interpretación de la de la derivada, el cálculo integral, las funciones de varias variables y los métodos de optimización.

Entre las aplicaciones a la Economía que se presentan en el curso cabe mencionar la matriz de insumo-producto, la determinación del valor de las cuotas para cancelar una deuda pactada a interés compuesto, la elasticidad de la demanda, la clasificación de productos como complementarios o competitivos, la asignación óptima del presupuesto entre los factores de la producción, la minimización del costo de producción, la maximización de la utilidad sujeta a restricciones presupuestarias, entre otras.

Los ejercicios y casos prácticos han sido seleccionados de forma de contemplar todos los temas del programa; se han depurado en ocasión de los sucesivos cursos y complementado con los ejercicios propuestos en las últimas pruebas de examen. Estos casos prácticos tienen el propósito de mostrar las aplicaciones a la Economía así como ejercitar a los cursillistas en el uso de los conceptos del álgebra y el análisis y sus reglas operatorias.

De esta forma se espera que los alumnos adquieran familiaridad con el instrumental matemático para lograr un buen aprovechamiento en las siguientes asignaturas del Diploma, y eventualmente de la Maestría, tales como Micro y Macroeconomía, Estadística y Econometría.

---

[1] Matemática Aplicada a la Economía es una asignatura del curso de posgrado Diploma en Economía organizado por el Departamento de Economía de la Facultad de Ciencias Sociales, Universidad de la República.

## PROGRAMA DEL CURSO

1. Teoría de conjuntos.
2. Relaciones y funciones.
3. Conjuntos numéricos. Operaciones con números y sus propiedades.
4. Polinomios y expresiones algebraicas.
5. Ecuaciones. Sistemas de ecuaciones lineales.
6. Inecuaciones.
7. Matrices y determinantes.
8. Espacios vectoriales.
9. Valores y vectores propios. Diagonalización.
10. Funciones de una variable. Gráficas de funciones elementales.
    Operaciones con funciones. Función inversa y función compuesta.
11. Límites y continuidad de funciones.
12. Derivación y diferenciación. Interpretación geométrica de la derivada.
    Representación gráfica de funciones. Monotonía, extremos y concavidades.
13. Elasticidad.
14. Primitivas. Integrales indefinidas.
15. Integrales definidas. Integrales impropias.
16. Funciones de varias variables. Gráfico. Límites, continuidad.
17. Derivadas parciales, diferenciación, vector gradiente.
18. Elasticidad parcial.
19. Conjuntos convexos. Funciones convexas.
20. Extremos en funciones de varias variables.
21. Optimización con restricciones: Lagrange, Kuhn-Tucker.
22. Integrales definidas múltiples.

## BIBLIOGRAFÍA


- Repartidos teóricos y prácticos del Profesor del curso.
- “Matemática para el Análisis Económico” – SYDSAETER y HAMMOND
- “Métodos fundamentales de economía matemática” – CHIANG
- “Matemáticas para Administración, Economía, Ciencias Sociales y de la Vida”
  HAEUSSLER & PAUL (Prentice Hall)

# 1. TEORÍA DE CONJUNTOS

Los conceptos de ***conjunto*** y ***elemento*** de un conjunto pueden aceptarse como *primitivos*, en el sentido que no requieren de una definición precisa para manejarlos y operar con ellos. Conviene sí recordar algunas ideas sobre los conjuntos.

- Un conjunto queda bien definido cuando se conoce cuáles elementos le pertenecen. La noción de ***pertenencia*** también es *primitiva*.
- Los elementos de un conjunto pueden ser muy diversos y no necesariamente han de tener características comunes, como intuitivamente puede pensarse. Sin embargo, es frecuente que las ciencias se refieran a conjuntos de elementos con características comunes: la Sociología refiere a conjuntos humanos organizados en sociedad, la Botánica trabaja con conjuntos de plantas, la Psicología con individuos o pequeños grupos humanos y la Estadística estudia las características de ciertas poblaciones o ***universos*** que no son otra cosa que conjuntos de elementos que poseen una o más características medibles. En Matemática, los elementos que conforman un conjunto no tienen por qué tener características comunes. Un conjunto puede estar formado por los siguientes tres elementos: mi reloj, mi nombre y el pizarrón del salón de clase. Obsérvese que el conjunto queda bien definido al mencionar todos los elementos que lo componen. Pero los conjuntos más interesantes –sobre todo desde el punto de vista estadístico– son los que permiten encontrar relaciones entre sus elementos, formando clases o subconjuntos.
- En Matemática los conjuntos no tienen elementos repetidos. Esta aclaración es relevante porque en Estadística los conjuntos pueden contener elementos repetidos.
- En Matemática el orden de los elementos de un conjunto es irrelevante. Si dos conjuntos tienen los mismos elementos, entonces ambos conjuntos son iguales, sin importar el orden en que se presentan sus elementos.
- En la historia de la Matemática, la formalización de la teoría de conjuntos es muy posterior en el tiempo a la formalización del concepto de número. La teoría de conjuntos es de fines del siglo XIX y su principal exponente fue el alemán J. Cantor[2]. La teoría de números fue desarrollada por varias de las antiguas culturas (griega, china, maya, egipcia) algunos siglos antes de Cristo.
- El pastor de ovejas en la Grecia antigua no sabe contar, pero cada vez que saca las ovejas del corral para llevarlas a pastar, coloca una piedra en su morral. Cuando vuelve con las ovejas, por cada una que ingresa al corral el pastor tira una piedra. Así, si en el morral quedan piedras, sabe que se le han perdido ovejas. El pastor establece una relación biunívoca entre dos conjuntos, piedras y ovejas, para resolver su problema de conteo. ¡Y no sabe contar, pues no conoce los números!

Los conjuntos suelen denominarse en Matemática mediante las letras de nuestro alfabeto, en mayúscula: A, B, C, etc. Los elementos se simbolizan con las mismas letras, pero en minúscula. El símbolo $\in$ indica pertenencia. Así, "$a \in C$" indica que el elemento "a" *pertenece* al conjunto C, mientras que la expresión "$b \notin A$" indica que el elemento "b" *no pertenece* al conjunto A.

Se denomina *conjunto vacío* a un conjunto que no tiene elementos, y se lo simboliza con la letra mayúscula griega $\phi$.

---

[2] George Cantor nació en San Petersburgo en 1845 y falleció en 1918 internado en un manicomio. Se cree que enloqueció tratando de resolver una falla en la teoría de conjuntos que descubrió Bertrand Russell. La falla se conoce hoy como "paradoja de Bertrand Russell" y fue precisamente este filósofo y matemático británico (1872-1970) quien posteriormente resolvió la falla.

Existen diversas formas de representar los conjuntos: mediante texto y mediante gráficas. Cuando se pueden enumerar uno a uno todos los elementos del conjunto, porque se trata de un conjunto finito (y con pocos elementos), los elementos se separan con comas dentro de un par de llaves.

Ejemplo: el conjunto de los resultados posibles de una tirada de un dado es:

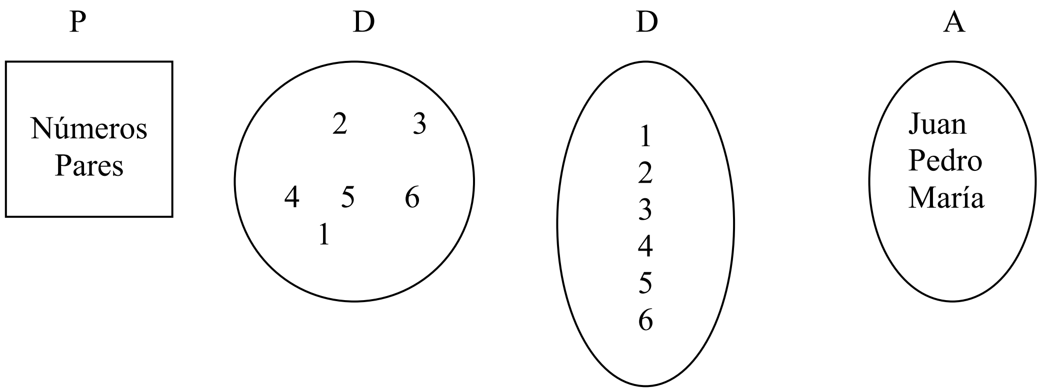
$$D = \{1,2,3,4,5,6\}$$

Esta forma de presentación textual del conjunto se denomina "por extensión". Otra forma textual consiste en dar una regla que establezca qué elementos pertenecen al conjunto (y cuáles no). Siguiendo con el ejemplo del dado, el conjunto de los resultados posibles es una parte de los números naturales (N): los naturales comprendidos entre 1 y 6. La notación "por comprensión" sería:

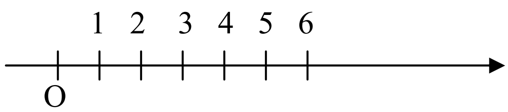
$$D = \{x : x \in N,\ 1 \leq x \leq 6\}$$

que se lee así: "D es el conjunto de números x que cumplen con dos condiciones, x es un número natural y x está comprendido entre 1 y 6".

La forma gráfica más usual para representar un conjunto es el *diagrama de Venn*. Consiste en dibujar dentro de un rectángulo, un círculo o de un óvalo todos los elementos del conjunto.




Cuando se trabaja con conjuntos de números, resulta muy útil la representación gráfica mediante una recta en la que se establece un origen (O) y un sentido (→), el sentido en el que crecen los números.




Los elementos de un conjunto pueden ser personas, nombres, números y también conjuntos. Por ejemplo, sea el conjunto A formado por tres elementos: a, b, c.

$$A = \{a,b,c\}$$

Consideremos ahora el “conjunto de las partes del conjunto A”.

$$P_A = \{\phi, \{a\}, \{b\}, \{c\},\{a,b\}, \{a,c\},\{b,c\},\{a,b,c\}\}$$

Por convención, el conjunto vacío es “parte” de cualquier conjunto. ¿Qué propiedades tienen los elementos del conjunto $P_A$? En primer lugar, estos elementos son a su vez conjuntos, y en segundo lugar, están incluidos o son una parte (en sentido amplio) del conjunto A. La notación para la *inclusión* es el símbolo $\subseteq$ (“inclusión en sentido amplio”, implica que eventualmente los dos conjuntos pueden ser iguales). La inclusión relaciona dos conjuntos, mientras que la pertenencia relaciona un elemento con un conjunto.

En relación con el ejemplo anterior, la notación apropiada sería:

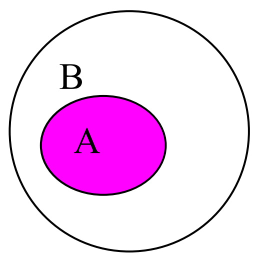
$$\{a,b\} \subseteq A$$
$$\{a\} \in P_A$$
$$A \in P_A$$
$$\{a\} \notin A$$

La noción de “conjunto de conjuntos” es muy utilizada en Estadística. Por ejemplo, cuando se quiere seleccionar una muestra de personas, pero no se tiene una lista completa del universo a investigar, pero sí una lista de las viviendas donde viven dichas personas, entonces se puede seleccionar una muestra de viviendas y luego seleccionar a todas o algunas de las personas que habitan en las viviendas elegidas. El diseño de la muestra consiste en seleccionar primero un conjunto de conjuntos (viviendas, como conjuntos de personas) y en una segunda etapa seleccionar personas.

Definición: Se dice que el conjunto A está incluido en otro conjunto B si se cumple que todo elemento de A es también un elemento de B.

$$A \subseteq B \Leftrightarrow (\forall\ a \in A \Rightarrow a \in B)$$

El símbolo “$\forall$” significa “para todo”. Si el conjunto A está incluido en el B, también se dice que A es un *subconjunto* de B.

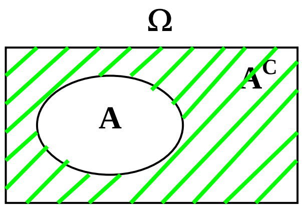



Definición: Si se cumple a la vez que $A \subseteq B$ y que $B \subseteq A$, entonces $A = B$. Esta es la definición matemática de igualdad de conjuntos. También se puede decir que dos conjuntos son iguales si tienen los mismos elementos.

Las Ciencias Sociales tienen como objeto de estudio al Hombre, las relaciones entre el Hombre y la Sociedad, las relaciones entre grupos sociales, etc. Obsérvese que la Psicología y la sociología trabajan con conjuntos de individuos –pequeños grupos y grandes grupos humanos llamados sociedades– y al analizar los grupos, estos se definen en relación con el grupo más amplio posible, el cual se denomina "población" o "universo". Si se adopta la notación $\Omega$ para simbolizar al universo, entonces cualquier subconjunto A de personas de ese universo determina una partición del universo en dos clases:

- $C_1$ = conjunto de individuos de $\Omega$ que pertenecen al conjunto A
- $C_2$ = conjunto de individuos de $\Omega$ que **no** pertenecen al conjunto A

La clase $C_2$ se denomina "conjunto complementario de A respecto de $\Omega$" (notación: $A^C$) y se puede definir también así:




$$A^C = \{x: x \in \Omega \ \text{ y } \ x \notin A\}$$

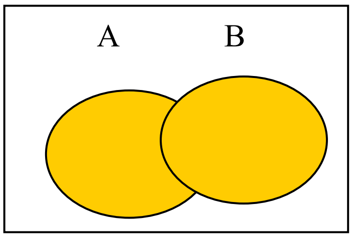
Las clases $C_1$ y $C_2$ determinan una partición de $\Omega$ si se cumple que ambas son no vacías. Más formalmente, una partición del universo es una regla que clasifica a los elementos del universo en clases separadas y no vacías. La partición puede determinar sólo dos clases, como en el ejemplo anterior, o más de dos clases, incluso hasta un número infinito de clases. Ejemplos:

1. El universo es el conjunto de todos los individuos residentes de un país, y las clases son dos: sexo femenino y sexo masculino.
2. El universo es el conjunto de todos los individuos residentes de la India y las clases son dos: consumidores de Campa-Cola y no consumidores del producto.
3. El universo es el conjunto de los hogares residentes de un país y las clases están definidas por el número de miembros del hogar: hogares unipersonales, hogares con 2 personas, etc. ¿Cuántas clases hay en Uruguay? ¿Cuál es la clase más frecuente?
4. $\Omega = N$
   $C_i = \{x: x \in N \ \text{ y } \ 5.(i-1) \leq x \leq 5.i-1\}$ con i=1,2,3,…….
   ¿Cuántos elementos tiene cada clase?

Entre los conjuntos es posible definir ciertas operaciones. Una *operación* pone en relación dos entidades –en este caso, dos conjuntos– y como resultado de dicha relación se obtiene una nueva entidad –en este caso, un conjunto–.

<u>Definición</u>: Dados dos conjuntos, A y B, se llama *unión de A con B* a otro conjunto que tiene todos los elementos de A y todos los elementos de B.

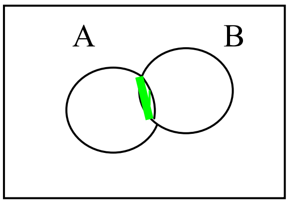
Notación: Unión de A con B = $A \cup B$



Propiedades de la unión de conjuntos

1. Conmutativa: $A \cup B = B \cup A$
2. Asociativa: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
3. $A \subseteq B$ si y solo si $A \cup B = B$
4. $A \cup \Phi = A$ para todo conjunto A
5. $A \cup A^C = \Omega$

Definición: Dados dos conjuntos, A y B, se llama *intersección de A y B* a otro conjunto que tiene sólo los elementos comunes de A y B.




Propiedades de la intersección de conjuntos

1. Conmutativa: $A \cap B = B \cap A$
2. Asociativa: $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
3. $A \subseteq B$ si y solo si $A \cap B = A$
4. $A \cap \phi = \phi$ para todo conjunto A
5. $A \cap A^C = \phi$

Si la intersección de dos conjuntos es vacía, se dice que ambos conjuntos son *disjuntos o mutuamente excluyentes*.

Propiedades que combinan unión e intersección

1. Distributiva respecto de la intersección: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
2. Distributiva respecto de la unión: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
3. Ley de De Morgan: $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$
4. Ley de De Morgan: $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$

# Repartido Práctico 1: Teoría de conjuntos

**Ejercicio 1**

a) Escribir por extensión el conjunto: $A = \{x: x \text{ es natural}, 2 < 2.x - 3 \leq 11\}$
b) Hallar 5 elementos del conjunto $B = \{x: x \text{ es natural}, x \notin A\}$
c) Hallar 5 elementos del conjunto $C = \{(x, y): x \text{ es natural}, y \text{ es natural}, x\text{-}y = 3\}$
d) Con relación al conjunto anterior, ¿cuál de las siguientes expresiones es la correcta: $[10 \in C \text{ y } 7 \in C]$, $[(10,7) \in C]$?
e) Escribir por comprensión el conjunto de los números fraccionarios cuyos denominadores son mayores que los numeradores.
f) Escribir por comprensión el conjunto de los divisores de 10.
g) Sea el conjunto formado por 5 personas: {Ana, Juana, Jorge, Pedro, Luis}. Hallar el conjunto de todos los pares de personas (importa el orden) con la condición que en cada par no haya dos varones.
h) Si $a \in B$ y $B \in \Theta$, ¿se deduce que $a \in \Theta$?
i) Mostrar que el conjunto $D = \{x: x \in N, 1 < x^3 < 100\}$ está incluido en el conjunto $E = \{x: x \in N, 1 < x^2 < 100\}$.
j) ¿De qué otra manera se puede definir el conjunto $F = \{x: x \in N \text{ y } x < 0\}$?

**Ejercicio 2**

a) Se tienen cuatro conjuntos, A es el conjunto de los múltiplos de 2, B es el conjunto de los múltiplos de 3, C es el conjunto de los múltiplos de 6 y D es el conjunto de los números impares. Calcular los conjuntos que resultan de las siguientes operaciones:

| | | | |
|---|---|---|---|
| i) | $A \cap B =$ | v) | $B \cap C =$ |
| ii) | $B \cup C =$ | vi) | $B \cap D =$ |
| iii) | $A \cup D =$ | vii) | $A \cap \phi =$ |
| iv) | $A \cap D =$ | viii) | $A \cup \phi =$ |

b) Considere el conjunto de los números naturales como universo ($N = \Omega$), y los conjuntos A, B, C y D definidos en el literal anterior. Hallar los siguientes conjuntos (definirlos por comprensión o en función de A, B, C ó D):
   i) $A^C$
   ii) $D^C$
   iii) $(A \cup D)^C$
   iv) $(A \cap D)^C$
c) Demostrar, usando diagramas de Venn, las *propiedades distributivas*.
   Si A, B y C son tres conjuntos cualesquiera de $\Omega$, entonces:
   i) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
   ii) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cap C)$

d) Demostrar, usando diagramas de Venn, las *leyes de De Morgan*.
   i) $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$
   ii) $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$

**Ejercicio 3**

En una población de 100.000 habitantes el 20% lee el periódico La Noche, el 25% lee el semanario El Encuentro, pero sólo el 5% lee ambas publicaciones. ¿Cuántos pobladores no leen ninguna de las dos publicaciones?

## 2. RELACIONES Y FUNCIONES

Definición: Se llama *producto cartesiano* del **conjunto de partida** A por el **conjunto de llegada** B (notación: AxB) a un conjunto de pares ordenados cuyo primer componente es un elemento de A y cuyo segundo componente es un elemento de B.

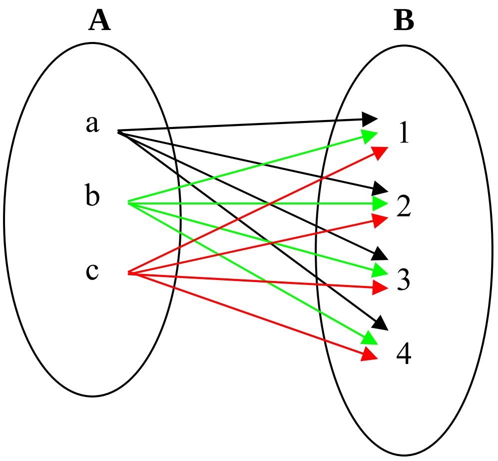
Ejemplo: A = {a,b,c}
B = {1,2,3,4}

AxB = {(a,1), (a,2), (a,3), (a,4), (b,1), (b,2), (b,3), (b,4), (c,1), (c,2), (c,3), (c,4)}

Obsérvese que los elementos de AxB son ahora pares ordenados. Por ejemplo, el par (a,3) pertenece al producto cartesiano, mientras que el par (3,a) no pertenece al producto cartesiano. Por lo dicho, en general, AxB ≠ BxA.

Si A y B son finitos, entonces el número de elementos de AxB es el producto del número de elementos de A por el número de elementos de B.

El producto AxB puede visualizarse en un diagrama de Venn, donde sus elementos (los pares ordenados) están dados por el origen y la punta de cada flecha.



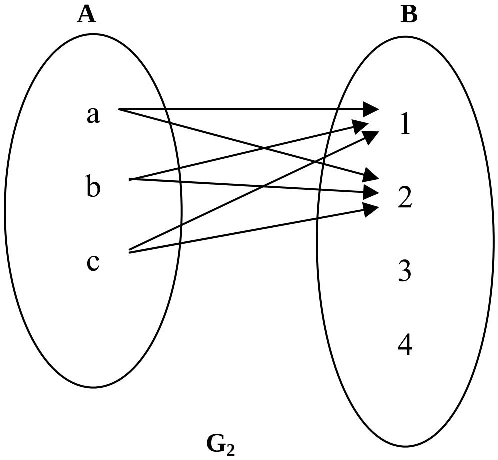

Definición: Se llama *relación de A en B* a una terna ordenada [A, B, G] donde G es un conjunto de pares ordenados de primera componente en A y segunda componente en B. El conjunto G se llama *gráfico* de la relación de A en B.

El gráfico de la relación es, por definición, un subconjunto del producto cartesiano de AxB. Se deduce que [A, B, AxB] es una relación.

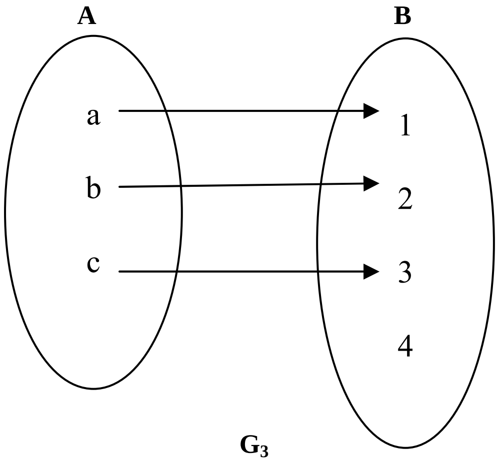
Los siguientes ejemplos son los gráficos de cuatro relaciones, los cuales se presentan expresados por extensión y luego mediante los diagramas de Venn. Los conjuntos A y B de la terna [A, B, G] son los del ejemplo anterior.

$G_1$ = {(a,1), (a,2), (b,1), (b,2), (c,1), (c,2)}
$G_2$ = {(a,1), (b,2), (c,3)}
$G_3$ = {(a,1), (b,1), (c,1)}
$G_1$ = {(c,4)}

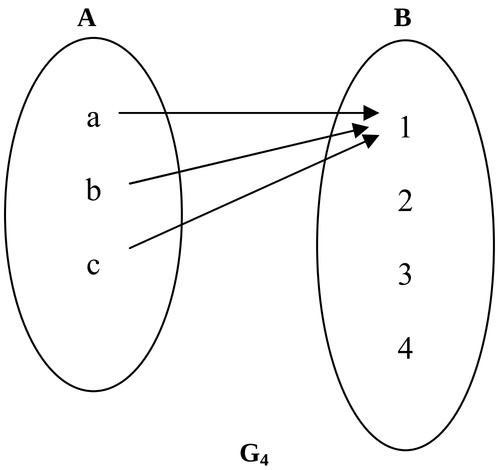
**$G_1$**



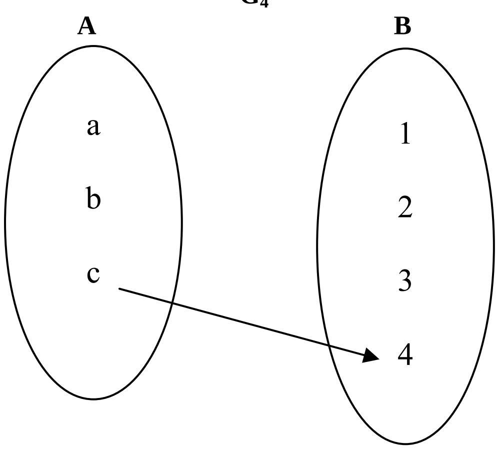

**$G_2$**




**$G_3$**




**$G_4$**



Algunas relaciones pueden definirse mediante la regla de formación de los pares, por comprensión. Por ejemplo, en el gráfico $G_3$ la relación consiste en hacer corresponder a todo elemento de A el elemento “1” de B.

Otro ejemplo: sea A el conjunto de todos los países de la Tierra y sea B el conjunto de todas las ciudades del mundo. Se definen dos relaciones:

$R_1$ = a cada país de A se le hace corresponder su capital en B.

$R_2$ = a cada país de A le corresponden en B todas las ciudades, de ese mismo país con más de 1.000.000 de habitantes.

En el caso $R_1$ todos los elementos de A son “origen” de una flecha, y solo una, en el gráfico porque todos los países tienen una sola capital (Bolivia podría considerarse una excepción del cual parten dos flechas). En el caso $R_2$ algunos países podrían no figurar como primera componente del gráfico por no tener mega-ciudades (Bolivia es un ejemplo de este tipo). De Uruguay partiría una única flecha en el gráfico de $R_2$ (pues Montevideo es la única mega-ciudad), mientras que de Brasil, Argentina, México y EEUU partirían varias flechas en el gráfico de $R_2$ (tantas como ciudades que pasan del millón de habitantes en dichos países).

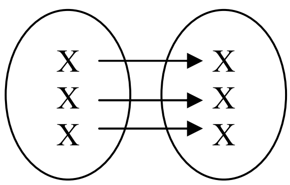
<u>Definición</u>: Se llama *función de A en B* a toda “relación de A en B” que cumple con dos condiciones:

a) Todo elemento de A tiene su correspondiente en B en el gráfico de la función.
b) Cada elemento de A tiene un único correspondiente en B en dicho gráfico.

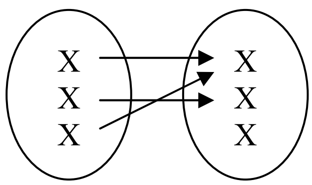
Notación: [A, B, f ] donde A es el *dominio o conjunto de partida,* B es el *codominio o conjunto de llegada* y “f” es el gráfico de la función.

Entonces una función no es más que una relación, pero una relación particular, que debe cumplir las dos condiciones mencionadas en la definición. Veremos a continuación algunos ejemplos de relaciones para identificar cuáles de ellas son también funciones.

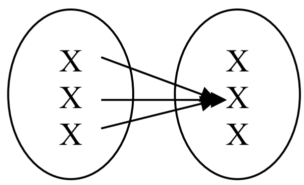
$R_1$



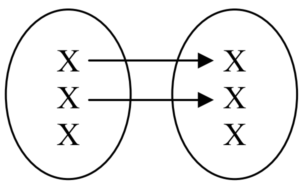
$R_2$



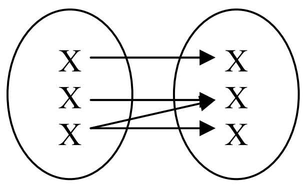
$R_3$



$R_4$



$R_5$



$R_1$, $R_2$ y $R_3$ son funciones. $R_4$ no es función porque falla la condición a) y $R_5$ no es función porque falla la condición b).

Otro ejemplo: la relación que hace corresponder a cada número natural (A es el conjunto de los naturales) su cuadrado (B es también el conjunto de los naturales) es una función, pues todo número natural tiene un cuadrado natural, y éste es único. Esta función tiene, además, una interpretación geométrica: relaciona el lado de un cuadrado con el área del cuadrado.

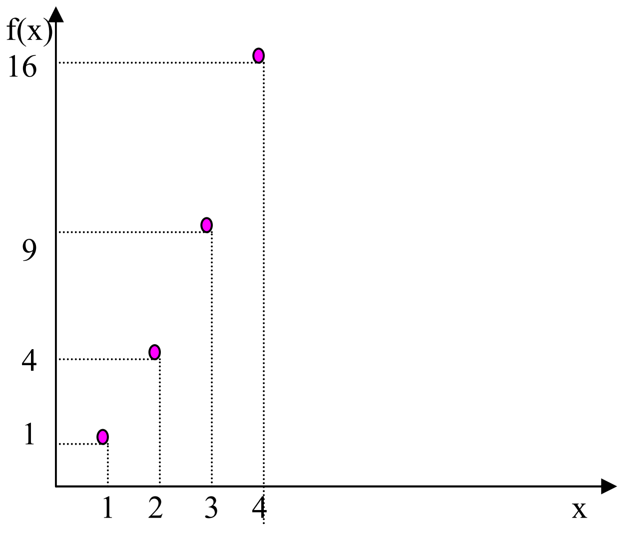
En el gráfico de una función el primer componente del par se denomina *argumento de la función* y el segundo componente es el *valor o imagen de la función* para dicho argumento. Si dominio y codominio de la función son conjuntos de números, entonces el argumento y valor se denominan también *abcisa* y *ordenada* respectivamente.

Notación: Si los conjuntos de partida y de llegada están sobreentendidos (por ejemplo, porque ambos son el conjunto de números naturales), un argumento cualquiera se simboliza con la letra "x" y al correspondiente de x según la función f se lo simboliza con la expresión "f(x)", entonces las notaciones más habituales para la función del último ejemplo son:

$$x \xrightarrow{f} f(x) = x^2$$

$$f\text{: } f(x) = x^2$$

En caso que dominio y codominio de la función sean conjuntos de números, resulta muy útil la represtación del gráfico en un par de ejes *cartesianos*[3] *ortogonales*.




En el gráfico precedente se representan, en la intersección de las líneas punteadas, cuatro elementos del gráfico de la función f: $f(x) = x^2$, los pares (1,1), (2,4), (3,9) y (4,16). Los ejes se dicen "ortogonales" porque son perpendiculares.

[3] René Descartes (1596-1650) filósofo, físico y matemático francés. Es el creador de la geometría analítica.

El conjunto de *valores de f*, elementos del codominio a los que llegan flechas, se denomina *conjunto imagen de f*.

Imagen de f = {z: z pertenece a B y existe x en A tal que f(x) = z}= f(A)

<u>Definición</u>: f es una función *inyectiva* de A en B si dos elementos distintos de A tienen imágenes distintas en B.

$$f \text{ es inyectiva } \leftrightarrow [x \neq y \rightarrow f(x) \neq f(y)]$$

Ejemplo: la función f: $f(x) = x^2$ es inyectiva si el dominio es el conjunto N (pues a dos naturales diferentes corresponden cuadrados diferentes) pero no es inyectiva si el dominio es el conjunto de los enteros, pues por ejemplo $+3 \neq -3$ y sin embargo $(+3)^2 = (-3)^2$.

<u>Definición</u>: f es una función *sobreyectiva* si el conjunto imagen de f coincide con el codominio.

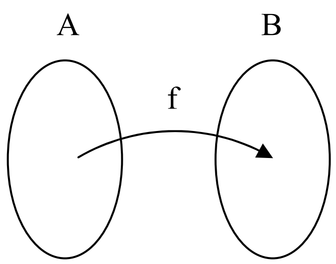
$$f \text{ es sobreyectiva } \leftrightarrow f(A) = B$$

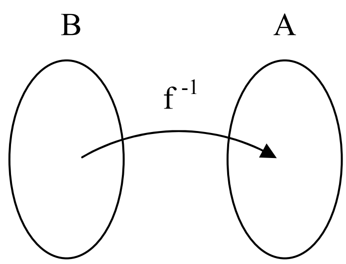
Ejemplo: la función f: f(x) = x + 2, donde A y B son los números enteros, es sobreyectiva, pues todo número entero de B es imagen de algún elemento en A. En cambio, la función f: $f(x) = x^2$, con dominio y codominio entero, no es sobreyectiva porque por ejemplo el entero +3 en B no es imagen de ningún número entero de A.

<u>Definición</u>: Se dice que una función es *biyectiva* si es a la vez inyectiva y sobreyectiva.

<u>Definición</u>: Sea f una función de A en B. Se denomina *función inversa de f* (notación: $f^{-1}$) a otra función tal que a cada imagen le hace corresponder su preimagen: $[B, A, f^{-1}]$.

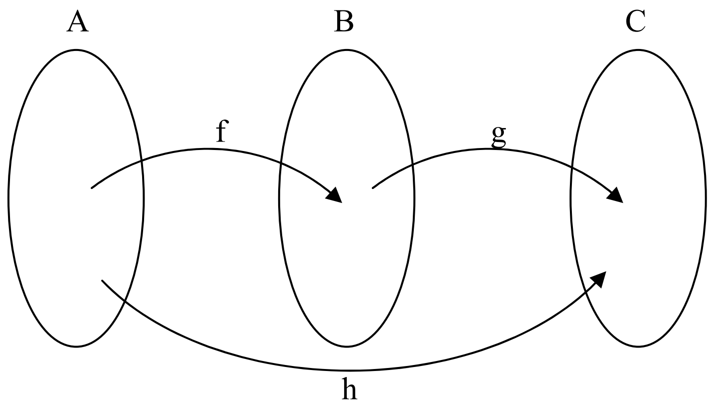
Observación: no siempre existe la función inversa. Para que exista la función inversa de f se tiene que cumplir que todo elemento de B sea imagen, y que cada elemento de B sea imagen de un único argumento. En otras palabras, para que exista $f^{-1}$ se tiene que cumplir que f sea biyectiva.




<u>Definición</u>: Sean dos funciones [A, B, f] y [B, C, g]. Se dice que h es la función compuesta de f y g si el conjunto de partida de h es el conjunto de partida de f , el conjunto de llegada de h es el conjunto de llegada de g, y la imagen de un argumento x por g se obtiene de aplicar a x la función f y al valor f(x) la función g.

$$[A, C, h] \text{ función compuesta de } [A, B, f] \text{ y } [B, C, g] \leftrightarrow h(x) = g[f(x)]$$


A
B
C
f
g
h

# Repartido Práctico 2: Relaciones y Funciones

**Ejercicio 1**

Sean dos conjuntos: A = {María, Juana, Laura, Anastasia}
B = {Pedro, Raúl, Bernardo}

a) Hallar el producto cartesiano AxB (conjunto de parejas heterosexuales posibles).
b) Hallar el gráfico de la relación “Nombre de la mujer es alfabéticamente anterior que el nombre del varón”.
c) Hallar el gráfico de las relaciones de parejas posibles teniendo en cuenta las siguientes restricciones simultáneamente:
   - María y Raúl son hermanos
   - Laura y Bernardo ya fueron pareja, se separaron y no pueden verse
   - Anastasia es tía de los tres varones.

**Ejercicio 2**

Sean dos conjuntos: $A = \{1, 3, 5, 7\}$
$B = \{0, 2, 4, 6\}$

a) Hallar el producto cartesiano AxB.
b) ¿Es AxB = BxA?
c) Hallar el gráfico de la relación $R_1 = \{(a, b): (a, b) \in AxB,\ a \leq b\}$
d) Hallar el gráfico de la relación $R_2 = \{(a, b): (a, b) \in AxB,\ a = b\}$
e) Hallar el gráfico de la relación $R_1 = \{(a, b): (a, b) \in AxB,\ 2.a = b\}$
f) Hallar el gráfico de la relación $R_1 = \{(a, b): (a, b) \in AxB,\ a^2 > b\}$

**Ejercicio 3**

Indicar cuáles de las siguientes relaciones son también funciones.

a) $R_1$ = A cada país le corresponde su capital
b) $R_2$ = A cada ciudad le corresponde el país donde está asentada.
c) $R_3$ = A cada mujer le corresponde su o sus hijos
d) $R_4$ = Hijo de
e) $R_5$ = Padre de
f) $R_6$ = A cada empleado de la empresa le corresponde un cargo en la empresa
g) $R_7$ = A cada cargo de la empresa le corresponde una persona de la PEA
h) $R_8$ = A cada persona de la PEA le corresponde un cargo en una empresa
i) $R_9$ = A cada consumidor de refrescos, la marca preferida de refrescos.

**Ejercicio 4**

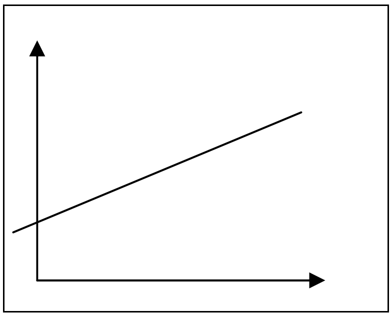
De las relaciones del Ejercicio 3 que son también funciones, indicar si son inyectivas, sobreyectivas y/o biyectivas.

## Repartido Práctico 2: Relaciones y Funciones

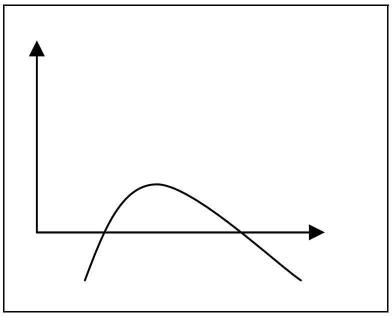
**Ejercicio 5**

En los siguientes casos indicar si el gráfico corresponde o no a una función, con dominio (conjunto de partida) y codominio (conjunto de llegada) de números reales.

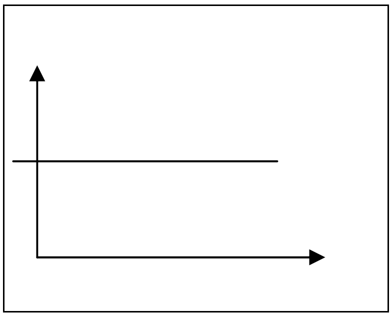
**Caso 1**



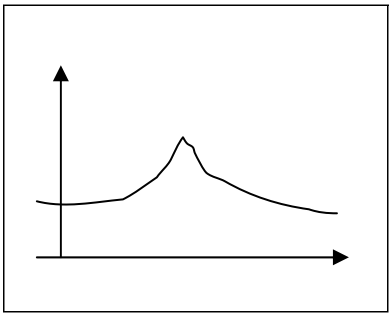
**Caso 2**



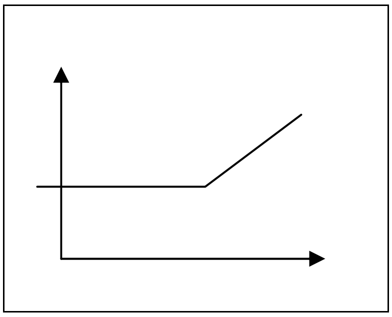
**Caso 3**



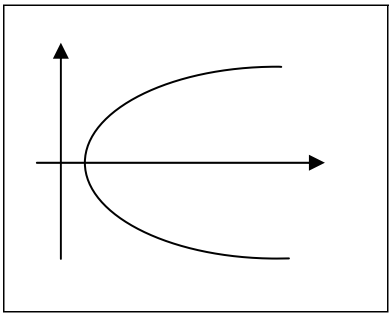
**Caso 4**



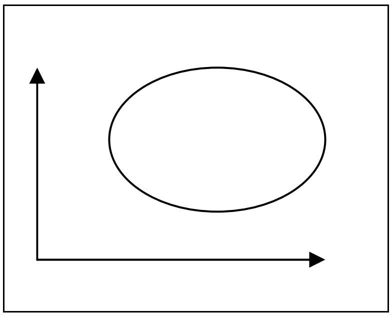
**Caso 5**



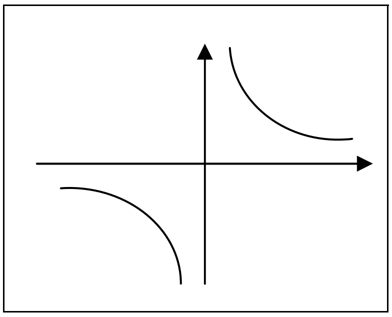
**Caso 6**



**Caso 7**



**Caso 8**



# Repartido Práctico 2: Relaciones y Funciones

**Ejercicio 6**

Escribir mediante fórmulas del tipo $y = f(x)$ ó $z = f(x, y)$ las siguientes relaciones.

a) y = área de un cuadrado
x = medida del lado del cuadrado

b) y = área de un rectángulo, uno de cuyos lados mide 2
x = medida del otro lado del rectángulo

c) y = importe de la factura mensual del consumo eléctrico, que incluye solamente el cargo fijo del medidor ($60) y un precio único del kwh de $2.
x = cantidad de kwh consumidos en el mes

d) y = importe de la factura mensual del consumo eléctrico, que incluye:
- cargo fijo de $60
- potencia contratada de $120
- precio unitario de los primeros 100 kwh = $2
- precio unitario de los kwh por encima de los primeros 100 = $2,50
- impuestos sobre todos los conceptos: 26,69%

x = cantidad de kwh consumidos en el mes

e) z = importe de la factura mensual de ANTEL, que incluye:
- cargo fijo de $150
- precio unitario de los cómputos = $0,90
- precio del minuto de conexión a Internet = $0,30
- exoneración de los primeros 50 cómputos
- impuestos sobre todos los conceptos: 26,69%

x = cantidad de cómputos consumidos en el mes
y = cantidad de minutos de conexión a Internet

# 3. CONJUNTOS NUMÉRICOS. OPERACIONES CON NÚMEROS

Vamos a suponer que Ud. ya conoce los números, las operaciones que pueden realizarse con ellos y sus propiedades más importantes. Si esto no es cierto, algunas de las dificultades que se le habrán de presentar, Ud. podrá resolverlas con la ayuda de una computadora personal o con una calculadora de bolsillo. Pero algunos problemas quedarán sin resolver, y otros resultarán demasiado complicados si se desconocen los métodos para simplificarlos. Es con ese objeto –el resolver o simplificar algunos problemas– que se escriben estas líneas.

Empecemos con los *números naturales* (notación: N). Ellos son:

0, 1, 2, 3, 4, 5, .....

Los puntos suspensivos indican que se trata de un conjunto infinito. Para un natural dado (tan grande como se quiera), siempre es posible encontrar un natural más grande. Sin embargo, entre dos naturales no siempre es posible encontrar otro natural (entre el 4 y el 5 no hay ningún natural).

El resultado de sumar o multiplicar dos naturales es siempre otro número natural. Pero la resta de naturales o la división no tienen, siempre, un resultado natural. Por ejemplo, 3 – 5 = -2, que no es un número natural, y 3 : 5 = 3/5 = 0,6, que tampoco es un número natural. Otro tanto ocurre con la radicación: $\sqrt{4} = 2$, $\sqrt[3]{125} = 5$, *pero* $\sqrt{3}$ no tiene un resultado "exacto" expresable en números naturales (ni siquiera en números decimales). Estas limitaciones conducen a la ampliación de los conjuntos de números.

Pero volviendo a los números naturales y sus operaciones, es necesario fijar algunas reglas. Si se tiene la expresión:

$$3 + 2 \text{ x } 3^4$$

es necesario establecer en qué orden deben efectuarse las operaciones, porque según cual sea el orden, el resultado es diferente. Supongamos que el orden consiste en realizar las operaciones en el orden en que aparecen en la expresión. Entonces la primera operación a realizar sería 3 + 2 = 5. La segunda, la multiplicación de este resultado por 3, 5 x 3 = 15. Y la tercera, consistiría en elevar este resultado a la cuarta potencia: $15^4$ = 15 x 15 x 15 x 15 = 50.625.

Sin embargo, sabemos que éste es un resultado "equivocado", porque en matemática las operaciones no se realizan en el orden en que aparecen, sino siguiendo unas *reglas de prioridad*. En este sentido, las reglas establecen que:

- En primer lugar, deben realizarse las operaciones de potenciación y radicación (ambas tienen la misma prioridad).
- En segundo lugar, las operaciones de multiplicación y de división (ambas tienen la misma prioridad).
- En tercer lugar, las operaciones de suma y resta (ambas tienen la misma prioridad).

En consecuencia, siguiendo con el ejemplo anterior, la primera operación a realizar es $3^4 = 81$. La expresión resulta ahora así:

$$3 + 2 \text{ x } 81$$

Las reglas de prioridad establecen que a continuación se debe realizar la multiplicación, obteniéndose: 2 x 81 = 162. La última de las operaciones es la suma, 3 + 162 = 165, resultado final de la expresión original.

Para realizar las operaciones combinadas hemos aplicado, entre otras, la regla que dice que los signos "+" y "menos" separan términos. Obsérvese que esta regla establece que primero deben efectuarse las "otras" operaciones, y finalmente las de suma y resta. Este es un caso particular de las reglas de prioridad que enunciamos más arriba.

¿Y si en realidad las operaciones que queríamos realizar en la expresión del ejemplo eran las del orden de aparición? En este caso habría que cambiar el orden de prioridad. El instrumento para hacerlo es el paréntesis.

$$[(3 + 2) \text{ x } 3]^{4}$$

Los paréntesis permiten cambiar las reglas de prioridad introduciendo las siguientes reglas adicionales.

- En primer lugar, deben efectuarse las operaciones indicadas dentro del paréntesis curvo.
- En segundo lugar, deben efectuarse las operaciones indicadas dentro del paréntesis recto.
- En tercer lugar, deben efectuarse las operaciones indicadas dentro de las llaves (luego veremos un ejemplo).
- Al interior de cada paréntesis y fuera de ellos se siguen aplicando las reglas de prioridad antes enunciadas.

En la última expresión, el paréntesis curvo indica que la primera operación a efectuar es (3+2). El paréntesis recto, que la segunda operación consiste en multiplicar por 3 el resultado de (3+2), (3+2)x3=15, y finalmente $15^4 = 50.625$.

Otro ejemplo: $2x\{3:[(5-2)x4]\} = 2x\{3:[3x4]\} = 2x\{3:12\} = 2x\{0,25\} = 0,5.$

Algunas computadoras y calculadoras de bolsillo no reconocen los paréntesis rectos o las llaves, y trabajan combinando los paréntesis curvos. En el mismo ejemplo anterior, las operaciones a efectuar se indicarían así:

$$2x(3:((5-2)x4))$$

La regla de prioridad en este caso es que se deben efectuar las operaciones contenidas en los paréntesis en el orden de “adentro hacia fuera”. En el ejemplo, primero se calcula (5-2), al resultado se lo multiplica por 4, etc.

Otra forma de alterar las reglas de prioridad consiste en extender los signos de división o de radicación, como a continuación se explica. Si queremos efectuar la operación 6:3, ésta también puede escribirse 6/3 ó $\frac{6}{3}$. Si la operación a efectuar es 6:(3+2), ésta también puede expresarse 6/(3+2) ó $\frac{6}{3+2}$. En consecuencia, la “raya larga” de división opera de la misma forma que un paréntesis, indicando que tiene primera prioridad la suma (3+2), y que luego debe efectuarse la división.

Otro tanto ocurre con la radicación. $\sqrt{4+5}$ indica que primero debe realizarse la suma, y luego la raíz cuadrada. En cambio, en la expresión $\sqrt{4}+5$, primero debe efectuarse la raíz cuadrada y luego la suma.

En uno de los ejemplos anteriores introdujimos los números 0,25 y 0,50 que no son números naturales. Veamos por qué se hace necesario introducir nuevas categorías de números.

En primer lugar, la resta de dos números naturales no siempre da como resultado un número natural. Por ejemplo, 3-5 no es natural y, en consecuencia, si se quiere generalizar la resta, es necesario definir un conjunto de números que incluya, entre otros, el resultado de 3-5. Tal conjunto es el de los *números enteros*. Ellos son los naturales acompañados de un signo “más” o “menos”:

.....,-3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, .....

Los números enteros se representan con la letra **E** y forman un conjunto infinito, y para ahorrar esfuerzo, los números “positivos” se escriben sin el signo +. Este queda sobreentendido. Porque en la práctica, los enteros positivos funcionan como los números naturales. Esto es, se pueden realizar las mismas operaciones y gozan de las mismas propiedades.

¿En qué se diferencian los *enteros* de los *naturales*? Entre los enteros siempre es posible realizar la sustracción, es decir, la resta de dos enteros es un número entero. Como consecuencia de ello, para cada entero, siempre existe un entero “opuesto”. El opuesto de +3 es -3, el opuesto de -8 es +8, etc. Formalicemos esta propiedad junto con otras de interés general.

*Propiedades de la suma de enteros*

1. Conmutativa: para todo par de enteros a y b, se cumple que $a + b = b + a$.
2. Asociativa: para todo a, b y c enteros se cumple que $a + (b + c) = (a + b) + c$.
3. Existencia de neutro: el cero es el único entero que, sumado con otro, da por resultado ese otro. $a + 0 = a \ \ \forall a$ entero.
4. Existencia de inverso: $\forall a \in E, \exists (-a)$ tal que $a +(-a) = 0$. Además el inverso es único.

*Observaciones*

a) Cuando la operación es la suma, el "inverso" se denomina "opuesto".
b) En el conjunto de los naturales no se cumple la propiedad del inverso.
c) Cuando en un conjunto (C) se define una operación (+) que cumple con las propiedades 2, 3 y 4, se dice que el par {C, +} tiene *estructura de grupo*. Si además se cumple la propiedad 1, entonces se dice que el grupo es *abeliano o conmutativo*.
d) {E, +}tiene estructura de grupo. Si consideramos los enteros y la multiplicación (.), para {E, **.**} se cumplen las tres primeras propiedades pero no la cuarta (Existencia de inverso). ¿Por qué no se cumple?

   Existe una propiedad que combina las dos operaciones de suma y multiplicación:

   Distributiva: si a, b y c son enteros, entonces $a.(b + c) = a.b + a.c$

Indica que hay dos formas de realizar la operación combinada: en una de ellas primero se suma (b + c) y al resultado se lo multiplica por a; en la otra, primero se multiplican a con b y a con c, y luego ambos resultados se suman.

Cuando en un conjunto C se definen dos operaciones ("+" y ".") que cumplen ambas con las propiedades 1, 2, 3 y 4, más la distributiva, entonces se dice que (C, +, .) tiene *estructura de cuerpo*.

| **Estructura de grupo** |
|---|
| 1. Conmutativa |
| 2. Asociativa |
| 3. ∃ de neutro |
| 4. ∃ de inverso |

| **Estructura de cuerpo** | |
|---|---|
| + | . |
| 1. Conmutativa | 5. Conmutativa |
| 2. Asociativa | 6. Asociativa |
| 3. ∃ de neutro | 7. ∃ de neutro |
| 4. ∃ de inverso | 8. ∃ de inverso* |
| 9. Distributiva | |

*Excepto para el neutro de +

Está claro que {E, +, **.**} no tiene estructura de cuerpo, exclusivamente porque no se cumple la propiedad 4 para el producto: en enteros no se verifica la existencia de inverso. En general, dado un entero a, no existe otro entero a' tal que $a \times a' = 1$ (donde 1 es el neutro del producto). Por ejemplo, el inverso de (-3) sería (-1/3) porque $(-3)x(-1/3) = 1$. Pero (-1/3) no es un número entero.

Esta limitación de los enteros se levanta con la introducción de los *números racionales* (también conocidos como "fracciones" o números "decimales"). Por definición los números racionales son cocientes de la forma $a/b$, donde $a$ y $b$ son enteros y $b \neq 0$.

El conjunto de los números racionales (Q) es un conjunto con infinitos elementos, pero con una propiedad que no tienen los naturales ni los enteros: entre dos racionales diferentes, siempre hay otro racional. Probemos esta afirmación, conocida con el nombre de "densidad".

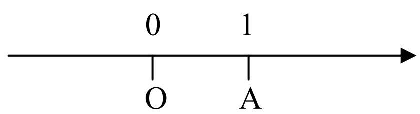
Sean $a$ y $b$ dos racionales diferentes, sea $a < b$. Si $a$ es negativo y $b$ positivo, entonces entre ambos está el racional cero. Probemos que entre dos racionales positivos siempre hay otro racional (la prueba es similar si ambos son negativos). Sean los racionales positivos $p/q$ y $r/s$. Probaremos que $(p+r)/(q+s)$ es otro racional que está entre aquellos dos. $(p+r)/(q+s)$ es un racional porque $(p+r)$ es un entero y $(q+s)$ también lo es, y además es $(q+s) \neq 0$ (porque ambos son positivos). Se trata de un cociente de enteros que, por definición, es un número racional.

$(p+r)/(q+s) < r/s$, si se cumple que $(p+r).s < (q+s).r$, o también, aplicando la propiedad distributiva:

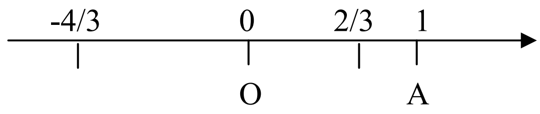
$$p.s + r.s < q.r + s.r$$

Por la propiedad conmutativa del producto resulta $r.s = s.r$. Si restamos a ambos miembros de la desigualdad la cantidad $r.s$, entonces la desigualdad se mantiene. Resulta: $p.s < q.r$, que es equivalente de $p/q < r/s$, que es la hipótesis de partida. La cadena de silogismos vale también en el sentido contrario, y con ello queda demostrado que si $p/q < r/s$, entonces $(p+r)/(q+s) < r/s$. La prueba se completa demostrando en forma análoga que $p/q < (p+r)/(q+s)$.

Cuando un conjunto numérico tiene la propiedad que entre dos elementos del conjunto siempre hay otro, se dice que el conjunto es *denso*. Como el conjunto Q es denso, parece razonable que podamos establecer una correspondencia (una función) entre los elementos de Q y los puntos de una recta. Sobre una recta damos un sentido (en la dirección de la flecha), un origen (el punto 0) y una unidad de medida (el segmento OA tiene medida "1"). El sentido de la recta nos indica la dirección en la cual crecen los números.




Cualquier número de Q tiene un correspondiente punto sobre la recta. Para ubicar el correspondiente de $2/3$ se procede como sigue: se divide el segmento OA en tres partes iguales, y luego se toma el doble de una de esas partes. El segmento resultante se mide a partir de O en el sentido de la flecha, y el segundo extremo indica el punto correspondiente a $2/3$. Para ubicar el correspondiente del número $-4/3$ en la recta, se divide OA en tres partes iguales y luego se toma un segmento cuatro veces más grande que el tercio hallado. El segmento resultante se mide a partir de O en el sentido contrario al de la flecha. El segundo extremo del segmento determina el punto correspondiente a $-4/3$.



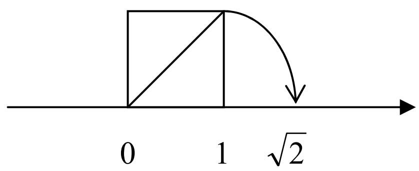

Cabe preguntarse si también se cumple el recíproco: ¿a todo punto sobre la recta le corresponde un número racional? La respuesta es negativa. Como ejemplo, puede tomarse el resultado de la radicación, una de las operaciones inversas de la potenciación.

$$\sqrt{25} = 5 \quad \text{porque} \quad 5^2 = 25$$

$$\sqrt[3]{\frac{1000}{27}} = \frac{10}{3} \quad porque \quad \left(\frac{10}{3}\right)^3 = \frac{1000}{27}$$

Entonces $\sqrt{25}$ y $\sqrt[3]{\frac{1000}{27}}$ son racionales. Pero $\sqrt{2}$ no tiene respuesta en el conjunto de los racionales. Por el absurdo: si $\sqrt{2}$ fuera racional, entonces se podría escribir como cociente de dos enteros: $\sqrt{2}$ = a/b, donde a y b son enteros sin factores comunes (fracción reducida). Por definición, resulta $2 = (a/b)^2$. Se deduce: $2.b^2 = a^2$. Como el factor 2 aparece a la izquierda en la igualdad, $a^2$ también debe contener el factor 2. Entonces el número a puede escribirse de la forma a = 2.c. Entonces: $a^2 = (2.c)^2 = 4.c^2$. Entonces: $2.b^2 = 4.c^2$, o lo que es lo mismo, $b^2 = 2.c^2$. Con el mismo razonamiento, b contiene el factor 2, lo cual es absurdo porque a y b eran dos enteros sin factores comunes. Conclusión: $\sqrt{2}$ no es un número racional. Lo mismo ocurre con muchos otros resultados de la radicación, y también con los de la otra operación inversa de la potenciación, la logaritmación.

Si se quiere ubicar el punto sobre la recta correspondiente a $\sqrt{2}$, alcanza con construir un cuadrado de lado 1. Por Pitágoras, las diagonales del cuadrado miden $\sqrt{2}$. Tomando la diagonal del cuadrado, con origen en O y en el sentido de la flecha, el segundo extremo de la diagonal proyectada indica el punto de la recta correspondiente a $\sqrt{2}$.




Todos los puntos sobre la recta que no se corresponden con un número racional, se denominan *irracionales*. Se define el conjunto de los *números reales* (R) como la unión de Q con el conjunto de los irracionales.

*Observaciones*

a) El conjunto de los números reales completa la recta. A cada número de R le corresponde un punto sobre la recta y viceversa. La relación entre R y los puntos de la recta es una *función biyectiva*.
b) El conjunto R es infinito y denso.
c) ¿Todos los resultados de la radicación son números reales? La respuesta es negativa –por ejemplo $\sqrt{-1}$ no es un número real– y este es el origen de una nueva categoría de números, los números complejos, que nosotros no estudiaremos.

Los números reales son, de los que hemos presentado, el conjunto más amplio en el que se pueden definir las operaciones racionales –suma, resta, multiplicación y división– sin restricciones (excepto la división entre cero), pero también la potenciación –con algunas restricciones– y también sus operaciones inversas: radicación y logaritmación. Dedicaremos estas últimas notas a presentar estas operaciones y sus principales propiedades.

## *Potenciación*

Definición: $a^n = \begin{cases} a.a.a......a & (\text{producto de } n \text{ factores } a, \text{ si } n \text{ es natural}) \\ a^0 = 1 \end{cases}$

*Observaciones*

a) $0^0$ no está definido, no es un número.
b) Si n no es natural, la definición de $a^n$ es un poco más complicada y no nos ocuparemos de ella. Digamos que podemos resolver los problemas que se nos presenten usando la función $x^y$ que tienen todas las máquinas científicas. Así, para calcular $1{,}05^{3{,}5}$ se procede de la siguiente manera:

- se introduce en la máquina el número 1,05
- se aprieta la tecla "$x^y$"
- se introduce 3,5
- se aprieta la tecla "="
- se obtiene 1,186212638.

Algunas máquinas exigen que en el primer paso se introduzca 3,5 y en el tercer paso el número 1,05. Algunas máquinas tienen un visor más pequeño (con menos dígitos) y la respuesta podría ser 1,186213. En ambos casos se trata de aproximaciones de un número real, cuya expresión decimal contiene infinitas cifras. $1{,}05^{3{,}5}$ puede interpretarse como el monto que genera un capital de \$1 colocado a interés compuesto, a la tasa del 5% anual durante 3,5 años. Obsérvese que 1,19 es una aproximación suficiente para este último problema, dado que sólo existe la posibilidad de cobrar o pagar con fracciones que llegan hasta los centésimos.

*Propiedades de la potenciación*

Sean: a, b, n y m números naturales, a y b $\neq$ 0.

1. $a^n.a^m = a^{n+m}$ (producto de potencias de igual base)
2. $\dfrac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$ (cociente de potencias de igual base)

3. $a^n.b^n = (a.b)^n$ (producto de potencias de igual exponente)
4. $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$ (cociente de potencias de igual exponente)
5. $(a^n)^m = a^{n.m}$ (potencia de potencia)

Ejemplo: utilizar las propiedades anteriores para simplificar $\frac{2^8.4^7.8^5}{(2.4)^7.8^4}$.

$$\frac{2^8.4^7.8^5}{(2.4)^7.8^4} = \frac{2^8.4^7.8^5}{2^7.4^7.8^4} = \frac{2^8}{2^7} x \frac{4^7}{4^7} x \frac{8^5}{8^4} = 2^{8-7} x 4^{7-7} x 8^{5-4} = 2^1 x 4^0 x 8^1 = 16.$$

***Radicación***

<u>Definición</u>: $\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow a = b^n$

Ejemplo: $\sqrt[3]{8} = 2$ *porque* $8 = 2^3$. La forma más fácil de resolver los problemas de radicación, consiste en transformarlos en problemas de potenciación, adoptando la siguiente definición complementaria:

$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$$

y utilizando la máquina de calcular con las teclas "$x^y$" o "$x^{1/y}$".

Cuando se tienen varios radicales, resultan útiles los siguientes resultados.

*Propiedades de la radicación*

1. $\sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a.b}$
2. $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$
3. $\sqrt[n]{a}.\sqrt[m]{a} = \sqrt[n.m]{a^{n+m}}$
4. $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n.m]{a}$

La expresión $\sqrt[n]{a}$ está definida en el conjunto de los números reales si:

- $n$ es impar y $a$ un real cualquiera, o
- $n$ es par y $a$ es un real no negativo.

Que la expresión *está definida* significa que puede calcularse exactamente o con una aproximación decimal (las más de las veces) por ejemplo, con la ayuda de una calculadora. Que *no existe* la expresión para un radicando negativo y un índice par, significa que se trata de una operación no permitida dentro del conjunto de los números reales.

### *Logaritmación*

Definición: $\log_b x = a \Leftrightarrow x = b^a$

Para que tenga sentido (para que sea un número real) la expresión del logaritmo, se requieren tres condiciones a saber:

$$x > 0,\ \ b > 0\ \ y\ \ b \neq 1.$$

De la definición se deduce que la logaritmación es una de las operaciones inversas de la potenciación: se conoce la potencia de la base (b) y el resultado de la potencia (x), y la incógnita es el exponente (a) al cual debe elevarse la base para obtener aquel resultado (x). De la propia definición se deduce que:

1. $\log_b b = 1$
2. $\log_b 1 = 0$
3. $\log_b b^n = n. \log_b b$

Con un poco de trabajo adicional se demuestran las siguientes propiedades.

4. $\log_b a + \log_b c = \log_b (a.c)$
5. $\log_b a - \log_b c = \log_b (a/c)$
6. $\log_b a = \dfrac{\log_c a}{\log_c b}$

*Problema*

Un capital de \$10.000 se coloca al 3% mensual efectivo de interés compuesto. Se pide calcular los intereses acumulados luego de: a) 5 meses, y b) 5 meses y 18 días.

La fórmula del monto generado por un capital (C) colocado a interés compuesto a la tasa i durante t períodos es:

$$M = C.(1 + i)^{t}$$

La fórmula es válida siempre que la tasa de interés y el período de la colocación se midan en la misma unidad de tiempo (por ejemplo, en meses). La fórmula para calcular el interés es:

$$I = M – C$$

Ahora es posible resolver los dos problemas antes planteados.

a) Interés generado en 5 meses: $M – C = 10.000(1+0,03)^5 – 10.000 = \$1.592,74$.
b) En 5 meses y 18 días: $M – C = 10.000(1+0,03)^{5+(18/30)} – 10.000 = \$1.654,58$.

### *Expresiones decimales y notación científica*

Las calculadoras científicas, salvo excepciones, no devuelven los resultados de las operaciones en forma fraccionaria, sino que lo hacen con notación decimal. Los siguientes son algunos ejemplos:

$$1/3 = 0{,}33333333333$$

$$\sqrt{2} = 1{,}41421356$$

$$\log 2 = 0{,}30103$$

$$L2 = 0{,}693147$$

Para aprovechar mejor el espacio del visor, la calculadora utiliza, cuando lo necesita, la notación científica con potencias de 10. Ejemplos:

$$0{,}0000008 = 8 \text{ x } 10^{-7}$$

$$3.456.500.000 = 3{,}4565 \text{ x } 10^{9}$$

*Ejemplos de operaciones prohibidas en el conjunto de los números reales*

$$\frac{5}{0} \qquad 0^0 \qquad \sqrt[2n]{-a} \quad con\ a > 0 \qquad \log_1 a \qquad \log_{-3} a \qquad \log_{10} - 4$$

***Origen de los números  e  y  π***

π es la constante por la que se debe multiplicar el diámetro de una circunferencia para hallar el perímetro de dicha circunferencia. Los antiguos griegos creían que dicha constante era igual al cociente 223 entre 71 (que es una excelente aproximación). Resulta que π es un número real, no racional, que ni siquiera puede escribirse usando radicales. Se dice que π es un número "trascendente", lo que significa que dicho número no puede ser raíz de ninguna ecuación polinómica de coeficientes enteros.

El número **e** (en honor del matemático Euler[4]) es otro real trascendente. Se lo utiliza como base de los logaritmos "naturales" o "neperianos". Puede obtenerse una aproximación de dicho número tomando algunos términos de la suma infinita:

$$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + ........$$

o tomando  n  grande en la expresión  $(1 + \frac{1}{n})^n$. Por ejemplo:  $e \cong (1+0{,}01)^{100} \cong 2{,}7048$.
Una mejor aproximación del número **e** es 2,718281828.

***Una aplicación de logaritmos***

En el problema de la colocación financiera teníamos un capital de \$10.000 colocado al 3% de interés mensual efectivo. Nos preguntamos ahora por cuánto tiempo deberá permanecer colocado el capital para generar \$2.000 de interés.

---

[4] Leonardo Euler (1707-1783) matemático suizo que además investigó en el campo de la física, la química, la metafísica y la astronomía.

Solución: generar \$2.000 de interés es lo mismo que generar un monto de \$12.000. El planteo es entonces así:

$$12.000 = 10.000.(1+0,03)^{t}$$

donde la incógnita a encontrar es "t", el tiempo que debe permanecer colocado el capital para generar \$2.000 de interés. Operando en la ecuación resulta:

$$1,03^{t} = 1,2$$

Pasando a logaritmos: $\log(1,03^{t}) = \log 1,2$ y utilizando una de las propiedades de logaritmos se obtiene:

$$t \times \log 1,03 = \log 1,2$$

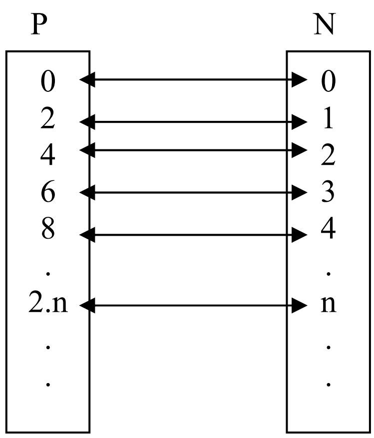
$$t = \frac{\log 1,03}{\log 1,2} = 6,168$$

Encontramos que el capital debe colocarse por aproximadamente 6 meses y 5 días para generar \$2.000 de interés.

***Cotas y extremos de un conjunto***

Los conjuntos de números pueden ser finitos o infinitos. N, E, Q y R son ejemplos de conjuntos infinitos. En virtud de la densidad de los racionales y de los reales, sabemos que entre dos racionales (reales) hay también infinitos racionales (reales).

Se dice que un conjunto es *infinito numerable* si sus elementos se pueden hacer corresponder biunívocamente con el conjunto de los naturales. Aunque parezca una paradoja, el conjunto de los números naturales pares (P) se puede poner en correspondencia biunívoca con N; en consecuencia, P es un conjunto infinito numerable.



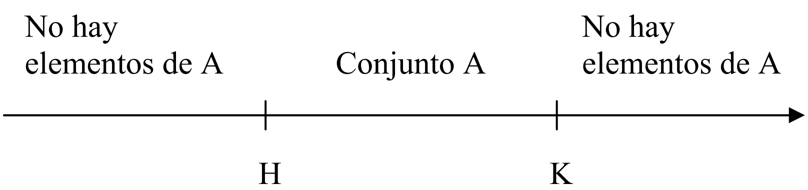

No es fácil, pero se puede demostrar que Q es un conjunto infinito numerable. En cambio, R es un conjunto infinito no numerable (tampoco es fácil la demostración), y también es un conjunto infinito no numerable cualquier intervalo de números reales.

¿Cuáles son los conjuntos de números más usuales en Matemática? La respuesta es: el conjunto N, el conjunto R y ciertos subconjuntos de R que se definen a continuación.

Intervalo cerrado de extremos a y b: $[a, b] = \{x: x \in R, a \leq x \leq b\}$
Intervalo abierto de extremos a y b: $(a, b) = \{x: x \in R, a < x < b\}$
Intervalo semiabierto por izquierda: $(a, b] = \{x: x \in R, a < x \leq b\}$
Intervalo semiabierto por derecha: $[a, b) = \{x: x \in R, a \leq x < b\}$
Semi-recta de los puntos a la derecha de K, con K incluido = $\{x: x \in R, x \geq K\}$
Cuando K es "grande", este conjunto también se conoce como "entorno de + infinito".
Semi-recta de los puntos a la izquierda de H, con H excluido = $\{x: x \in R, x \leq H\}$
(Si H es negativo y "grande", este conjunto se denomina "entorno de – infinito").
Entorno de centro "a" y radio "r": $\cup_{a,r} = \{x: x \in R, a - r < x < a + r\}$
Entorno *reducido* de centro "a" y radio "r": $\cup^*_{a,r} = \{x: x \in R, x \neq a, a - r < x < a + r\}$

Definición: Se dice que un conjunto A de números está *acotado* si se cumplen a la vez las dos condiciones siguientes:

a) $\exists$ un número K tal que $x \leq K \ \forall \ x \in A$
b) $\exists$ un número H tal que $x \geq H \ \forall \ x \in A$




Se dice que el conjunto A está *acotado superiormente* si se cumple la condición a) Se dice que el conjunto A está *acotado inferiormente* si se cumple la condición b). Se dice que K es una *cota superior* del conjunto A, y que H es una *cota inferior* del conjunto A.

*Observaciones*

1. Si el conjunto A es finito, entonces está acotado. Alcanza con ordenar los elementos de A de menor a mayor, y entonces el menor es una cota inferior mientras que el mayor valor de A es una cota superior.
2. Si K es una cota superior del conjunto A, entonces todo número mayor que K también es cota superior de A. Si H es una cota inferior del conjunto A, entonces todo número menor que H también lo es.
3. Si el conjunto A es infinito, entonces puede o no estar acotado. Ejemplos:
   - N está acotado inferiormente pero no superiormente. 0 es una cota inferior. No es posible encontrar un K: $n \leq K \ \forall \ n \in N$. Entonces, N no está acotado.
   - El conjunto E no está acotado inferior ni superiormente.
   - [a, b] es un conjunto acotado. Por ejemplo, b y (b+1) son cotas superiores, mientras que a y (a-3) son cotas inferiores.
   - $\cup_{a,r}$ es un conjunto acotado. (a-r) y (a+r) son una cota inferior y otra superior.

Si un conjunto A admite cotas superiores, la menor de las cotas superiores se llama *supremo del conjunto A.* Si el supremo, además, pertenece al conjunto A, entonces el supremo se llama *máximo o extremo superior del conjunto A.* Análogamente, si el conjunto A admite cotas inferiores, la mayor de las cotas inferiores se llama *ínfimo del conjunto A*, y si el ínfimo pertenece al conjunto A, entonces se llama *mínimo o extremo inferior del conjunto A.*

*Problema*

En la Edad Media una viejita cuenta sus gallinas. Si cuenta de 2 en 2 le sobra una, si cuenta de 3 en 3 le sobra una, si cuenta de 4 en 4 le sobra una y si cuenta de 5 en 5 le sobra una. Hallar cuántas gallinas tiene la viejita. a) Hallar el conjunto de soluciones posibles del problema. b) Hallar el mínimo de dicho conjunto.

***El símbolo sumatoria***

Los elementos de un conjunto, a veces, se pueden escribir mediante una fórmula, lo que permite simplificar notablemente la notación. Por ejemplo, el conjunto de los números naturales pares puede simbolizarse por "2.n" donde n XN. Análogamente, la expresión "2.n + 1" simboliza un número natural impar cualquiera, y $n^2$ representa a los números naturales que son cuadrados perfectos.

En muchas aplicaciones es necesario realizar operaciones tales como la suma o el producto de números que tienen "la misma forma" porque pertenecen a conjuntos cuyos elementos están relacionados mediante una fórmula general. En estos casos, la suma de dichos números puede escribirse utilizando la letra sigma mayúscula (n). La expresión:

$$\sum_{i=1}^{8} Fórmula(i)$$

indica que se deben sumar 8 sumandos los cuales resultan de sustituir el índice "i" en la "Fórmula(i)" por los números naturales 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 y 8. Entonces:

$$\sum_{i=1}^{8} 2.i = 2.1 + 2.2 + 2.3 + 2.4 + 2.5 + 2.6 + 2.7 + 2.8$$

$$\sum_{i=1}^{5} i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2$$

$$\sum_{i=3}^{6} (2.i - 1) = 5 + 7 + 9 + 11$$

¿Cómo puede escribirse la suma (17 + 21 + 25 + 29 + 33 + 37 + 41) mediante el símbolo sumatoria? Es necesario explicitar la "Fórmula(i)" y determinar el recorrido del índice "i". Para encontrar la fórmula, puede observarse que se trata de sumandos impares, que van saltando de 4 en 4. Entonces, una fórmula apropiada es (4.i + 1) con i = 4, 5, 6, 7, 8, 9 y 10.

$$17 + 21 + 25 + 29 + 33 + 37 + 41 = \sum_{i=4}^{10}(4.i+1)$$

Obsérvese que (4.i – 3) también sirve como fórmula para resolver el problema. En tal caso, ¿qué valores debería tomar el índice i?

Sea el conjunto A con n números, cada uno de los cuales se simboliza con $x_i$.

$$A = \{x_1, x_2, x_3, \ldots.. , x_n\}$$

La suma de todos los elementos de A es: $\sum_{i=1}^{n} x_i$ y el promedio de los elementos de A es:

$$\frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots.. + x_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

Supongamos ahora que los elementos del conjunto se pueden disponer en un cuadro de doble entrada (cuadro de filas y columnas), disposición que se conoce con el nombre de "matriz".

| | $C_1$ | $C_2$ | $C_3$ | …….. | $C_n$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $F_1$ | $x_{11}$ | $x_{12}$ | $x_{13}$ | …….. | $x_{1n}$ |
| $F_2$ | $x_{21}$ | $x_{22}$ | $x_{23}$ | …….. | $x_{2n}$ |
| $F_3$ | $x_{31}$ | $x_{32}$ | $x_{33}$ | …….. | $x_{3n}$ |
| ….. | | | | | |
| $F_m$ | $x_{m1}$ | $x_{m2}$ | $x_{m3}$ | …….. | $x_{mn}$ |

Esta matriz tiene m filas ($F_1$, $F_2$, ….. , $F_m$) y n columnas ($C_1$, $C_2$, ….. , $C_n$). La suma de los elementos de la primera fila es $\sum_{i=1}^{n} x_{1_i}$. La suma de los elementos de la tercera columna es $\sum_{i=1}^{m} x_{i3}$. Para facilitar la notación en este caso resulta conveniente utilizar índices distintos para filas y columnas. Entonces, la suma de los elementos de la tercera columna se puede expresar también así: $\sum_{j=1}^{m} x_{j3}$.

Si se trata ahora de sumar todos los elementos de la matriz, entonces se puede utilizar una "doble sumatoria":

Suma de todos los elementos de la matriz: $\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} x_{ij}$

*Propiedades de la sumatoria*

1. Constante multiplicativa: $\sum (K.x_i) = K.\sum x_i$
2. Sumatoria de una suma: $\sum (x_i + y_i) = \sum x_i + \sum y_i$

3. Interversión del símbolo: $\sum_i \sum_j x_{ij} = \sum_j \sum_i x_{ij}$

Si en lugar de sumar los elementos $x_i$ se trata de multiplicarlos, entonces se utiliza la expresión *productoria* mediante el símbolo pi mayúscula:

$$x_1.x_2.x_3.\ldots.x_n = \prod_{i=1}^{n} x_i$$

Por ejemplo, para representar el producto de 1x2x3x4x…..x25 mediante el símbolo productoria, se tiene:

$$1x2x3x4x\ldots..x25 = \prod_{i=1}^{25} i$$

Se recuerda que para este producto particular – el producto de un número natural por todos los menos que él hasta llegar al uno o también "factorial" del número– existe una notación aún más simple usando el signo final de admiración:

$$1x2x3x4x\ldots..x25 = 25!$$

## Repartido Práctico 3.1: Operaciones con números. Uso de la calculadora

**Ejercicio 1**

Utilizando las propiedades de las operaciones racionales, indicar si las siguientes afirmaciones son verdaderas (V) o falsas (F).

| | V | F |
|---|---|---|
| a) 5a.(x+3) = 5a.x +15a $\forall$a,x | □ | □ |
| b) (2 – x) + y = 2 + (y – x) $\forall$x,y | □ | □ |
| c) (-2).(x – y) = -2x – 2y $\forall$x,y | □ | □ |
| d) $\dfrac{4+40}{4} = 40$ | □ | □ |
| e) $\dfrac{x.(x+2)+x}{x.(x+1)} = \dfrac{(x+2)+x}{x+1}$ $\forall$x | □ | □ |
| f) $\dfrac{x.(x+2)+x}{x.(x+1)} = \dfrac{x+3}{x+1}$ $\forall$x | □ | □ |

g) (-1).(-2).(- 3 – 4) = - 10 □ □

h) (-1).(-2).(- 3 – 4) = - 14 □ □

i) $2^0 = 1$ □ □

j) $2^1 = 0$ □ □

k) $\sqrt{0} = 0$ □ □

l) $\sqrt{1} = 1$ □ □

m) $\sqrt{2} = 2$ □ □

n) $\dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ □ □

o) $\left(\dfrac{1}{2^{-1}}\right)^{-1} = \dfrac{1}{2}$ □ □

p) $\left[\dfrac{1}{(-2)^{-1}}\right]^{-2} = \dfrac{1}{4}$ □ □

**Ejercicio 2**

Calcular con la calculadora, aproximando con dos decimales.

a) $\sqrt{3} =$

b) $\dfrac{3}{\sqrt{3}} =$

c) $\dfrac{1}{\sqrt{7}} =$

d) $\dfrac{5}{\sqrt{11}} =$

e) $\dfrac{3}{\sqrt{16}} =$

f) $\dfrac{-3}{\sqrt[3]{8}} =$

g) $\frac{-2}{\sqrt[3]{-8}} =$

h) $\left(\frac{1000}{9}\right)^{-\frac{2}{3}} =$

i) $\sqrt[4]{2} =$

j) $\frac{\sqrt{18}}{\sqrt[3]{18}} =$

k) $(1 + 0{,}03)^{2,5} =$

l) $(1 + 0{,}02)^{24} =$

m) $1/(1 + 0{,}02)^{24} =$

n) log 23 =

o) log 2 + log 5 =

p) log 20 – log 2 =

q) log 10.000 =

r) $2{,}3^{\,2,3} =$

## Repartido Práctico 3.2: Sumatoria, cotas y extremos de un conjunto

**Ejercicio 1**

Una canasta de consumo alimenticio se compone de 6 artículos, con los siguientes datos.

| ARTÍCULO(i) | CANTIDAD($q_i$) | PRECIO($p_i$) | COSTO($c_i$) |
|---|---|---|---|
| Leche | 20 | 6 | 5 |
| Vino | 12 | 20 | 16 |
| Carne | 10 | 30 | 20 |
| Pan chico | 40 | 2 | 1 |
| Queso | 4 | 48 | 30 |
| Yerba | 5 | 25 | 20 |

SE PIDE:
1. Calcular el valor de la canasta a precios de venta (presupuesto mensual).
2. Calcular el valor de la canasta a precios de costo.
3. Calcular el margen comercial total.
4. Calcular el margen de contribución por producto de la canasta.
5. Calcular el margen de contribución relativo por producto de la canasta.

**Ejercicio 2**

Una canasta de consumo alimenticio se compone de **k** artículos (k > 100), con los siguientes datos.

| ARTÍCULO | CANTIDAD | PRECIO | COSTO |
|---|---|---|---|
| 1 | $Q_1$ | $P_1$ | $C_1$ |
| 2 | $Q_2$ | $P_2$ | $C_2$ |
| 3 | $Q_3$ | $P_3$ | $C_3$ |
| --- | --- | --- | --- |
| k | $Q_k$ | $P_k$ | $C_k$ |

<u>SE PIDE:</u>

Plantear utilizando el símbolo de sumatoria.

1. El valor de la canasta a precios de venta.
2. El valor de la canasta a precios de costo.
3. El valor de la canasta a precios de venta de los primeros 20 artículos.
4. El valor de la canasta a precios de costo de los últimos 15 artículos.
5. El margen comercial total.
6. El margen de contribución relativo promedio, ponderando con el valor de cada producto en el presupuesto mensual.
7. Calcular el margen de contribución relativo promedio, así ponderado, con los datos del Ejercicio 1.

**Ejercicio 3**

Calcular las siguientes sumas.

$$a)\ \sum_{i=1}^{12} i =$$

$$b)\ \sum_{i=1}^{9} i^2 =$$

$$c)\ \sum_{i=4}^{11} (2.i-1) =$$

**Ejercicio 4**

Escribir utilizando el símbolo de sumatoria:

a) 2 + 4 + 6 + 8 + ... +100 =
b) 1 + 3 + 5 + 7 + ... +75 =
c) 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + ... + 1024 =
d) 17 + 21 +25 +29 + 33 + 37 + 41 + 45 + 49 =
e) 1 – 2 + 4 – 8 + 16 - ... + 1024 =

f) $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+...+\frac{1}{2048}=$

g) $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+...=$

h) $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{100}=$

i) $1+2+\frac{4}{2}+\frac{8}{6}+\frac{16}{24}+\frac{32}{120}+.....=$

**Ejercicio 5**

Hallar, si existen, una cota inferior y una cota superior de los siguientes conjuntos.

A = {1,3,5,7,...,101}
B = {x: x = 1 + 1/n, con n $\in$ N}
C = {x: x $\in$ [0,2]}
D = {x: x $\in$ N, x es divisible entre 2}
E = { x: x $\in$ N, x es un divisor de 36}
F = {x: x $\in$ N, x es el resto de dividir 36 entre un natural cualquiera}
G = {x: x $\in$ R, $x^2 + 2.x - 3 = 0$}
H = {x: x $\in$ R, $x^2 + x + 1 = 0$}

**Ejercicio 6**

Se tiene una cuerda de largo L. Se puede construir con la cuerda un cuadrado o un hexágono regular, ambos de perímetro L. Se quiere saber cuál de los dos tiene mayor área.

# FACULTAD DE CIENCIAS SOCIALES
# DEPARTAMENTO DE ECONOMÍA

## DIPLOMA EN ECONOMÍA PARA NO ECONOMISTAS

### ASIGNATURA: MATEMÁTICA APLICADA A LA ECONOMÍA

### MATERIAL DE CONSULTA Y CASOS PRÁCTICOS

### CURSO 2004
### PARTE II

**Profesor: David Glejberman**

## 4. POLINOMIOS Y EXPRESIONES ALGEBRAICAS

***Monomios***

Se conocen como *operaciones algebraicas*[5] a la suma, resta, multiplicación y división. Vamos a concentrarnos en primer lugar en las operaciones de suma, resta y multiplicación.

Definición: Se llama *monomio* al producto de números por letras. Los “números” pertenecen al conjunto de los reales y las “letras” son números desconocidos o “indeterminadas”.

Así, son monomios:

$3.x.8.x$
$y.5.y.y$
$z.z.x.y.x.3.z.z.z$
$y.x$

Por convención, se acostumbra utilizar las últimas letras del alfabeto. Como las letras representan números, entonces es posible operar con ellos como si fueran números: valen para los monomios todas las propiedades del producto de números reales. Por eso, los ejemplos anteriores se pueden escribir colocando los números a la izquierda y las letras a la derecha, por ejemplo, en orden alfabético, en virtud de la propiedad conmutativa del producto de números:

$24.x^2$
$5.y^3$
$3.x^2.y.z^5$
$x.y$

En el monomio se pueden reconocer ciertas “partes”:

- el *coeficiente*: es la parte numérica del monomio (24, 5, 3 y 1 en los ejemplos)
- la *parte literal*: es el producto de las indeterminadas ($x^2$, $y^3$, $x^2.y.z^5$, $x.y$ en los ejemplos)
- el *grado* del monomio: es la cantidad de letras que figuran en la parte literal (2, 3, 8 y 2 en los ejemplos). Cuando el monomio es un número, no hay letras, el grado del monomio es cero.

***Polinomios***

Definición: Se llama *polinomio* a la suma o resta de monomios.

Son ejemplos de polinomios:

$24.x^2 - y^3$
$2.x^1$
$x^1 + y^1 + z^1$
$2.x^0 + 3.x^1 + 4.x^2 - 5.x^3 + 6.x^4$
$x^4 + x^2 + x^0$

---

[5] Álgebra proviene del árabe (*algiabr*) y se utiliza para denominar el estudio de operaciones y propiedades de ciertos entes representados por símbolos, generalmente letras. El origen del álgebra parece que debe situarse en India y Persia. Existen antecedentes entre los griegos (Diofanto, siglo III), aunque fueron los árabes quienes la introdujeron en Europa en el siglo IX.

Los polinomios pueden depender de una o más indeterminadas (una o más letras). El *grado de un polinomio* es el mayor de los grados de sus monomios.

Ejemplos: $gr(24.x^2 - y^3) = 3$
$gr(2.x^1) = 1$
$gr(x^1 + y^1 + z^1) = 1$
$gr(2.x^0 + 3.x^1 + 4.x^2 - 5.x^3 + 6.x^4) = 4$
$gr(x^4 + x^2 + x^0) = 4$

<u>Definición</u>: Un polinomio en varias indeterminadas es *homogéneo de grado n* si todos sus monomios son de grado n.

Ejemplos:

$x^3 + y^3$ es homogéneo de grado 3
$x^2 + 2.x.y + y^2$ es homogéneo de grado 2
$x^3$ es homogéneo de grado 3
$x^2 + 2.y$ no es un polinomio homogéneo.

Consideremos ahora polinomios en una sola indeterminada (sólo la letra x). Algunas simplificaciones en la notación. Cuando un monomio tiene coeficiente cero, entonces se lo elimina del polinomio. Cuando el grado de un monomio es 1, entonces no se escribe el exponente 1 ($3.x^1$ se escribe $3.x$). El monomio $5.x^0$ se escribe simplemente 5.

Se dice que un polinomio (en una sola indeterminada) está *reducido* si todos sus monomios son de distinto grado.

Ejemplos:

$-3.x^5 + 5.x^3 - 2.x$ es un polinomio reducido
$2.x^4 + 4.x^2 - 5.x^4$ no es un polinomio reducido

Para obtener un polinomio reducido en el segundo ejemplo, alcanza con realizar la operación $2.x^4 - 5.x^4 = (2 - 5).x^4 = -3.x^4$.

Se dice que un polinomio está *ordenado* si los monomios aparecen en orden creciente o decreciente de sus grados.

Ejemplos:

$2 + 3.x + 4.x^2 - 5.x^3 + 6.x^4$ es un polinomio ordenado
$2.x^4 + 4.x^2 - 5.x^3$ no es un polinomio ordenado

Se dice que un polinomio de grado n es *completo* si en su desarrollo figuran todos los monomios de grado menor o igual que n, con coeficientes diferentes de cero.

Ejemplos:

$2 + 3.x + 4.x^2 - 5.x^3 + 6.x^4$ es un polinomio completo
$-3.x^5 + 5.x^3 - 2.x$ no es un polinomio completo (los monomios de grado 2 y de grado 0 tienen coeficiente 0)

El polinomio $2 + 3.x + 4.x^2 - 5.x^3 + 6.x^4$ es un polinomio reducido, ordenado y completo.

Los polinomios son entidades matemáticas –como lo son los números y los conjuntos–. Se acostumbra denominarlos con letras mayúsculas de nuestro alfabeto –como a los conjuntos– y cuando es necesario se explicita el nombre de la indeterminada.

$$P = 2 + 3.x + 4.x^2 - 5.x^3 + 6.x^4$$
$$P(x) = 2 + 3.x + 4.x^2 - 5.x^3 + 6.x^4$$

<u>Definición</u>: Dos polinomios son iguales si tienen el mismo grado y, una vez reducidos y ordenados, tienen iguales todos los coeficientes respectivos.

Ejemplo: Los polinomios $P = 2 + 3.x + 4.x^2 - 5.x^3 + 6.x^4$ y $Q = 2 + 3.x + 4.x^2 - 5.x^3 + a.x^4 + b.x^5$, donde a y b son números, son iguales sólo si $a = 6$ y $b = 0$.

Si los coeficientes del polinomio se restringen a los números dígitos [0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9] entonces un polinomio no es otra cosa que el desarrollo de la expresión de un número en base "x":

$$5x10^3 + 4x10^2 + 8x10^1 + 9x10^0 = 5489_{(10}$$
$$3x5^6 + 2x5^4 + 1x5^3 + 3x5^2 + 4x5^1 = 3021340_{(5}$$

En el segundo ejemplo los coeficientes se restringen al conjunto [0, 1, 2, 3, 4], que son los únicos símbolos necesarios para trabajar en base 5. Muchas civilizaciones primitivas trabajaban en base 5. Los mayas usaban la base 20. Los árabes fueron los primeros en adoptar la base 10.

### *Operaciones con polinomios*

Con los polinomios es posible definir operaciones. De hecho, se pueden realizar con ellos todas las operaciones algebraicas. Y como un polinomio no es otra cosa que la suma, resta y producto de números y letras –que, como ya dijimos, representan números– entonces, todas las propiedades de los números son trasladables a los polinomios.

Así, el conjunto de los polinomios tiene *estructura de grupo* respecto de la suma. Se cumplen las propiedades de la suma: conmutativa, asociativa, existencia de neutro y existencia de opuesto. Para hallar el opuesto de un polinomio alcanza con cambiar todos los signos de sus coeficientes.

Ejemplo: Para sumar los polinomios $T = 3.x^3 - 2.x + 8$ y $R = 4.x^2 + 5.x - 6$ se procede como en el esquema que sigue (luego de ordenar y reducir los sumandos, si fuera necesario).

$$\begin{array}{rr} & 3.x^3 + 0.x^2 - 2.x + 8 \\ + & 4.x^2 + 5.x - 6 \\ \hline & 3.x^3 + 4.x^2 + 3.x + 2 \end{array}$$

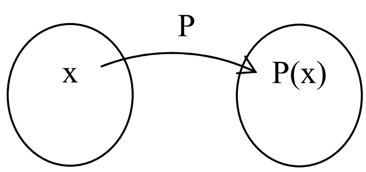
El producto de polinomios es una operación que verifica las propiedades conmutativa, asociativa y existencia de neutro –el neutro del producto es el polinomio 1– pero no se cumple la existencia de inverso. Por este motivo, el conjunto de los polinomios no tiene *estructura de cuerpo*. El inverso del polinomio (x + 1) es la expresión algebraica $\dfrac{1}{x+1}$, que no es un polinomio (no se puede escribir como suma o resta de monomios).

Para multiplicar dos polinomios se puede aplicar la propiedad distributiva generalizada. Ejemplo: para multiplicar $(3.x^2 + 2.x - 1)$ por $(x^3 - 2.x - 3)$ es necesario multiplicar cada monomio del primer factor por cada monomio del segundo factor, luego sumar todos los productos y reducir el resultado.

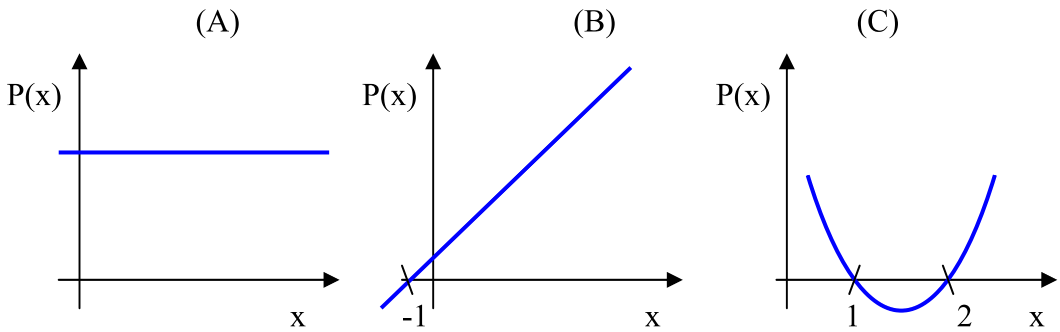
$$
\begin{array}{rl}
 & 3.x^2 + 2.x - 1 \\
\mathbf{X} & x^3 - 2.x - 3 \\
\hline
 & 3.x^5 + 2.x^4 - x^3 \\
 & \qquad - 6.x^3 - 4.x^2 + 2.x \\
 & \qquad\qquad - 9.x^2 - 6.x + 3 \\
\hline
 & 3.x^5 + 2.x^4 - 7.x^3 - 13.x^2 - 4.x + 3
\end{array}
$$

***Función polinómica***

A partir de la entidad polinomio es posible definir funciones de dominio y codominio reales, haciendo corresponder a cada número real “x” el valor que resulta de sustituir dicho número en P(x).




A estas funciones se las conoce como *polinómicas* y su gráfico suele ser bastante fácil de representar en un par de ejes cartesianos ortogonales cuando el grado del polinomio es bajo. En particular, cuando el polinomio es de grado 0 ó 1 el gráfico de la función polinómica es una recta, y cuando el grado es 2 el gráfico es una parábola.



***Raíces del polinomio***

Se denomina *raíz* de la función polinómica al valor de la indeterminada (en el lenguaje de funciones se le llama “variable”) que hace que el valor de la función polinómica sea nulo.

$$\alpha \text{ es raíz de P} \leftrightarrow P(\alpha) = 0$$

Gráficamente, la raíz de P es un valor de x donde el gráfico de la función corta al eje Ox. En el gráfico (A) no hay raíces, en el gráfico (B) la única raíz es $\alpha = -1$ y en el gráfico (C) la función polinómica tiene dos raíces: $\alpha_1 = 1$ y $\alpha_2 = 2$.

Dado un polinomio, los problemas que pueden presentarse respecto de sus raíces son:

- cuántas raíces reales tiene
- cómo encontrar todas sus raíces reales
- cómo aproximarlas cuando son reales irracionales.

Estos problemas, que ya se habían planteado griegos y árabes a comienzos de nuestra era, recién tuvieron respuesta a partir del siglo XVI y siguientes. La propiedad más relevante sobre raíces de polinomios expresa: *Todo polinomio de grado n tiene a lo sumo n raíces reales.* El teorema proporciona una cota superior del número raíces, pero no resuelve los problemas arriba enunciados. Para encontrar las raíces reales existen varios métodos que permiten obtenerlas exactamente: el teorema de la raíz racional, la propiedad que relaciona coeficientes del polinomio con sus raíces, el teorema de la descomposición factorial y el método de Ruffini para “bajar” el grado del polinomio. Cuando las raíces son reales irracionales existen métodos para aproximarlas mediante números decimales prefijando el máximo error tolerable. En este curso no trataremos ninguno de estos métodos. Veremos sí algunos casos particulares.

Cuando el polinomio es de primer grado, siempre admite una raíz real (única).

$$P(x) = a + b.x$$

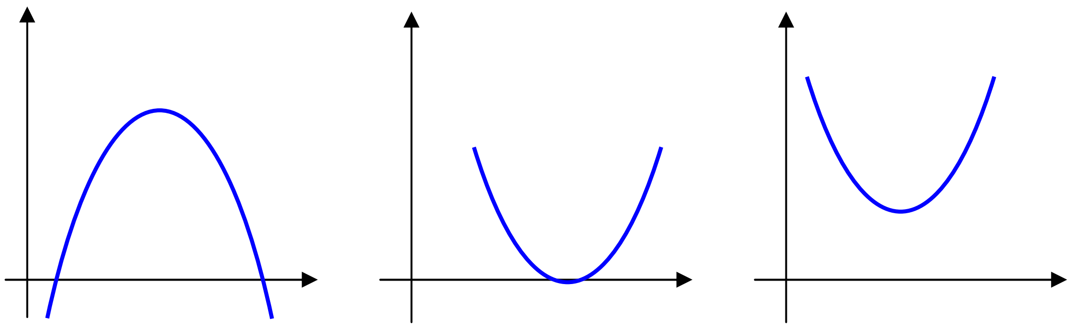
$$\alpha = -a/b$$

Cuando el polinomio es de segundo grado, admite raíces reales si la expresión denominada “discriminante” es mayor o igual que 0.

$$P(x) = a.x^2 + b.x + c$$

$$\Delta = b^2 - 4.a.c \text{ es el discriminante}$$

Las expresiones $\alpha_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2.a}$ y $\alpha_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2.a}$ proporcionan las dos raíces de la función polinómica, en caso que $\Delta$ sea mayor que cero. Si $\Delta = 0$, entonces las dos raíces son iguales. Pero si el discriminante es negativo, entonces la función no tiene raíces. Estas situaciones se pueden visualizar gráficamente.



$\Delta > 0$ $\Delta = 0$ $\Delta < 0$

El coeficiente del monomio de grado 2 cumple un papel relevante en la forma del gráfico: si $a > 0$ entonces la parábola “mira” hacia arriba, y si $a < 0$ entonces los cuernos de la parábola miran hacia abajo.

De acuerdo con el Teorema de Descomposición Factorial, si $\alpha_1$ y $\alpha_2$ son las raíces del polinomio $P(x) = a.x^2 + b.x + c$, entonces el polinomio también se puede expresar así:

$$P(x) = a.(x - \alpha_1).(x - \alpha_2)$$

Más en general, si el polinomio es de grado n y admite las raíces $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n$ y $a_n$ es el coeficiente del monomio de mayor grado, entonces el polinomio puede expresarse como producto así:

$$P(x) = a_n.(x - \alpha_1).(x - \alpha_2).(x - \alpha_3)\ldots.(x - \alpha_n)$$

Si el polinomio P es de grado n y admite sólo k raíces reales ($k < n$), entonces todavía P se puede factorizar así:

$$P(x) = a_n.(x - \alpha_1).(x - \alpha_2).(x - \alpha_3)\ldots.(x - \alpha_k).\ Q(x)$$

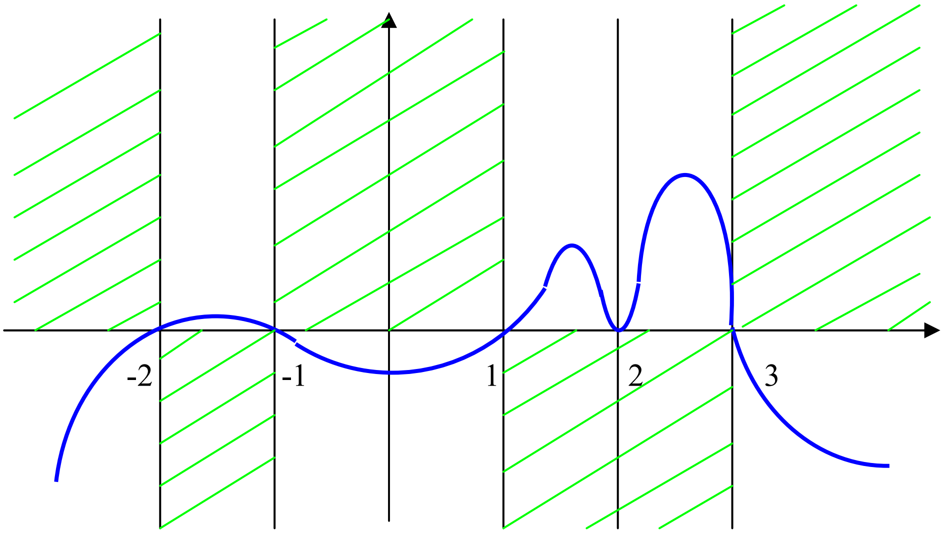
donde Q es un polinomio de grado $(n - k)$. Se puede demostrar que el polinomio Q es de grado par (y que sus raíces son pares de números complejos conjugados).

Ejemplo: El polinomio P(x) es de grado 6, el monomio de 6º grado es (-4) y admite las raíces 1, 2, 2, 3, -1 y -2. Expresar el polinomio en forma factorial.

$$P(x) = -4.(x - 1).(x - 2).(x - 2).(x - 3).(x-(-1)).(x -(-2))$$
$$P(x) = -4.(x - 1).(x - 2)^2.(x - 3).(x + 1).(x + 2)$$

***Signo del polinomio***

¿Cómo es aproximadamente el gráfico de la función polinómica?




Las raíces de P son puntos de corte del gráfico con el eje Ox. Las raíces consecutivas determinan intervalos: (-∞, -2), (-2, -1), (-1, 1), (1, 2), (2, 3) y (3, +∞). Obsérvese que en esos intervalos el signo de P es o bien positivo o bien negativo (no hay cambios de signo dentro de esos intervalos). De acuerdo con el gráfico precedente, el esquema del signo de P es:

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | - | 0 | + | 0 | - | 0 | + | 0 | + | 0 | - |
| Sgn P | | -2 | | -1 | | 1 | | 2 | | 3 | |

En el esquema se colocan todas las raíces y en los intervalos que éstas determinan se señala el signo del gráfico (+ ó – según corresponda). ¿Existe alguna regla general para hallar el signo de un polinomio de grado cualquiera? La respuesta es afirmativa si se conocen todas las raíces y el signo del coeficiente del monomio de más alto grado ($a_n$). En este caso el polinomio se puede factorizar y hallar el signo en cada intervalo mediante la regla del producto de números. Si se trabaja de derecha a izquierda, el primer intervalo tiene el signo de $a_n$. Al pasar de un intervalo al siguiente –siempre de derecha a izquierda– si la raíz es simple o de multiplicidad[6] impar, entonces se produce un cambio de signo al pasar al nuevo intervalo. Si la raíz es de multiplicidad par, entonces el nuevo intervalo mantiene el signo del contiguo a la derecha.

***Fracciones algebraicas***

El cociente de polinomios da origen a una nueva entidad matemática denominada *fracción algebraica*.

<u>Definición</u>: F = $\frac{P}{Q}$ es una fracción algebraica si P y Q son dos polinomios y Q no es el polinomio nulo.

---

[6] Se denomina “multiplicidad” a la cantidad de veces que se repite la misma raíz en el polinomio. En el ejemplo precedente la raíz 2 es de multiplicidad 2, mientras que las restantes raíces son de multiplicidad 1.

Ejemplos: $\dfrac{2.x+1}{x^2-1}$; $\dfrac{1}{x+2}$; $\dfrac{x-3}{2}$; $\dfrac{4.x^3-2.x^2+8.x-1}{3.x^2-x-9}$.

El conjunto de las fracciones algebraicas tiene *estructura de cuerpo* pues el cociente de fracciones algebraicas es otra fracción algebraica, a condición que el denominador no sea la fracción nula.

La suma, resta, producto y cociente de fracciones algebraicas siguen las mismas reglas operatorias de las fracciones numéricas.

Ejemplos:

$$a)\quad \frac{2.x}{x-1}+\frac{x+2}{x+1}=\frac{2.x.(x+1)+(x+2).(x-1)}{(x-1).(x+1)}=\frac{3.x^2+3.x-2}{x^2-1}$$

$$b)\quad \frac{2.x}{x-1}-\frac{x+2}{x+1}=\frac{2.x.(x+1)-(x+2).(x-1)}{(x-1).(x+1)}=\frac{x^2+x+2}{x^2-1}$$

$$c)\quad \frac{2.x}{x-1}\times\frac{x+2}{x+1}=\frac{2.x.(x+2)}{(x-1).(x+1)}=\frac{2.x^2+4.x}{x^2-1}$$

$$d)\quad \frac{2.x}{x-1}\div\frac{x+2}{x+1}=\frac{2.x}{x-1}\times\frac{x+1}{x+2}=\frac{2.x.(x+1)}{(x-1).(x+2)}=\frac{2.x^2+2.x}{x^2+x-2}$$

¿Es posible definir nuevas funciones a partir de las fracciones algebraicas? Por ejemplo, consideremos la relación que a cada valor de "x" le asigna el valor de 2.x/(x-1). Si el dominio y el codominio son los números reales, entonces esta relación no es una función porque el valor x = 1 del dominio no tiene correspondiente en el codominio (pues para x = 1 se anula el denominador). Para que la relación x → 2.x/(x-1) sea una función, es necesario restringir el dominio eliminando el o los valores de x que hacen que la fracción tenga denominador nulo. En este ejemplo, x = 1 es el único valor que debe ser excluido del dominio de la función:

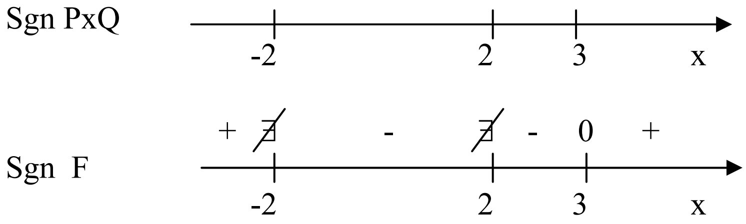
Dominio de F = D(F) = {x: x X R y x ≠ 1}

¿Cómo es el gráfico de la función fracción algebraica? El gráfico es un poco más complicado que el de las funciones polinómicas, y este problema lo abordaremos más adelante. Pero sí podemos hallar el esquema del signo de F. Si F = P/Q, entonces resulta que Sgn F = Sgn (PxQ), excepto en los puntos tales que Q(x) = 0. En tales puntos no existe el signo de la fracción (recordar que tales puntos quedan excluidos del dominio de la función).

Ejemplo: Hallar el esquema del signo de F = $\dfrac{4.x^2-20.x+24}{x^2-4}$.

El polinomio del numerador tiene raíces $\alpha_1 = 2$ y $\alpha_2 = 3$. El polinomio del denominador tiene raíces $\beta_1 = 2$ y $\beta_2 = -2$. El polinomio PxQ tiene las raíces -2, 2, 2 y 3 y su primer coeficiente es +4. En consecuencia:

+ 0 - 0 - 0 +




***Productos notables***

Sean P y Q dos polinomios. Se denomina *binomio* a las expresiones (P+Q) y (P-Q). Se denominan *productos notables* a las siguientes expresiones.

$$(P+Q)^2 = P^2 + 2.P.Q + Q^2$$
$$(P–Q)^2 = P^2 - 2.P.Q + Q^2$$
$$(P+Q).(P–Q) = P^2 – Q^2$$
$$(P+Q)^3 = P^3 + 3.P^2.Q + 3.P.Q^2 + Q^3$$

¿Y si fuera necesario elevar el binomio a un exponente más alto, por ejemplo, $(P+Q)^7$? Para resolver este problema existe un resultado general, conocido como el *desarrollo del binomio de Newton*[7]. Recordando el significado de la expresión "n factorial", n!, y adoptando la notación $C_i^n = \dfrac{n!}{i!.(n-i)!}$ (que se lee "combinaciones de n en i") se tiene el siguiente resultado:

$$(P+Q)^n = \sum_{i=0}^{n} C_i^n.P^i.Q^{n-i}$$

Ejemplos:

1. $(x^2 + 3.x)^2 = (x^2)^2 + 2.(x^2).(3.x) + (3.x)^2 = x^4 + 6.x^3 + 9.x^2$
2. $(x^2 +3.x)^5$

$$(x^2+3.x)^5 = C_0^5.(x^2)^0.(3.x)^5 + C_1^5.(x^2)^1.(3.x)^4 + C_2^5.(x^2)^2.(3.x)^3 +$$
$$C_3^5.(x^2)^3.(3.x)^2 + C_4^5.(x^2)^4.(3.x)^1 + C_5^5.(x^2)^5.(3.x)^0 =$$
$$= 243.x^5 + 405.x^6 + 270.x^7 + 90.x^8 + 15.x^9 + x^{10}$$

## Repartido Práctico 4: Polinomios y expresiones algebraicas

[7] Isaac Newton (1642-1727) físico, astrónomo y matemático inglés, famoso por su descubrimiento de las leyes de gravedad.

**Ejercicio 1**

Sean los polinomios: $P(x) = 2x^3 – 3x^2 + x – 1$ y $S(x) = x^2 + 2x – 3$.

a) Calcular P + S.
b) Calcular – 2S y ½.S.
c) Calcular 3.P – 6.S.
d) Calcular P – (2x).S.
e) Calcular P.S.

**Ejercicio 2**

Hallar el desarrollo de:

a) $(x^2 – 2x)^2$
b) $(2x^3 – x)^2$
c) $(x^2 + ½.x)^3$
d) $(x^2 – 2x). (x^2 + 2x)$

**Ejercicio 3**

**Realizar las siguientes operaciones.**

a) $\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}=$

b) $\frac{1}{x}-\frac{1}{x-1}=$

c) $\frac{x}{x+1}+\frac{x-1}{x}=$

d) $\frac{x}{x^2-1}+\frac{x-1}{x+1}=$

**Ejercicio 4**

**a)** Hallar raíces y signo del polinomio $S(x) = x^2 + 2x – 3$.
**b)** Hallar raíces y signo de $T(x) = (x^2 – 2x)^2$.
**c)** Hallar raíces y signo de $M(x) = \frac{2x-5}{x^2-1}+\frac{x-1}{x+1}$.

**Ejercicio 5**

**Escribir las siguientes expresiones como polinomios reducidos y ordenados.**

a) $(2x+1)^4$
b) $(x^2 – 2x)^6$

## 5. ECUACIONES. SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

***Ecuaciones***

Sean f y g dos funciones cuyos dominios son conjuntos de números (cuando dependen de una sola variable) o cuyos dominios son conjuntos de pares, ternas, etc. (cuando las funciones dependen de dos, tres o más variables). En todos los casos, los codominios de las funciones son conjuntos de números.

Considérese una nueva entidad matemática llamada *ecuación* que tiene la forma

$$f = g$$

Si las funciones dependen de una sola variable, entonces $f(x) = g(x)$ es una ecuación "en x". Si las funciones dependen de de dos variables, entonces $f(x, y) = g(x, y)$ es una ecuación "en x e y"; en tres variables se tiene la ecuación $f(x, y, z) = g(x, y, z)$.

En polinomios las letras se conocen como "indeterminadas", en funciones se las denomina "variables", mientras que en ecuaciones se les llama "indeterminadas".

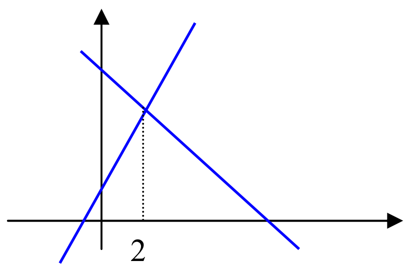
<u>Definición</u>: *Resolver la ecuación $f = g$* consiste en encontrar todos los elementos comunes de los dominios de f y g que hacen que los valores de las funciones (las imágenes) coincidan. El conjunto de elementos que satisfacen la igualdad $f(x) = g(x)$, o bien las igualdades $f(x, y) = g(x, y)$ ó $f(x, y, z) = g(x, y, z)$, se denomina *conjunto solución de la ecuación* y cada elemento del conjunto solución se llama *raíz de la ecuación*.

Ejemplo 1: Si $f(x) = 2.x +1$ y $g(x) = -x + 7$, es fácil demostrar que la ecuación $2.x + 1 = -x + 7$ tiene por única raíz $x = 2$. El conjunto solución es $S = \{x: x = 2\}$.

Ejemplo 2: Si $f(x, y) = 3.x + 3.y$ y $g(x, y) = x + y + 2$, entonces la ecuación $3.x + 3.y = x + y + 2$ tiene como conjunto solución $S = \{(x, y): y = -x + 1\}$, el cual contiene infinitos pares de reales.

Desde el punto de vista geométrico, el conjunto solución de una ecuación es el conjunto de puntos (de la recta, del plano, del espacio de 3 dimensiones o de un hiperespacio) donde se intersectan los gráficos de las funciones f y g.

Así, en el Ejemplo 1, la única raíz ($x = 2$) es la abcisa del punto donde se intersectan las funciones $f(x) = 2.x +1$ y $g(x) = -x +7$, cuyos gráficos se representan por dos rectas en un par de ejes cartesianos ortogonales.




En el Ejemplo 2, los gráficos de las funciones $f(x, y) = 3.x + 3.y$ y $g(x, y) = x + y + 2$ se representan por dos planos en el espacio tridimensional. El conjunto solución

$S = \{(x, y): y = -x + 1\}$ es el conjunto de los puntos de una recta en el plano bidimensional.

Consideremos ahora, en particular, las funciones de una sola variable, las que dan origen a ecuaciones de la forma $f(x) = g(x)$. Resolver la ecuación es encontrar los valores de la incógnita que satisfacen la igualdad de las dos funciones.

Si $f$ es un polinomio y $g(x) = 0$, entonces resolver la ecuación $f(x) = g(x)$ equivale al problema de encontrar las raíces de un polinomio. Para resolver ecuaciones más generales es necesario enunciar algunas propiedades.

Definición: Dos ecuaciones son *equivalentes* si sus conjuntos solución son iguales.

Observación: si dos ecuaciones no tienen raíces, entonces son equivalentes, pues en ambos casos, el conjunto solución es el conjunto vacío.

*Propiedades de las ecuaciones*

1. Las ecuaciones $f(x) = g(x)$ y $f(x) + K = g(x) + K$ son equivalentes para todo K X R
2. Las ecuaciones $f(x) = g(x)$ y $f(x) – g(x) = 0$ son equivalentes
3. Las ecuaciones $f(x) = g(x)$ y $K.f(x) = K.g(x)$ son equivalentes para todo $K \neq 0$
4. Las ecuaciones $f(x) = g(x)$ y $f(x).h(x) = g(x).h(x)$ son equivalentes si $h(x) \neq 0$ y se cumple que [D(f) W D(g)] T D(h)
5. La ecuación $f(x).h(x) = g(x).h(x)$ tiene todas las raíces de la ecuación $f(x) = g(x)$ a condición que [D(f) W D(g)] T D(h).
6. La ecuación $[f(x)]^2 = [g(x)]^2$ tiene todas las raíces de la ecuación $f(x) = g(x)$

Las reglas 5. y 6. se aplican cuando las ecuaciones $f(x).h(x) = g(x).h(x)$ o $[f(x)]^2 = [g(x)]^2$ son más fáciles de resolver que la ecuación $f(x) = g(x)$. Pero en estos casos habrá que tener un cuidado especial porque las ecuaciones no son equivalentes y las primeras pueden tener raíces que no son raíces de $f(x) = g(x)$ (se pueden introducir “raíces extrañas”). Obtenidas las raíces de $f(x).h(x) = g(x).h(x)$ o $[f(x)]^2 = [g(x)]^2$, para resolver la ecuación $f(x) = g(x)$ alcanzará con verificar cuáles de aquellas son también raíces de esta última.

Aplicando estas reglas, las ecuaciones en las que intervienen sólo polinomios, resultan equivalentes a ecuaciones de la forma $P(x) = 0$.

Como casos particulares tenemos:

$$a.x + b = 0$$
$$a.x^2 + b.x + c = 0$$

cuya resolución ya hemos visto. En el segundo caso, las raíces se obtienen utilizando radicales.

Los casos $a.x^3 + b.x^2 + c.x + d = 0$ y $a.x^4 + b.x^3 + c.x^2 + d.x + e = 0$ también se pueden resolver por radicales (de índices 3 y 4), resultados obtenidos principalmente por la escuela matemática italiana[8] recién en el siglo XVI (la ecuación polinómica de segundo grado ya la habían resuelto los griegos de la antigüedad).

¿Qué puede decirse de las ecuaciones polinómicas de quinto grado o más, por ejemplo, $a.x^5 + b.x^4 + c.x^3 + d.x^2 + e.x + f = 0$? ¿También se pueden resolver por radicales? Recién en la tercera década del siglo XIX dos matemáticos muy jóvenes, Nils Abel[9] y Evariste Galois[10], aunque por métodos distintos, lograron demostrar que estas ecuaciones no pueden resolverse en general[11] mediante radicales.

Pero las ecuaciones pueden contener expresiones más complejas que los polinomios. Los siguientes son algunos ejemplos.

Ecuación con fracciones algebraicas (E1) $\dfrac{3.x}{x-1} = \dfrac{2.x+1}{x+1}$

Ecuación con radicales (E2) $\sqrt{x-3} = \sqrt{x^2 - 4.x + 1}$

Ecuación trigonométrica (E3) $\mathrm{sen}(x + \pi) = \cos^2(x + \pi)$

Ecuación logarítmica (E4) $\log(x^2 + 9) = 1 + \log(x + 2)$

Para resolver (E1) se puede aplicar la propiedad 5 enunciada más arriba, multiplicando ambos miembros de la ecuación por la expresión $h(x) = (x - 1).(x + 1)$, obteniéndose la solución $S = \{0, -2\}$. Para resolver la (E2) se puede aplicar la propiedad 6, lo que conduce a una ecuación polinómica con solución $S = \{1, 4\}$. Sin embargo, la ecuación (E2) sólo admite como raíz $x = 4$, pues para $x = 1$ los radicandos son negativos y no están definidos en el campo real. La raíz $x = 1$ es "extraña" y se introdujo en el problema al elevar al cuadrado ambos miembros de la ecuación. No son objeto del curso la resolución de ecuaciones trigonométricas, logarítmicas u otras más complicadas.

### *Sistemas de ecuaciones lineales*

Un sistema de ecuaciones es un conjunto de ecuaciones de las cuales interesan las raíces comunes. Sean $S_1, S_2, S_3, \ldots\ldots, S_k$ los conjuntos solución de de un sistema con K ecuaciones. *Resolver* un sistema de ecuaciones es encontrar la intersección de sus conjuntos solución.

Conjunto solución del sistema = S = $S_1 \cap S_2 \cap S_3 \cap \ldots\ldots \cap S_k$

Un sistema de ecuaciones es *lineal* cuando todas las funciones que intervienen en las ecuaciones son funciones polinómicas de hasta grado 1. Los siguientes son ejemplos de sistemas de ecuaciones no lineales.

$$\begin{cases} y = x^3 - 2.x \\ y = e^{2.x} - 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = x^2 + 2.x + 3 \\ y = 2.x + 1 \end{cases}$$

---

[8] Trabajaron en la solución de estos problemas Jerónimo Cardano (1501-1576) italiano, Nicolás Tartaglia (1499-1557) italiano, y Francisco Vieta (1540-1603) francés.

[9] Nils Abel (1802-1829) matemático noruego.

[10] Evariste Galois (1811-1832) matemático francés.

[11] Sí se pueden resolver por radicales algunos casos particulares. Por ejemplo, la ecuación $x^5 - 2 = 0$ tiene por única raíz real $x = \sqrt[5]{2}$ .

La llave a la izquierda indica que el par de ecuaciones forma un sistema, esto es, que interesa encontrar el conjunto de pares (x, y) que satisfacen a la vez ambas ecuaciones.

Definición: Dos sistemas de ecuaciones son equivalentes si sus conjuntos solución son iguales.

*Propiedades de los sistemas de ecuaciones*

1. Si se aplican las propiedades 1 a 4 de ecuaciones a cualquiera de las ecuaciones del sistema, se obtiene un sistema equivalente.
2. Si se cambia el orden de las ecuaciones del sistema, se obtiene un sistema equivalente.
3. Si a una ecuación se le suma o resta un múltiplo de otra, se obtiene un sistema equivalente.
4. La forma de un sistema lineal con n incógnitas y m ecuaciones es la siguiente:

$$\begin{cases} a_{11}.x_1 + a_{12}.x_2 + ........ + a_{1n}.x_n = b_1 \\ a_{21}.x_1 + a_{22}.x_2 + ........ + a_{2n}.x_n = b_2 \\ .............................................. \\ a_{m1}.x_1 + a_{m2}.x_2 + ........ + a_{mn}.x_n = b_n \end{cases}$$

4.1. Si $b_1$, $b_2$, … , $b_m$ son todos nulos, entonces el sistema lineal se dice homogéneo. Si el sistema lineal es homogéneo, entonces el conjunto solución no es vacío (siempre tiene raíces).

4.2. Todo sistema lineal de ecuaciones puede clasificarse en una y solo una de tres categorías:

a) *Sistema compatible determinado*: el conjunto solución tiene una única raíz.

b) *Sistema compatible indeterminado*: el conjunto solución admite infinitas raíces.

c) *Sistema incompatible*: el conjunto solución es el conjunto vacío.

Para resolver un sistema lineal de ecuaciones se pueden utilizar varios métodos. La aplicación reiterada de la propiedad 3, generando ceros en los coeficientes $a_{ij}$ por debajo de los elementos $a_{11}$, $a_{22}$, $a_{33}$, etc. es conocido como el *método de Gauss*[12] *o método de la escalera*.

Ejemplo: Sea el sistema

$$\begin{cases} 2x + 3y - 2z = 1 \\ x + 2y + z = 7 \\ 3x - 4y - z = -1 \end{cases}$$

Vamos a resolver el sistema por el método de la escalera. En primer lugar, vamos a colocar la segunda ecuación como primera, para facilitarnos los cálculos.

[12] Carlos Federico Gauss (1777-1855) astrónomo, físico y matemático alemán. Fue apodado “Príncipe de la Matemática” por los colegas de su época. El gráfico de la función de densidad normal (estadística) se conoce como “campana de Gauss”.

$$\begin{cases} x+2y+z=7 \\ 2x+3y-2z=1 \\ 3x-4y-z=-1 \end{cases}$$

A continuación, vamos a generar un cero en el primer coeficiente de la segunda ecuación, sumándole a la segunda ecuación la primera multiplicada por (-2).

$$\begin{cases} x+2y+z=7 \\ -y-4z=-13 \\ 3x-4y-z=-1 \end{cases}$$

En el siguiente paso, generamos un cero en el primer coeficiente de la tercera ecuación, sumándole a ésta la primera multiplicada por (-3).

$$\begin{cases} x+2y+z=7 \\ -y-4z=-13 \\ -10y-4z=-22 \end{cases}$$

Se puede sumar a la tercera ecuación la segunda multiplicada por (-10) para generar un cero en el coeficiente de "y" en la tercera ecuación, y entonces se obtiene:

$$\begin{cases} x \quad +2y+z=7 \\ \quad -y-4z=-13 \\ \qquad 36z=108 \end{cases}$$

Ahora puede verse el sistema completamente escalerizado. En virtud de las propiedades enunciadas más arriba, este sistema es equivalente del primero, es decir, tiene el mismo conjunto solución. En el último peldaño de la escalera se puede despejar el valor de la incógnita z: z = 108/36 = 3. Si se sube un peldaño y se sustituye la z por el valor calculado, entonces se obtiene: - y – 4.3 = - 13, y despejando la y resulta: y = 1. Finalmente, subiendo un peldaño más se tiene: x + 2.1 + 3 = 7, y despejando la x resulta: x = 2. Encontramos una única raíz (x, y, z) = (2, 1, 3). Por tanto, el sistema es *compatible determinado*.

En el capítulo sobre Matrices volveremos sobre el método de Gauss, para resolver sistemas lineales, pero utilizando el enfoque matricial.

## Repartido Práctico 5: Ecuaciones y Sistemas de Ecuaciones

**Ejercicio 1**

Un capital de $1.000 es colocado a interés simple a la tasa del 3% mensual.

a) ¿Cuál es el interés generado al cabo de 6 meses?
b) ¿Cuál es el monto generado al cabo de 6 meses?
c) ¿Cuántos meses deberá permanecer colocado el capital para generar $195 de interés?

**Ejercicio 2**

Dos capitales, uno de \$10.000 y otro de \$15.000 son colocados a interés simple, el primero a la tasa del 4% y el segundo a la tasa del 2% mensual. ¿Al cabo de cuánto tiempo ambos capitales habrán generado el mismo monto?

**Ejercicio 3**

Un capital de \$1.000 es colocado a interés compuesto a la tasa del 3% mensual efectivo.

a) Calcular el monto generado al cabo de un año.
b) Calcular el tiempo que debe permanecer colocado el capital hasta generar un monto de \$1.500.
c) Otro capital de \$1.200 es colocado al mismo momento, a una tasa del 5% mensual efectivo. ¿En qué momento se igualarán los dos montos?

**Ejercicio 4**

Un rectángulo tiene un perímetro de 960 mts. y un largo de 360 mts. ¿Cuál es el ancho?

**Ejercicio 5**

Un rectángulo tiene un área de 75 $\text{cms.}^2$ y una base de 15 cms. ¿Cuál es la altura del rectángulo?

**Ejercicio 6**

Las siguientes son dos reglas para determinar la dosis de un medicamento para un niño a partir de la dosis de un adulto.

| Regla de Young | Regla de Cowling |
|---|---|
| $d = \frac{E}{E+12}.D$ | $d = \frac{E+1}{24}.D$ |

donde: d = dosis para el niño
D= dosis para el adulto
E= edad del niño

a) Si un niño tiene 8 años y la dosis para el adulto es de 3 comprimidos por día, ¿cuál es la dosis para el niño según las reglas de Young y Cowling?
b) Si un niño tiene 12 años y la dosis para el adulto es de 2 comprimidos por día, ¿cuál es la dosis para el niño según las reglas de Young y Cowling?
c) ¿Para qué edades del niño coinciden las dosis para ambas reglas? (Redondear al año más cercano).

## Repartido Práctico 5: Ecuaciones y Sistemas de Ecuaciones

**Ejercicio 7**

Resolver la ecuación $\frac{1}{x} + \frac{1}{120-x} = \frac{1}{24}$ redondeando la solución con un decimal.

**Ejercicio 8**

Un objeto es lanzado hacia arriba hasta que cae al piso. La altura (en metros) que describe el objeto desde que es lanzado hasta que cae al piso es $h = 50.t - 25.t^2$, donde t es el tiempo en segundos que transcurre desde el momento del lanzamiento.

a) ¿Cuánto tarda el objeto en tocar el piso?
b) ¿En qué momento alcanza el objeto su altura máxima?
c) ¿En qué momento, cuando está cayendo, se encuentra a 18,75 metros del piso?

**Ejercicio 9**

Un capital de $10.000 fue colocado durante 3 años a interés compuesto a una tasa efectiva anual del 25%. Al inicio del período el dólar costaba $10 y la tasa de devaluación en cada año fue del 12%, 15% y 18% respectivamente.

a) ¿Cuál fue la rentabilidad en dólares en cada año?
b) ¿Cuál fue la rentabilidad anual en dólares de la colocación?

**Ejercicio 10**

**La canasta de consumo de un grupo de trabajadores aumentó en el año 1998 un 15% y en 1999 un 20%. En diciembre de 1997 el salario medio del grupo de trabajadores era de $5.000, que coincidía con el costo de una canasta de consumo. En 1998 y 1999 hubo los siguientes aumentos de salarios:**

| **MES** | AUMENTO |
|---|---|
| Enero/98 | 8% |
| Junio/98 | 8% |
| Enero/99 | 7% |
| Junio//99 | 7% |

¿Cuántas canastas de consumo se pudieron comprar con los salarios medios de diciembre/98 y de diciembre/99?

**Ejercicio 11**

Un local de Policlínica funciona con los siguientes costos:

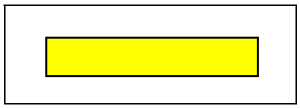
- El alquiler de $15.000 por mes
- El salario de un administrativo por $5.000
- Salarios médicos:
  - $20.000 de sueldos fijos de 5 médicos
  - $50 adicional por cada paciente por encima de los primeros 50 pacientes atendidos por cada médico

Si la orden a consultorio cuesta $150 y éste es el único ingreso del local, ¿cuántos pacientes deberán atender los 5 médicos para cubrir todos los costos de la Policlínica?

## Repartido Práctico 5: Ecuaciones y Sistemas de Ecuaciones

**Ejercicio 12**

Un terreno rectangular, de 4 mts. por 8 mts., será destinado como jardín (rectángulo exterior). Se decide poner una vereda en la orilla interior del rectángulo, de modo que las flores del jardín ocupen 12 $mt^2$ (rectángulo interior). ¿De qué ancho debe construirse la vereda?



**Ejercicio 13**

Una fábrica de cacao elabora chocolate en barras de 10x5x2 $cm^3$. A raíz de los aumentos en los costos, y con el ánimo de no incrementar los precios, la fábrica decide achicar el ancho y el largo de las barras en la misma longitud, manteniendo el grosor (2 cm) de forma que el volumen de la barra se reduzca un 10%. ¿Cuál será el ancho y el largo de la nueva barra? (Aproximar con dos decimales en cm)

**Ejercicio 14**

Un comerciante compró en la feria 20 Kg de naranjas a $12 el Kg. Más tarde encontró en otro puesto naranjas a $10 el Kg. ¿Cuántos Kg debe comprar a $10 para que el costo promedio de todas las naranjas compradas en la feria sea de $10,50?

**Ejercicio 15**

El costo de atender 20 camas diarias de Sanatorio es de $80.000, mientras que el costo de atender 30 camas diarias en el mismo Sanatorio es $110.000. ¿Cuál es el costo fijo diario y cuál es el costo variable unitario por día-cama?

**Ejercicio 16**

El Kg de helado de crema se vende a $50 y el de chocolate a $60. Se sabe que por cada 2 Kg de crema se venden 3 Kg de chocolate. ¿Cuántos Kg de crema y de chocolate hay que vender para recaudar $14.000?

**Ejercicio 17**

Una encuesta dirigida a 250 personas se realizó para conocer sus preferencias entre Coca y Pepsi. Entre las que contestaron, el 55% prefirió Coca. Si los que prefirieron Pepsi fueron 90, ¿cuántos no contestaron a la encuesta?

**Ejercicio 18**

Un vendedor cobra por mes un sueldo fijo más una comisión como porcentaje de las ventas que realiza. En un mes vendió $100.000 y cobró un salario total de $7.000. Al mes siguiente vendió $150.000 y obtuvo un salario de $8.000. ¿Cuál es el sueldo fijo y cuál el porcentaje de la comisión sobre las ventas?

**Ejercicio 19**

Demostrar que si un capital $K$ se presta a interés compuesto en $n$ cuotas iguales, mensuales y consecutivas, y la tasa de interés efectiva mensual es $i$, entonces, la cuota mensual a pagar se obtiene mediante la fórmula:

$$C = K * \frac{i}{1-(1+i)^{-n}}$$

## 6. INECUACIONES

Consideremos sólo el caso de funciones con una variable. Sean f y g dos funciones cuyos dominios y codominios son conjuntos de números. Considérese una nueva entidad matemática llamada *inecuación* que tiene alguna de las formas siguientes:

$$f \leq g$$
$$f < g$$
$$f \geq g$$
$$f > g$$

Definición: *Resolver la inecuación* f ≤ g (o alternativamente alguna de las otras) consiste en encontrar todos los elementos comunes de los dominios de f y g que satisfacen la desigualdad en los valores de las funciones. El conjunto de elementos que satisfacen la desigualdad se denomina *conjunto solución de la inecuación* y cada elemento del conjunto solución se denomina *raíz* de la inecuación.

$$S = \{x: f(x) \leq g(x)\}$$

Si α es tal que f(α) ≤ g(α), entonces α es una raíz de la inecuación.

Si en particular f es un polinomio y g es la función nula, entonces, resolver la inecuación f ≤ g (o cualquiera de las otras) es el problema de hallar el signo de f y determinar los puntos e intervalos sobre la recta donde el signo de f es menor o igual que 0.

Para resolver inecuaciones en general resultan útiles la siguiente definición y propiedades asociadas.

Definición: Dos inecuaciones son *equivalentes* si sus conjuntos solución son iguales.

*Propiedades de las inecuaciones*
(Aunque se utiliza el símbolo ≤, las propiedades son válidas también en los otros 3 casos)
1. Las inecuaciones [f(x) ≤ g(x)] y [f(x) + K ≤ g(x) + K] son equivalentes para todo K
2. Las inecuaciones [f(x) ≤ g(x)] y [f(x) – g(x) ≤ 0] son equivalentes
3. Las inecuaciones [f(x) ≤ g(x)] y [K.f(x) ≤ K.g(x)] son equivalentes para todo K > 0
4. Las inecuaciones [f(x) ≤ g(x)] y [f(x).h(x) = g(x).h(x)] son equivalentes si h(x) > 0 y se cumple que [D(f) W D(g)] T D(h).
5. Las inecuaciones [f(x) ≤ g(x)] y [K.f(x) ≥ K.g(x)] son equivalentes para todo K < 0

Ejemplo: Resolver la inecuación $\frac{3.x}{x-1} + 1 \geq \frac{2.x+1}{x+1}$

Como primera observación, lo que no puede hacerse es "pasar multiplicando" los denominadores al otro miembro. Esto es válido en ecuaciones, según ya hemos visto, a riesgo de introducir raíces extrañas. Pero no es válido en inecuaciones, porque se podría estar multiplicando por expresiones negativas, y en tal caso, se pierde la equivalencia (observar cómo funciona la equivalencia en la propiedad 5).

Por la propiedad 2 la siguiente inecuación es equivalente de la primera.

$$\frac{3.x}{x-1} + 1 - \frac{2.x+1}{x+1} \geq 0$$

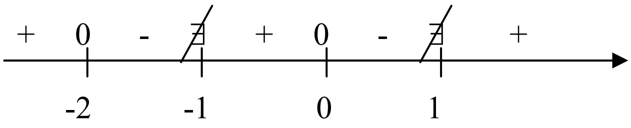
Operando con las expresiones algebraicas se obtiene:

$$\frac{3x(x+1)+(x-1)(x+1)-(2x+1)(x-1)}{(x-1)(x+1)} \geq 0$$

$$\frac{2x^2+4x}{(x-1)(x+1)} \geq 0$$

$$\frac{2x(x+2)}{(x-1)(x+1)} \geq 0$$

Como la última inecuación es equivalente de la primera, la solución de ésta puede obtenerse resolviendo la última. El esquema de signo de la última inecuación es como sigue.




En consecuencia, el conjunto solución de la primera inecuación es:

S = {x: (x ≤ -2) ó (-1 < x ≤ 0) ó (x > 1)}

## Repartido Práctico 6: Inecuaciones

**Ejercicio 1**

Sea la parábola de ecuación $y = 3.x^2 - 15.x + 18$. Encontrar los valores de x que hacen que la parábola se dibuje por encima del eje de las abcisas.

**Ejercicio 2**

Un presupuesto mensual de \$600 debe asignarse a una canasta de dos productos: pan y leche. El precio del pan es \$6 el Kg. y el precio de la leche es \$8 el litro. Plantear la restricción presupuestaria, graficarla e indicar cuántos Kg. de pan se pueden comprar si:

a) la canasta debe incluir 40 litros de leche
b) la canasta debe incluir 75 litros de leche
c) ese mes no se consume leche.

**Ejercicio 3**

Resolver la inecuación: $(x + 1).x^2.(x - 1)^3 \leq 0$.

**Ejercicio 4**

Resolver la inecuación: $(x^2 - 4).(9 - x^2) \geq 0$

**Ejercicio 5**

Resolver la inecuación: $\dfrac{x^2 - 3.x + 2}{x^2 - 2.x + 1} \geq 0$

**Ejercicio 6**

Resolver la inecuación: $\dfrac{x^2 - 2.x - 27}{x^2 + 2.x + 1} < 1$

**Ejercicio 7**

Resolver la inecuación: $e^x \geq x + 1$

# FACULTAD DE CIENCIAS SOCIALES
# DEPARTAMENTO DE ECONOMÍA


## DIPLOMA EN ECONOMÍA PARA NO ECONOMISTAS

### ASIGNATURA: MATEMÁTICA APLICADA A LA ECONOMÍA

### MATERIAL DE CONSULTA Y CASOS PRÁCTICOS

### CURSO 2004
### PARTE III


**Profesor: David Glejberman**

## 7. MATRICES Y DETERMINANTES[13]

Las matrices se utilizan para presentar resultados estadísticos en forma de cuadros de doble entrada, para elaborar presupuestos y flujos de caja, para resolver problemas de cálculo numérico, sistemas de ecuaciones lineales, ecuaciones diferenciales y problemas de optimización. Obsérvese que la "planilla electrónica" no es otra cosa que una gran matriz.

## MATRICES

Una matriz es una tabla ordenada generalmente de números reales $a_{ij}$ (también llamados "escalares") de la forma:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

La matriz anterior se denota también por su elemento genérico: ($a_{ij}$ ) con $i$ =1, ..., $m$, $j$ =1, ..., n. El primer subíndice (i) indica la "fila" y el segundo (j) la "columna" de la tabla. "$a_{ij}$" indica el elemento de la matriz que se encuentra en la intersección de la fila "i" y de la columna "j".

Los términos horizontales son las filas de la matriz y los verticales son sus columnas. Una matriz con *m* filas y *n* columnas se denomina matriz *"m* por *n"*, matriz $m \times n$, o también matriz de *tamaño mxn*.

Las matrices se denotarán usualmente por letras mayúsculas, *A*, *B*, ..., y los elementos de las mismas por minúsculas, *a, b,* ...

Ejemplo:

La siguiente matriz es una matriz 2 × 3: $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 0 & 5 & -2 \end{pmatrix}$

donde sus filas son (1, -3, 4) y (0, 5, -2) y sus columnas $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix} y \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Se denomina "diagonal principal" de una matriz a los elementos que ocupan las celdas en las que coincide el número de fila y el número de columna. En una matriz 3x4:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}$$

la diagonal principal está formada por los elementos: $a_{11}$, $a_{22}$, $a_{33}$.

---

[13] Extraído del sitio web "El paraíso de las matemáticas". Corregido y ampliado por el profesor del curso.

Se denomina "traza de la matriz" a la suma de los elementos de la diagonal principal. En el ejemplo anterior: Traza(A) = $a_{11} + a_{22} + a_{33}$. En el caso de la matriz $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 0 & 5 & -2 \end{pmatrix}$ la traza es: 1 + 5 = 6.

Cuando una matriz tiene una sola fila se dice que es un "vector fila" y cuando tiene una sola columna se denomina "vector columna".

## *Clasificación de matrices*

Según el aspecto de las matrices, éstas pueden clasificarse en:

**a)** Matrices cuadradas
Una matriz *cuadrada* tiene el mismo número de filas que de columnas. Se dice que una matriz cuadrada ($n \times n$) es de *orden n* y se denomina *matriz n-cuadrada.*

*Ejemplo:* Sean las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & 0 & 5 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad y \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Entonces, *A* es una matriz cuadrada de orden 3 y *B* es una matriz cuadrada de orden 2. Si una matriz no es cuadrada, entonces se dice que es rectangular.

**b)** Matriz identidad
La matriz *n*-cuadrada con "unos" en la diagonal principal y "ceros" en cualquier otra posición, denotada por I, se conoce como matriz identidad (o unidad). Como veremos más adelante, la matriz identidad tiene la propiedad de actuar como neutro en la multiplicación de matrices. Si la matriz *A* cumple ciertas condiciones, entonces:

$$A \times I = I \times A = A.$$

**c)** Matrices triangulares
Una matriz cuadrada es una matriz triangular superior o simplemente una matriz triangular, si todos los elementos bajo la diagonal principal son iguales a cero. Así pues, las matrices:

$$\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 7 & -2 \\ 0 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 8 & 3 & -6 \\ 0 & 2 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 6 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

son matrices triangulares de órdenes 2, 3 y 4.

**d)** Matrices diagonales

Una matriz cuadrada es diagonal, si todos sus elementos no diagonales son cero. Se denota por $D = \text{diag}\,(d_{11}, d_{22}, \ldots, d_{nn})$. Por ejemplo:

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & & & \\ & 6 & & \\ & & 0 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$$

son matrices diagonales que pueden representarse, respectivamente, por diag(3,-1,7) diag(4,-3) y diag(2,6,0,-1).

**e)** Matriz nula

Se denomina matriz nula a una matriz que tiene todos sus elementos iguales a cero. Ejemplos:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

son matrices nulas 2x2, 4x4 y 2x3.

**f)** Traspuesta de una matriz

La traspuesta de una matriz *A* es otra matriz que se obtiene intercambiando en A las filas por las columnas y se denota por $A^T$.

Así, la traspuesta de

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 2 & 5 & -7 \\ 4 & 0 & 9 \end{pmatrix} \text{ es } A^T = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ -1 & 5 & 0 \\ 4 & -7 & 9 \end{pmatrix}.$$

La traspuesta de $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ es $B^T = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \\ 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.

En otras palabras, si $A = (a_{ij})$ es una matriz $m \times n$, entonces $A^T = (a_{ji})$ es una matriz $n \times m$.

**g)** Matriz simétrica

Se dice que una matriz cuadrada es simétrica, si la matriz es igual a su traspuesta: $A^T = A$.

*Ejemplos:*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ -3 & 6 & 7 \\ 5 & 7 & -8 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -4 \\ -3 & 0 & 5 \\ 4 & -5 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

*A* es simétrica. Para *B* los elementos simétricos son opuestos entre sí, y por tanto no es simétrica (cuando $a_{ih} = -a_{hi}$ se dice que la matriz es “antisimétrica”). La matriz *C* no es cuadrada; en consecuencia, no es simétrica.

**h)** Matriz inversa
Se llama inversa de una matriz cuadrada A, a otra matriz B, también cuadrada y del mismo orden, tal que su producto (tal como se define más adelante) es igual a la matriz identidad. Notación: $B = A^{-1}$.

**i)** Matriz ortogonal
Se dice que una matriz cuadrada *A* es ortogonal si su traspuesta es igual a su inversa: $A^{-1} = A^{T}$.

**j)** Matriz idempotente
Se dice que una matriz cuadrada A es idempotente si su cuadrado es igual a la matriz original: $A^2 = A$.

Obsérvese que si una matriz es idempotente, entonces se cumple que: $A^n = A$ para todo n natural.

## *Operaciones con matrices*

### Suma y resta de matrices
Para poder sumar o restar matrices, éstas deben tener el mismo número de filas y de columnas. Es decir, si una matriz es de orden $3 \times 2$ y otra de $3 \times 3$, no se pueden sumar ni restar. Esto es así ya que, tanto para la suma como para la resta, se suman o se restan los términos que ocupan el mismo lugar en las matrices.

Si $A = (a_{ih})$ y $B = (b_{ih})$, entonces:

SUMA: $A + B = (a_{ih} + b_{ih})$

RESTA: $A - B = (a_{ih} - b_{ih})$

Ejemplo:

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & -3 \\ 7 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 8 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$. Entonces:

$$A + B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & -3 \\ 7 & 0 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 8 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 2 & 10 & 5 \\ 7 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A - B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & -3 \\ 7 & 0 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 8 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -2 \\ -2 & 0 & -11 \\ 7 & -1 & 6 \end{pmatrix}$$

Las matrices a sumar o restar no tienen por qué ser cuadradas. Las propiedades de la suma y resta de matrices son las mismas que para la suma y resta de números: asociativa, existencia de neutro (matriz nula), existencia de opuesto $–A = (-a_{ih})$ y conmutativa. En otras palabras, el conjunto de las matrices con la operación de suma tiene *estructura de grupo*.

*Ejemplo:* Dadas las tres matrices A, B, C, calcular (A+B+C) y (A-B+C).

Sean $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 2 & 7 & 6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & -1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

$$A + B + C = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 2 & 7 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 7 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}.$$

$$A - B + C = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 2 & 7 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 7 \\ 3 & 11 & 9 \end{pmatrix}.$$

## Producto escalar de vectores

Sean A y B dos vectores del mismo tamaño (filas, columnas, o una fila y una columna) de números reales. Se denomina "producto escalar" de los dos vectores a un número real que resulta de multiplicar ordenadamente los elementos de A y de B, y luego sumarlos. Si $A = (a_1, a_2, ... , a_n)$ y $B = (b_1, b_2, ... , b_n)$, entonces:

PRODUCTO ESCALAR[14] $A(x)B = a_1.b_1 + a_2.b_2 + ..... + a_n.b_n = \sum_{i=1}^{n} a_i.b_i$

Ejemplo: A = (1 2 3 4), B = (2 0 -1 3).
A(x)B = 1.2 + 2.0 + 3.(-1) + 4.3 = 11.

El producto escalar de vectores tiene la propiedades conmutativa y distributiva respecto de la suma de vectores.

Conmutativa: A(x)B = B(x)A
Distributiva: A(x)[B+C] = A(x)B + A(x)C

[14] En la literatura no hay uniformidad para simbolizar el producto escalar. Aquí hemos optado por la notación (x).

## Producto de matrices

La multiplicación de matrices puede parecer, a primera vista, rebuscada. Para poder multiplicar dos matrices, la primera debe tener el mismo número de columnas que filas la segunda. La matriz resultante del producto quedará con el mismo número de filas de la primera y con el mismo número de columnas de la segunda.

Ejemplo:
Si tenemos una matriz $2 \times 3$ y la multiplicamos por otra de orden $3 \times 5$, la matriz resultante será de orden $2 \times 5$.

$$A\ (2 \times 3) \times B\ (3 \times 5) = C\ (2 \times 5)$$

Se puede observar que el producto de matrices no cumple, en general, con la propiedad conmutativa; en el ejemplo anterior, el producto BxA no se puede realizar, puesto que la primera matriz no tiene el mismo número de columnas que filas la segunda. Cuando se cumple que el número de columnas de la matriz A coincide con el número de filas de la matriz B, entonces se dice que A y B son "conformables".

Supongamos que $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij})$ son matrices tales que el número de columnas de $A$ coincide con el número de filas de $B$; es decir, $A$ es una matriz $m \times p$ y $B$ una matriz $p \times n$. Entonces el resultado del producto de matrices *AxB* (*A.B* o simplemente *AB*) es otra matriz $C$ $(m \times n)$ cuyo elemento genérico ($c_{ij}$) se obtiene multiplicando (producto escalar) la fila $i$ de $A$ por la columna $j$ de $B$. Esto es:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1p} \\ . & \cdots & . \\ a_{i1} & \cdots & a_{ip} \\ . & \cdots & . \\ a_{m1} & \cdots & a_{mp} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1n} \\ . & \cdots & . & \cdots & . \\ . & \cdots & . & \cdots & . \\ . & \cdots & . & \cdots & . \\ b_{p1} & \cdots & b_{pj} & \cdots & b_{pn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ . & \cdots & . \\ . & c_{ij} & . \\ . & \cdots & . \\ c_{m1} & \cdots & c_{mn} \end{pmatrix}$$

donde $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{ip}b_{pj}$

*Ejemplos*:

1. $$\begin{pmatrix} r & s \\ t & u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ra_1 + sb_1 & ra_2 + sb_2 & ra_3 + sb_3 \\ ta_1 + ub_1 & ta_2 + ub_2 & ta_3 + ub_3 \end{pmatrix}$$

2. $$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 & 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 \\ 3 \cdot 1 + 4 \cdot 0 & 3 \cdot 1 + 4 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 11 \end{pmatrix}$$

## Producto por un escalar

El producto de un escalar *k* (número real *k*) por la matriz *A*, se escribe *k.A* o simplemente *kA*, es la matriz que se obtiene de multiplicar cada elemento de *A* por *k*:

$$kA = \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \dots & ka_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \dots & ka_{mn} \end{pmatrix}$$

*Ejemplo*:

Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 5 & -2 \end{pmatrix}$.

Entonces: $$3A = \begin{pmatrix} 3 \cdot 1 & 3 \cdot (-2) & 3 \cdot 3 \\ 3 \cdot 4 & 3 \cdot 5 & 3 \cdot (-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -6 & 9 \\ 12 & 15 & -6 \end{pmatrix}$$

## Inversa de una matriz

La inversa de una matriz cuadrada A es otra matriz del mismo orden, $A^{-1}$, que cumple con la condición siguiente:

$$A \times A^{-1} = A^{-1} \times A = I.$$

Decimos “la inversa” y no “una inversa”, porque si la matriz A es invertible, entonces su inversa es única. Sin embargo, la inversa de A no siempre existe. Más adelante veremos la condición que tiene que cumplir una matriz cuadrada para ser invertible.

*Ejemplo:*

Supongamos $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. Entonces:

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 - 5 & -10 + 10 \\ 3 - 3 & -5 + 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

El lector verificará que $B.A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$.

Puesto que *AB* = *BA* = I, entonces resulta que $B = A^{-1}$ (B es la inversa de A) o también que $A = B^{-1}$ (A es la inversa de B). Obsérvese que hemos probado que B es la inversa de A, pero no hemos dado un método para encontrar las matrices inversas. El método que se presenta a continuación es uno de los varios algoritmos que permiten encontrar la inversa de una matriz dada. Este método se conoce con el nombre de “escalerización o método de Gauss”.

Sea $A = (a_{ij})$ una matriz cuadrada de orden *n*. Para calcular la matriz inversa de *A*, que denotaremos como $A^{-1}$, seguiremos los siguientes pasos:

**Paso 1**. Construir la matriz $n \times 2n$, $M = (A \vdots I)$, esto es, *A* está en la mitad izquierda de *M* y la matriz identidad en la mitad derecha.

**Paso 2.** Se deja tal y como está la primera fila de *M*, y mediante combinaciones lineales apropiadas de las filas, se van generando ceros por debajo de la diagonal principal de M, hasta trasformarla en una matriz triangular. Las "combinaciones lineales apropiadas" son las siguientes:

i) Multiplicar o dividir toda la fila por un número distinto de cero
ii) Sumar a una fila una combinación lineal de las restantes.

**Paso 3.** También mediante combinaciones lineales apropiadas, la parte izquierda de la matriz M (donde antes figuraba la matriz A) se transforma en una matriz diagonal.

**Paso 4.** Se dividen las filas de la nueva matriz entre números apropiados, hasta lograr que la matriz de la izquierda resulte la identidad. Entonces, la matriz de la derecha, resultará ser la inversa de la matriz A.

*Ejemplo*:

Consideremos una matriz $3 \times 3$ arbitraria

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

**Paso 1**.

$$M = (A \;\vdots\; I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 1 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & 1 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

**Paso 2**.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} & a_{11}a_{23} - a_{21}a_{13} & a_{11}0 - a_{21}1 & a_{11}1 - a_{21}0 & a_{11}0 - a_{21}0 \\ 0 & a_{11}a_{32} - a_{31}a_{12} & a_{11}a_{33} - a_{31}a_{13} & a_{11}1 - a_{31}1 & a_{11}0 - a_{31}0 & a_{11}1 - a_{31}0 \end{array}\right)$$

El siguiente paso es igual que el anterior, pero esta vez se elige como pivote el segundo término de la diagonal principal.

*Ejemplo*: Supongamos que queremos encontrar la inversa de

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{pmatrix}.$$

Primero construimos la matriz $M = (A \vdots I)$,

$$M=\left(\begin{array}{ccc:ccc}1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0\\ 2 & -1 & 3 & 0 & 1 & 0\\ 4 & 1 & 8 & 0 & 0 & 1\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc:ccc}1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -1-2\cdot 0 & 3-2\cdot 2 & 0-2 & 1-2\cdot 0 & 0\\ 0 & 1-4\cdot 0 & 8-4\cdot 2 & 0-4 & 0 & 1-0\end{array}\right)$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc:ccc}1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & -1 & -2 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -4 & 0 & 1\end{array}\right), \text{ luego se coge como pivote } a_{22}=-1,$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc:ccc}1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & -1 & -2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0-(-1) & 4-(-2) & 0-1 & -1-0\end{array}\right)$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc:ccc}1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & -1 & -2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 6 & -1 & -1\end{array}\right)\sim$$

La mitad izquierda de *M* tiene forma triangular. Todos los elementos de la diagonal principal son diferentes de cero, por consiguiente, *A* es invertible. Si hubiera quedado toda una fila con ceros en la mitad izquierda de *M*, la operación habría terminado (*A* no es invertible).

A continuación, tomamos como pivote $a_{33}$, ponemos ceros encima de éste y seguimos operando hasta que nos quede una matriz diagonal.

$$\sim\left(\begin{array}{ccc:ccc}1 & 0 & 0 & -11 & 2 & 2\\ 0 & -1 & 0 & 4 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 1 & 6 & -1 & -1\end{array}\right).$$

Ya que la matriz colocada en la mitad izquierda es diagonal, no hay que operar más. Transformamos la matriz diagonal en una matriz identidad; para ello hay que multiplicar la segunda fila por -1:

$$\sim\left(\begin{array}{ccc:ccc}1 & 0 & 0 & -11 & 2 & 2\\ 0 & 1 & 0 & -4 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 6 & -1 & -1\end{array}\right).$$

La matriz que ha quedado en la mitad derecha de *M* es precisamente la matriz inversa de *A*:

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}-11 & 2 & 2\\ -4 & 0 & 1\\ 6 & -1 & -1\end{pmatrix}.$$

Para comprobar si el resultado es correcto, se multiplica $AxA^{-1}$, lo que debe dar como resultado la matriz identidad I.

*Comprobación*:

$A \times A^{-1} = I$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -11 & 2 & 2 \\ -4 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11+0+12 & 2+0-2 & 2+0-2 \\ -22+4+18 & 4+0-3 & 4-1-3 \\ -44-4+48 & 8+0-8 & 8+1-8 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I.$$

## Igualdad de matrices

Dos matrices $A_{mxn}(a_{ij})$ y $B_{pxq}(b_{ij})$ son iguales si las matrices son del mismo tamaño (m=p y n=q) y los elementos correspondientes de ambas matrices, celda a celda, son iguales ($a_{ij} = b_{ij} \ \forall ij$).

Ejemplo: Sean dos matrices A y B del mismo tamaño (2x2):

$$A = \begin{pmatrix} x+y & y+z \\ x-z & y+2.z \end{pmatrix} \quad y \quad B = \begin{pmatrix} y+2 & 7 \\ z+2 & 7 \end{pmatrix}$$

Las condiciones para que las matrices sean iguales son, simultáneamente, que:

$$\begin{cases} x+y = y+2 \\ y+z = 7 \\ x-y = z+2 \\ y+2.z = 7 \end{cases}$$

La igualdad de las matrices A y B conduce en este caso a un sistema lineal de ecuaciones, cuya solución es {x=2, y=7, z=0}.

## Propiedades de las operaciones con matrices

1. El conjunto de matrices (mxn) con la operación de suma, tiene estructura de grupo. Esto es, se cumplen las propiedades:

   Conmutativa: A + B = B + A para todo par de matrices sumables
   Asociativa: A + (B + C) = (A + B) + C para toda terna de matrices
   Existencia de neutro: Existe una matriz, la matriz nula (mxn) que opera como neutro de la suma, A + 0 = A para toda A
   Existencia de opuesto: Para toda matriz A existe su opuesta A + (-A) = 0

2. El producto de matrices tiene las siguientes características:
   - El producto es asociativo: Ax(BxC) = (AxB)xC
   - Existe neutro del producto, pero no es único: hay uno a izquierda y otro a derecha, que solo coinciden cuando la matriz dada es cuadrada.
     Neutro a izquierda: $I_m x A_{mxn} = A_{mxn}$ para toda matriz A
     Neutro a derecha: $A_{mxn} x I_n = A_{mxn}$ para toda matriz A.
   - No siempre existe la inversa de la matriz A. Por lo pronto, se requiere que la matriz sea cuadrada para tener chance de tener inversa. Volveremos sobre este punto más adelante
   - En general no se cumple la propiedad conmutativa del producto. Muchas veces es posible hacer AxB, pero no es posible hacer BxA, porque B y A no son conformables. Otras veces, se puede efectuar BxA, pero las dimensiones de AxB y de BxA son diferentes. Finalmente, si A y B son cuadradas y del mismo orden, AxB y BxA también son del mismo orden, pero aún en estos casos, en general no se cumple que AxB = BxA.

     Ejemplo:
     $$AxB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 11 \end{pmatrix}$$
     $$BxA = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$$
     En consecuencia, AxB $\neq$ BxA en este caso.
   - Tampoco se cumplen en el caso del producto de matrices dos propiedades de los conjuntos de números:
     a) Si el producto de dos matrices es la matriz nula, no necesariamente uno de los factores tiene que ser la matriz nula.
     b) Propiedad cancelativa: en general, si AxB = AxC, no necesariamente tiene que ser B =C. La propiedad cancelativa se cumple si la matriz A tiene inversa.

3. Se cumple la propiedad distributiva del producto respecto de la suma, tanto a izquierda como a derecha.

   Distributiva a izquierda: Ax(B + C) = AxB + AxC
   Distributiva a derecha: (A + B)xC = AxC + BxC

4. Propiedades de las matrices traspuestas

   $(A + B)^T = A^T + B^T$.
   $(A^T)^T = A$.
   $(kA)^T = kA^T$ (si $k$ es un escalar).
   $(AB)^T = B^T A^T$

5. Propiedades de las matrices inversas

   $(A^{-1})^{-1} = A$
   $(AxB)^{-1} = B^{-1}xA^{-1}$
   $(AxBxC)^{-1} = C^{-1}xB^{-1}xA^{-1}$
   $(A^{T})^{-1} = (A^{-1})^{T}$

6. Propiedades de la traza de matrices

   Tr(A + B) = Tr(A) + Tr(B)
   Tr(A - B) = Tr(A) - Tr(B)
   Tr(AxB) = Tr(BxA)   si existen ambos productos
   Tr(AxBxC) = Tr(BxCxA) = Tr(CxBxA)

**Ejemplos de operaciones con matrices**

Sean:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 5 & 0 & -1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}\ y\ C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

*a)* ¿Qué clase de matrices son?
*b)* Calcular: - *A* - *B* + *C*,   *A* + *B* - *C*   y   3*A* + *C*/2.
*c)* Calcular: (*A*x*B*)x$C^{-1}$.
*d*) Calcular la inversa de *A* y comprobar el resultado.

*Resolución*:

*a)* Las tres matrices son cuadradas y de orden tres. *A* su vez, *B* es una matriz triangular, ya que todas las entradas debajo de la diagonal principal son ceros, y *C* es antisimétrica porque los elementos simétricos son opuestos entre sí.

*b)*

$$\bullet\ -A-B+C = -\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 5 & 0 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -2-3+2 & -4+1+0 & -1+2-1 \\ -1-0+0 & 2-5-1 & -3-6+2 \\ -5-0+1 & 0-0-2 & 1-9+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -3 & 0 \\ -1 & -4 & -7 \\ -4 & -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

$$\bullet\ A+B-C = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 5 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2+3-2 & 4-1-0 & 1-2+1 \\ 1+0-0 & 2+5+1 & 3+6-2 \\ 5-0-1 & 0+0+2 & -1+9-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 7 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$\bullet\ 3A + C/2 = 3\cdot\begin{pmatrix}2 & 4 & 1\\ 1 & -2 & 3\\ 5 & 0 & -1\end{pmatrix} + \frac{\begin{pmatrix}2 & 0 & -1\\ 0 & -1 & 2\\ 1 & -2 & 5\end{pmatrix}}{2} =$$

$$= \begin{pmatrix}6 & 12 & 3\\ 3 & -6 & 9\\ 15 & 0 & -3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1 & 0 & -1/2\\ 0 & -1/2 & 1\\ 1/2 & -1 & 5/2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6+1 & 12+0 & 3-1/2\\ 3+0 & -6-1/2 & 9+1\\ 15+1/2 & 0-1 & -3+5/2\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix}7 & 12 & 5/2\\ 3 & -13/2 & 10\\ 31/2 & -1 & -1/2\end{pmatrix}.$$

*c)*

• Puesto que se trata de calcular $A \cdot B \cdot C^{-1}$, calcularemos primero la inversa de $C$ y luego haremos el producto.

$$C^{-1}\left(\begin{array}{ccc|ccc}2 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0\\ 1 & -2 & 5 & 0 & 0 & 1\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc}2 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0\\ 0 & -4 & 11 & -1 & 0 & 2\end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc}2 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -3 & 1 & 4 & -2\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc}-6 & 0 & 0 & -2 & 4 & -2\\ 0 & 3 & 0 & -2 & -11 & 4\\ 0 & 0 & -3 & 1 & 4 & -2\end{array}\right) \sim$$

• Dividimos la primera fila entre -6, la segunda entre 3 y la tercera entre -3 para que en la mitad izquierda quede la matriz identidad,

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & -1/3 & -2/3 & 1/3\\ 0 & 1 & 0 & -2/3 & -11/3 & 4/3\\ 0 & 0 & 1 & -1/3 & -4/3 & 2/3\end{array}\right).$$

• Por lo tanto, la matriz inversa de $C$ es:

$$C^{-1} = \begin{pmatrix}-1/3 & -2/3 & 1/3\\ -2/3 & -11/3 & 4/3\\ -1/3 & -4/3 & 2/3\end{pmatrix}$$

• *A* continuación, se calcula el producto de las matrices $A$ y $B$,

$$A\cdot B = \begin{pmatrix}2 & 4 & 1\\ 1 & -2 & 3\\ 5 & 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & -1 & -2\\ 0 & 5 & 6\\ 0 & 0 & 9\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6 & 18 & 29\\ 3 & -11 & 13\\ 15 & -5 & -19\end{pmatrix},$$

• Por último, calculamos $(A\cdot B)\cdot C^{-1}$.

$$(A \cdot B) \cdot C^{-1} = \begin{pmatrix} 6 & 18 & 29 \\ 3 & -11 & 13 \\ 15 & -5 & -19 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 & 1/3 \\ -2/3 & -11/3 & 4/3 \\ -1/3 & -4/3 & 2/3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{6}{3} - \frac{36}{3} - \frac{29}{3} & -\frac{12}{3} - \frac{198}{3} - \frac{116}{3} & \frac{6}{3} + \frac{72}{3} + \frac{58}{3} \\ \frac{3}{3} + \frac{22}{3} - \frac{13}{3} & -\frac{6}{3} + \frac{121}{3} - \frac{52}{3} & \frac{3}{3} - \frac{44}{3} + \frac{26}{3} \\ \frac{15}{3} + \frac{10}{3} + \frac{19}{3} & -\frac{30}{3} + \frac{55}{3} + \frac{76}{3} & \frac{15}{3} - \frac{20}{3} - \frac{38}{3} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 59/3 & 326/3 & 136/3 \\ 4 & 21 & -5 \\ 44/3 & 101/3 & -43/3 \end{pmatrix}.$$

• Sacando factor común 1/3, el resultado puede escribirse como:

$$(A \cdot B) \cdot C^{-1} = 1/3 \cdot \begin{pmatrix} 59 & 326 & 136 \\ 12 & 63 & -15 \\ 44 & 101 & -43 \end{pmatrix}.$$

*d*)

• Primero se construye la matriz $M = (A \vdots \mathrm{I})$ y luego se va desarrollando por Gauss. Así pues:

$$M = (A \vdots I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 4 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 4 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 5 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -20 & -7 & -5 & 0 & 2 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 4 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 5 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 156 & 20 & 40 & -16 \end{array}\right).$$

• Se simplifica un poco para que las operaciones no sean tan costosas, dividiendo la tercera fila entre cuatro. De este modo, se tiene

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 4 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 5 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 39 & 5 & 10 & -4 \end{array}\right) \text{ y se continua calculando,}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 78 & 156 & 0 & 34 & -10 & 4 \\ 0 & -312 & 0 & -64 & 28 & 20 \\ 0 & 0 & 39 & 5 & 10 & -4 \end{array}\right).$$

Se vuelve a simplificar, dividiendo la primera fila entre dos y la segunda entre cuatro,

$$\left(\begin{array}{ccc:ccc} 39 & 78 & 0 & 17 & -5 & 2 \\ 0 & -78 & 0 & -16 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 39 & 5 & 10 & -4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc:ccc} -3042 & 0 & 0 & -78 & -156 & -546 \\ 0 & -78 & 0 & -16 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 39 & 5 & 10 & -4 \end{array}\right).$$

• Puesto que ya ha quedado una matriz diagonal en la mitad izquierda de *M*, se procede a transformar esta mitad izquierda en una matriz identidad, dividiendo la primera fila entre -3042, la segunda entre -78 y la tercera entre 39,

$$\left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & 1/39 & 2/39 & 7/39 \\ 0 & 1 & 0 & 8/39 & -7/78 & -5/78 \\ 0 & 0 & 1 & 5/39 & 10/39 & -4/39 \end{array}\right).$$

Así pues, la matriz que ha quedado en la mitad derecha es precisamente la matriz identidad, que sacando factor común 1/78 se puede escribir como:

$$A^{-1} = 1/78 \begin{pmatrix} 2 & 4 & 14 \\ 16 & -7 & -5 \\ 10 & 20 & -8 \end{pmatrix}.$$

• Para comprobar el resultado, la matriz inversa de *A* tiene que cumplir: $AA^{-1} = \mathrm{I}$.

Procedamos a la comprobación:

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 5 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 14 \\ 16 & -7 & -5 \\ 10 & 20 & -8 \end{pmatrix} 1/78 =$$

$$= \begin{pmatrix} 2\cdot 2 + 4\cdot 16 + 10 & 2\cdot 4 - 4\cdot 7 + 20 & 2\cdot 14 - 4\cdot 5 - 8 \\ 2 - 2\cdot 16 + 3\cdot 10 & 4 + 2\cdot 7 + 3\cdot 20 & 14 + 2\cdot 5 - 3\cdot 8 \\ 5\cdot 2 + 0 - 10 & 5\cdot 4 - 0 - 20 & 5\cdot 14 - 0 + 8 \end{pmatrix} 1/78 =$$

$$= \begin{pmatrix} 78 & 0 & 0 \\ 0 & 78 & 0 \\ 0 & 0 & 78 \end{pmatrix} 1/78 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{I}.$$

# MATRICES Y SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

¿Cómo puede escribirse un sistema lineal de ecuaciones mediante notación matricial? Sea el sistema:

$$\begin{cases} a_{11}.x_1 + a_{12}.x_2 + \dots\dots + a_{1n}.x_n = b_1 \\ a_{21}.x_1 + a_{22}.x_2 + \dots\dots + a_{2n}.x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}.x_1 + a_{m2}.x_2 + \dots\dots + a_{mn}.x_n = b_n \end{cases}$$

Utilizando la definición de igualdad de matrices y la siguiente notación:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$$

entonces el sistema lineal de ecuaciones es equivalente a la expresión: **A**.**X = b**. La matriz **A** se denomina “matriz de coeficientes del sistema”, el vector **X** representa las incógnitas y el vector **b** da los términos independientes de las ecuaciones del sistema. Si a la matriz A se le agrega como columna adicional final el vector b, entonces se obtiene la “matriz ampliada” *M* del sistema.

$$M = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

Cada fila de *M* corresponde a una ecuación del sistema y cada columna a los coeficientes de una incógnita, excepto la última, que corresponde a las constantes del sistema.

Un sistema de ecuaciones lineales puede resolverse trabajando con su matriz ampliada, específicamente, reduciéndola a forma escalonada mediante el método de Gauss.

## Método de Gauss para resolver sistemas de ecuaciones lineales

El método de Gauss, ya presentado anteriormente, tiene una notación simplificada si se utiliza la notación matricial. El procedimiento se ilustra en el siguiente ejemplo.

*Ejemplo*: Sea el sistema,

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & z & = & 3 \\ 2x & + & 5y & - & z & = & -4 \\ 3x & - & 2y & - & z & = & 2 \end{array}\right\}$$

su matriz ampliada asociada es:

$$\begin{pmatrix} x & y & z & & \\ 1 & 2 & 1 & \vdots & 3 \\ 2 & 5 & -1 & \vdots & -4 \\ 3 & -2 & -1 & \vdots & 2 \end{pmatrix}.$$

Ahora resolvemos por el método de Gauss sabiendo que la primera columna corresponde a los coeficientes de la *x*, la segunda a los de la *y*, la tercera a los de la *z* y la cuarta a los términos independientes:

$$\begin{pmatrix} x & y & z & & \\ 1 & 2 & 1 & \vdots & 3 \\ 2 & 5 & -1 & \vdots & -4 \\ 3 & -2 & -1 & \vdots & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} x & y & z & & \\ 1 & 2 & 1 & \vdots & 3 \\ 0 & 1 & -3 & \vdots & -10 \\ 0 & -8 & -4 & \vdots & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} x & y & z & & \\ 1 & 2 & 1 & \vdots & 3 \\ 0 & 1 & -3 & \vdots & -10 \\ 0 & 0 & -28 & \vdots & -84 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} x & y & z & & \\ 1 & 2 & 1 & \vdots & 3 \\ 0 & 1 & -3 & \vdots & -10 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} x & y & z & & \\ 1 & 2 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} x & y & z & & \\ 1 & 0 & 0 & \vdots & 2 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 3 \end{pmatrix}.$$

De este modo, el sistema tiene la solución única: $\{x = 2,\ y = -1,\ z = 3\}$.

## Ejemplos de resolución de sistemas de ecuaciones lineales por matrices

Hallar el valor de *x, y, z, t* en los siguientes sistemas de ecuaciones lineales aplicando matrices:

*a)* $\left.\begin{array}{l} x + y - 2z + 4t = 5 \\ 2x + 2y - 3z + t = 3 \\ 3x + 3y - 4z - 2t = 1 \end{array}\right\}$ *b)* $\left.\begin{array}{l} x + y - 2z + 3t = 4 \\ 2x + 3y - 3z + t = 3 \\ 5x + 7y + 4z + t = 5 \end{array}\right\}$

*a)* La matriz *M* asociada al sistema de ecuaciones es:

$$M = \begin{pmatrix} x & y & z & t & & \\ 1 & 1 & -2 & 4 & \vdots & 5 \\ 2 & 2 & -3 & 1 & \vdots & 3 \\ 3 & 3 & -4 & -2 & \vdots & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} x & y & z & t & & \\ 1 & 1 & -2 & 4 & \vdots & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & \vdots & -7 \\ 0 & 0 & 2 & -14 & \vdots & -14 \end{pmatrix}.$$

La tercera fila se suprime, puesto que es múltiplo de la segunda. Así, el sistema queda formado por dos ecuaciones con cuatro incógnitas. El sistema es compatible e indeterminado, esto es, tiene infinitas raíces.

Despejando en la segunda ecuación se obtiene $z = 7t - 7$. En la segunda ecuación se puede despejar x en función de t e y: $x = -9 - y + 10t$. El conjunto de raíces del sistema tiene la forma: $\{x = -9-y+10t, y, z = 7t - 7, t\}$.

Dependiendo de qué valores se escojan para $y$ y $t$, se obtienen todas las raíces posibles del sistema. Así, para $y = t = 0$ tendremos la raíz del sistema: $\{x = -9, y = 0, z = -7, t = 0\}$.

*b)* La matriz *M* asociada al sistema de ecuaciones es:

$$M = \begin{pmatrix} x & y & z & t & & \\ 1 & 1 & -2 & 3 & \vdots & 4 \\ 2 & 3 & 3 & -1 & \vdots & 3 \\ 5 & 7 & 4 & 1 & \vdots & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} x & y & z & t & & \\ 1 & 1 & -2 & 3 & \vdots & 4 \\ 0 & 1 & 7 & -7 & \vdots & -5 \\ 0 & 2 & 14 & -14 & \vdots & -15 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} x & y & z & t & & \\ 1 & 1 & -2 & 3 & \vdots & 4 \\ 0 & 1 & 7 & -7 & \vdots & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & -5 \end{pmatrix}$$

No hay necesidad de continuar calculando nada más, puesto que la matriz escalonada ya nos indica que el sistema es incompatible (SI), es decir, que no hay raíces. Específicamente, la tercera fila de la matriz escalonada corresponde a la ecuación:

$$0x + 0y + 0z + 0t = -5$$

obteniendo como resultado $0 = -5$, que es absurdo. Por lo tanto, decimos que no tiene raíces o que el conjunto solución es vacío.

## DETERMINANTES

A cada matriz *n*-cuadrada $A = (a_{ij})$ se le asigna un escalar particular denominado determinante de *A*. Notación: | A |, Det (A) ó

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{vmatrix}$$

(con m = n, pues la matriz es cuadrada).

Una tabla ordenada $n \times n$ de escalares situada entre dos líneas verticales, llamada determinante de orden *n*, no es una matriz, sino un número. La función determinante apareció por primera vez en el estudio de los sistemas de ecuaciones lineales. Veremos que se trata de una herramienta muy útil para la resolución de dichos sistemas.

## Determinantes de orden 1 y 2

Los determinantes de orden uno y dos se definen como sigue:

$$|a_{11}| = a_{11}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Así, el determinante de una matriz $1\times1$, $A = (a_{11})$, es el propio escalar $a_{11}$, es decir, det $(A) = |a_{11}| = a_{11}$. El determinante de una matriz de orden 2 se obtiene de restar, al producto de los elementos de la diagonal principal, el producto de los elementos de la diagonal secundaria.

*Ejemplos:*

*a)* Dado que el determinante de orden uno es el mismo escalar, tenemos det (24) = 24, det(-3) = -3, det $(3x+5) = 3x+5$.

*b)*

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = (3)(1) - (5)(2) = 3 - 10 = -7.$$

*c)*

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = (2)(-4) - (-3)(1) = -8 - (-3) = -8 + 3 = -5.$$

## Determinantes de orden 3

Consideremos una matriz $3 \times 3$ arbitraria $A = (a_{i\,j})$. El determinante de $A$ se define como sigue:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{13}a_{22}a_{31} -$$

$$-\mathbf{a_{12}a_{21}a_{33} - a_{32}a_{23}a_{11}}$$

Obsérvese que hay seis términos, cada uno producto de tres elementos de la matriz. Tres de los términos aparecen con signo positivo (conservan su signo) y tres con signo negativo (cambian su signo). Para calcular los determinantes de orden tres, el siguiente diagrama, conocido como "Regla de Sarrus", puede ayudar a resolverlos:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \text{(Para los tres productos positivos).}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \text{(Para los tres productos negativos).}$$

*Ejemplo*:

Calcular el valor del determinante: $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -5 \\ -2 & 1 & 4 \end{vmatrix}$.

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -5 \\ -2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = (3)(2)(4) + (2)(-5)(-2) + (0)(1)(1) - (-2)(2)(1) - (0)(2)(4) - (1)(-5)(3) =$$

$$= 24 + 20 + 0 - (-4) - 0 - (-15) = 44 + 4 + 15 = 63$$

El determinante de la matriz 3×3, $A = (a_{i\,j})$, puede escribirse como:

$\det(A) = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) =$

$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

que es una combinación lineal de tres determinantes de orden dos, cuyos coeficientes (con signos alternantes) constituyen la primera fila de la matriz dada. Nótese que cada matriz 2 × 2 se obtiene suprimiendo en la matriz inicial la fila y la columna que contienen su coeficiente.

*Ejemplo:*

Para mostrar que la propiedad anterior se cumple, volvemos sobre el ejemplo anterior, en el que el determinante resultaba igual a 63.

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -5 \\ -2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 0 & -5 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 3(8+5) - 2(0-10) + 1(0+4) = 39 + 20 + 4 = 63$$

## Determinantes de orden 4 o superior

Este procedimiento de cálculo se puede generalizar. Obsérvese que el determinante de orden 3 se ha reducido al problema de resolver tres determinantes de orden 2, mediante una suma algebraica de los elementos de la primera fila, multiplicada por determinantes que resultan de suprimir en la matriz original una fila y una columna (las correspondientes a los elementos de la primera fila). El procedimiento es válido también si se toma como "pivote" cualquier otra fila o cualquier columna. La generalización más importante tiene relación con el orden del determinante. Un determinante de orden 4 se puede obtener mediante el mismo procedimiento anterior, calculando 4 determinantes de orden 3. Si el desarrollo de la suma algebraica se hace, por ejemplo, a partir de la segunda columna, se obtiene:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = -a_{12}.\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + a_{22}.\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} -$$

$$- a_{32}.\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} + a_{42}.\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \end{vmatrix}$$

## Propiedades de los determinantes

1. Si todos los elementos de una fila o columna son ceros, entonces el determinante de la matriz vale cero.
2. Si dos líneas (filas o columnas) paralelas son iguales, el determinante es cero.
3. Si la matriz es triangular, entonces el determinante es igual al producto de los elementos de la diagonal principal.
4. Si a una línea de una matriz se le suma una combinación lineal de las restantes líneas paralelas, entonces el determinante de la nueva matriz es igual al determinante de la matriz original.
5. Si en una matriz se intercambian de lugar dos líneas paralelas, entonces la nueva matriz tiene el mismo determinante que la original, pero cambiado de signo.
6. Si una línea de la matriz se multiplica por una constante K, entonces la nueva matriz tiene el mismo determinante que la original, multiplicado por K.
7. Si una matriz de orden "n" se multiplica por la constante K, entonces el determinante de la nueva matriz es el determinante de la matriz original multiplicado por $K^n$.
8. El determinante de una matriz $A$ y el de su traspuesta $A^T$ son iguales, es decir,

   $$|A| = |A^T|$$

9. Si A y B son dos matrices cuadradas de orden n, entonces:

   $$|AxB| = |A|x|B|$$

10. La inversa de la matriz cuadrada A existe, si y sólo si, el det(A) $\neq$ 0.
11. Todo determinante de orden n se puede calcular como suma algebraica de n determinantes de orden n-1, mediante el desarrollo de los elementos de una fila o columna, con el signo que corresponde a $(-1)^{i+j}$, donde i y j son los subíndices de fila y columna, multiplicados por los determinantes de orden n-1 que resultan de suprimir la fila i y la columna j de la matriz original.

Sea $A = (a_{nn})$ una matriz de orden arbitrario $n \times n$ (siendo $n$ un número par). Para calcular el det(A) mediante el desarrollo (por ejemplo) de la primera columna, se procede de la siguiente manera:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} - a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \cdots \quad \cdots$$

$$- a_{n1} \begin{vmatrix} a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}.$$

Los signos se van alternando según los subíndices de los elementos de la primera columna.

*Ejemplo*:

$$\text{Calcular el determinante de } A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 5 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

Si observamos la matriz, podemos ver que en la tercera columna hay dos ceros. Así pues, si elegimos la tercera columna para calcular el determinante por la propiedad 11, nos ahorramos de calcular dos determinantes, ya que el producto de un determinante por cero es cero.

$$\det(A) = -1 \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 4 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} - (-3) \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 5 & 0 \\ 4 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -1(-12 + 0 - 4 - 16 - 3) +$$

$$+ 3(15 + 0 + 2 + 20 - 2 - 0) = -1(-35) + 3(35) = 35 + 105 = 140.$$

## Ejemplos de cálculo de determinantes

Calcular los siguientes determinantes:

a) $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -4 \end{vmatrix}$.

b) $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 5 & 2 & -7 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 5 & 2 & -7 \\ 4 & 0 & 1 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 4 \\ 5 & 0 & 7 \end{vmatrix}$.

c) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 5 & 4 & -3 & 2 \\ 1 & 0 & 6 & -2 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 0 & -1 & 2 & 2 \\ 4 & 1 & 5 & 2 \\ 3 & -8 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & -2 \end{vmatrix}$.

a) $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 5 - (-6) = 5 + 6 = 11.$

$\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -4 \end{vmatrix} = -12 - (-2) = -12 + 2 = -10.$

b) $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 5 & 2 & -7 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$ =al haber toda una fila nula, el determinante da como resultado = 0.

$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 5 & 2 & -7 \\ 4 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 48 + 0 - 16 - (-15) - 0 = 86 - 16 + 15 = 85.$

$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 4 \\ 5 & 0 & 7 \end{vmatrix} = -42 + 20 + 0 - 0 - 14 - 0 = -36.$

c) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 5 & 4 & -3 & 2 \\ 1 & 0 & 6 & -2 \end{vmatrix} = +2 \begin{vmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 4 & -3 & 2 \\ 0 & 6 & -2 \end{vmatrix} + 5 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 6 & -2 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ -1 & 2 & -1 \\ 4 & -3 & 2 \end{vmatrix} =$

= 2(-6-24+16+2)+ 5(-4-24+6)-1(4+12-16-3) = -24-110+3 = -131.

$\begin{vmatrix} 0 & -1 & 2 & 2 \\ 4 & 1 & 5 & 2 \\ 3 & -8 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & -2 \end{vmatrix} = -(-1) \begin{vmatrix} 4 & 5 & 2 \\ 3 & -2 & 0 \\ 1 & 4 & -2 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 4 & 1 & 5 \\ 3 & -8 & -2 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} =$

= 1·(16+0+24-(-4)-(-30)-0) -2·(-128-2+30-(-40)-12-(-16)) = 74-2·(-56) =
= 74+112 = 186.

## Matriz adjunta

Consideremos una matriz *n*-cuadrada $A = (a_{ij})$. Se denomina "*submatriz*" de A, a cualquier matriz que se obtiene suprimiendo alguna fila, algunas filas, alguna columna o algunas columnas de A.

Si al suprimir alguna(s) fila(s) y/o columna(s) de la matriz A, se obtiene una submatriz cuadrada, entonces el determinante de esta submatriz se llama un “*determinante menor de A*” o simplemente un “menor” asociado a la matriz A.

Si en la matriz n-cuadrada A se suprimen la fila h y la columna g, entonces se obtiene una submatriz cuadrada de orden (n-1). Se llama *adjunto* (o *cofactor*) del elemento $a_{hg}$, y se lo anota $A_{hg}$, al determinante menor que resulta de suprimir en *A* la fila h y la columna g, multiplicado por el factor $(-1)^{h+g}$.

Si se calculan todos los adjuntos posibles, es posible definir una nueva matriz de orden n, tal que en lugar de los elementos de A, figuren los adjuntos (cofactores) correspondientes. Si esta matriz se traspone, entonces se obtiene la *matriz adjunta o matriz de cofactores*.

$$\operatorname{adj} A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

*Ejemplo*:

$$\text{Sea } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Los cofactores de los nueve elementos de *A* son:

$$A_{11} = + \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = -17 \quad A_{12} = - \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 4 \quad A_{13} = + \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 6$$

$$A_{21} = - \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = -11 \quad A_{22} = + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 7 \quad A_{23} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3$$

$$A_{31} = + \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = 1 \quad A_{32} = - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -2 \quad A_{33} = + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} = -3$$

La matriz de los cofactores traspuesta proporciona la matriz adjunta de *A*:

$$\operatorname{adj} A = \begin{pmatrix} -17 & -11 & 1 \\ 4 & 7 & -2 \\ 6 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

*Aplicación de la matriz adjunta para hallar la matriz inversa*

Propiedad 12. Para toda matriz cuadrada $A$ se cumple que:

$$A\text{x}(\text{adj } A) = (\text{adj } A)\text{x}A = |A|\text{x}I$$

Posmultiplicando por $A^{-1}$ se obtiene:

$$(\text{adj. } A)\text{x}A\text{x}A^{-1} = |A|.I\text{x}A^{-1}$$

$$(\text{adj. } A)\text{x}I = |A|\text{x}A^{-1}$$

$$(\text{adj. } A) = |A|\text{x}A^{-1}$$

De este modo, si $|A| \neq 0$, es posible despejar la inversa de A y resulta:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}(\text{adj } A)$$

Observemos que esta propiedad nos permite hallar por otro método la inversa de una matriz, y también explica por qué es necesario que el determinante de A no se anule para que exista la inversa de A.

*Ejemplo*: Consideremos la matriz A y la matriz adj A.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}, \ \text{adj } A = \begin{pmatrix} -17 & -11 & 1 \\ 4 & 7 & -2 \\ 6 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

Calculamos el det $A$:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix} = -15 + 8 + 0 - 6 - 0 - 2 = -15 \neq 0.$$

Entonces, aplicando la propiedad anterior:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}(\text{adj } A), \text{ obtendremos:}$$

$$A^{-1} = -1/15 \begin{pmatrix} -17 & -11 & 1 \\ 4 & 7 & -2 \\ 6 & 3 & -3 \end{pmatrix}.$$

## Ejemplos de cálculo de la matriz inversa

Calcular, por la propiedad anterior, la inversa de las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Primero hallaremos el determinante de las matrices *A y B*:

$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 0$; como el determinante es cero, no existe la inversa de la matriz $A$.

$$\det B = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 15 + 2 = 17.$$

El siguiente paso es hallar la matriz adjunta de la matriz B. Los cofactores de los cuatro elementos de *B* son:

$B_{11} = 5 \quad B_{12} = -2$

$B_{21} = 1 \quad B_{22} = 3$

y la matriz adjunta de *B* será:

$$\text{adj } B = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Aplicando ahora la propiedad $B^{-1} = \frac{1}{|B|}(\text{adj } B) =$

$$B^{-1} = \frac{1}{17}\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/17 & 1/17 \\ -2/17 & 3/17 \end{pmatrix}.$$

Para el caso de la matriz A de orden 3, empezaremos por hallar el det A

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \end{vmatrix} = -10 - 4 - 12 = -26.$$

Los cofactores de los nueve elementos de *A* son:

$$A_{11} = +\begin{vmatrix} 5 & 0 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = -10 \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 4 \quad A_{13} = +\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -2$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = -8 \quad A_{22} = +\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -2 \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1$$

$$A_{31} = +\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} = -10 \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 4 \quad A_{33} = +\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 11$$

La traspuesta de la matriz de los cofactores anteriores proporciona la matriz adjunta de *A*:

$$\operatorname{adj} A = \begin{pmatrix} -10 & -8 & -10 \\ 4 & -2 & 4 \\ -2 & 1 & 11 \end{pmatrix}.$$

Aplicando la propiedad de la matriz inversa obtenemos $A^{-1}$:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}(\operatorname{adj} A) = \frac{1}{-26}\begin{pmatrix} -10 & -8 & -10 \\ 4 & -2 & 4 \\ -2 & 1 & 11 \end{pmatrix} = \text{simplificando,}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 5/13 & 4/13 & 5/13 \\ -2/13 & 1/13 & -2/13 \\ 1/13 & -1/26 & -11/26 \end{pmatrix}$$

## Rango de una matriz

Sea la matriz $A = (a_{ij})$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Consideremos todas las submatrices cuadradas posibles de A. Hay mxn submatrices cuadradas de orden 1, mx(m-1)xnx(n-1)/4 submatrices cuadradas de orden 2, mx(m-1)x(m-2)nx(n-1)x(n-2)/36 submatrices cuadradas de orden 3. El orden de las submatrices de mayor orden es mín(m,n). Consideremos todos los determinantes menores de la matriz A y sus respectivos órdenes. Interesa saber si existen menores distintos de cero, y de ellos, el de mayor orden.

Definición: Se llama *rango* de una matriz al mayor orden de un *menor* no nulo.

La definición parece un trabalenguas. La idea es identificar en la matriz original una submatriz cuadrada, del mayor orden posible, de forma que su determinante no sea nulo. El orden de esta submatriz es el rango de la matriz original. Veamos algunos ejemplos.

a) Sea la matriz $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ de orden 2, cuyo determinante es

1x3 – (-1)x2 = 5 $\neq$ 0. Como no es posible obtener una submatriz de orden mayor que dos, entonces el rango de la matriz es 2.

b) Sea la matriz $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. El determinante de esta matriz es cero, por

lo que el rango de la matriz es menor que 2. ¿Existe alguna submatriz cuadrada de orden 1 cuyo determinante no sea cero? Como la respuesta es positiva, |1| = 1 $\neq$ 0, el rango de la matriz es 1.

c) Sea la matriz $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. El determinante de la matriz es cero, y todos

los menores de orden 1 también valen cero. Se conviene que el rango de esta matriz es cero.

Hay varios procedimientos para hallar el rango de una matriz en general. Un método consiste en buscar menores no nulos de orden cada vez más alto, hasta que no sea posible encontrar uno no nulo de orden mayor. Otro procedimiento consiste en calcular todos los menores de mayor orden posible (por ejemplo, si la matriz es 4x5, se evaluarán todos los menores posibles de orden 4, que son 5) y si alguno es no nulo, el rango es 4 (está dado por el mayor orden posible). Si todos los de mayor orden son nulos, entonces se probará con todos los menores del orden inmediato inferior (en el ejemplo, con todos los menores de orden 3). Finalmente, un procedimiento bastante más rápido, consiste en aplicar las propiedades que refieren a los determinantes nulos. En esta variante se trabaja así: primero se eliminan de la matriz en cuestión, todas las filas y columnas de ceros. Luego se eliminan todas las filas o columnas repetidas. Luego se eliminan todas las filas o columnas que son proporcionales a otras líneas paralelas. Todavía se puede simplificar más eliminando las filas o columnas que son combinaciones lineales de las restantes. Resultará así una submatriz de orden más chico que la original, pero que, en virtud de las propiedades de los determinantes, tendrá el mismo rango que la original.

Ejemplo: Se quiere calcular el rango de la matriz $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 4 & 0 \\ 3 & -3 & 6 & 0 \\ 4 & 4 & 8 & 0 \end{pmatrix}$.

Se observa que la cuarta columna puede eliminarse por ser toda de ceros. Se observa que la tercera columna puede eliminarse porque es proporcional a la primera columna. Se obtiene entonces la submatriz:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \\ 3 & -3 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$$

Obsérvese que la tercera fila es proporcional a la primera, y la cuarta es proporcional a la segunda, por lo que se puede eliminar las dos últimas filas, y resulta: $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$, cuyo determinante es 4, diferente de cero. Esta es la submatriz de mayor orden (aunque no la única) con determinante distinto de cero, por lo que la matriz original (y también esta submatriz) tiene rango 2.

Ejemplos:

*a)* Sea *A* una matriz de orden 3. Hallar el rango (*A*).

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 3 & 6 & 5 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Como *A* es una matriz cuadrada de orden 3, como máximo el rango (*A*) puede valer tres. Veamos primero si existe alguna submatriz cuadrada de orden 2 con determinante no nulo.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 6 - 6 = 0.$$

Ya que el resultado es cero, probaremos con otras submatrices de orden 2 hasta encontrar una cuyo determinante no sea cero.

$$\begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 1.5 - (-5).3 = 5 + 15 = 20 \neq 0$$

Puesto que el resultado de calcular el determinante de esta submatriz de *A* no es nulo, podemos afirmar de momento que el rango de *A* es mayor o igual que 2. Para ver si el rango puede ser tres, tenemos que calcular el determinante de A:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 3 & 6 & 2 \\ 0 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 24 + 0 + 15 - 0 - 24 + 2 = 17 \neq 0.$$

Dado que el determinante de *A* no es nulo y a su vez es de orden 3, el rango (*A*) = 3.

La definición del rango no requiere que las matrices sean cuadradas. En ese sentido va el siguiente ejemplo.

b) Calcular el rango de la matriz $B$ de orden $3 \times 4$:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & -4 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = -4 + 4 = 0. \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 2 = 0.$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1 + 0 = -1 \neq 0.$$

Como hay un determinante de orden dos no nulo, el rango de la matriz $B$ es mayor o igual que 2. Calculamos a continuación los determinantes de orden superior:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -4 - 4 + 2 + 4 + 4 - 2 = 0.$$

Probamos con un segundo determinante de orden tres:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & -4 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -12 + 2 + 0 + 0 + 12 + 1 = 3 \neq 0.$$

Así pues, como hay un determinante de orden tres que no es nulo, el rango ($B$) = 3. El rango de B no puede ser mayor que 3, ya que no se puede formar un determinante de orden 4. Recuérdese que para poder calcular el determinante de una matriz o de una submatriz, éstas tienen que ser cuadradas.

## Propiedades del rango

1. Si la matriz A es mxn, entonces el rango de A es: $r(A) \leq$ mín(m,n).
2. En general es $r(A{\times}B) \neq r(B{\times}A)$.
3. $r(A{\times}B) \leq$ mín(r(A),r(B)).
4. Si A es cuadrada de rango máximo ($|A| \neq 0$), entonces para cualesquiera matrices B y C se cumple: $r(A{\times}B) = r(B)$ y $r(C{\times}A) = r(C)$.
5. Sea $A_{n.n}$ simétrica e invertible. Entonces existe una matriz Q tal que $Q^T{\times}A{\times}Q$ es diagonal (se dice que Q "diagonaliza" la matriz A).
6. Si $X_{n.k}$ es de rango máximo, entonces $r(X^T{\times}X) = r(X)$.

## **Uso de los determinantes para resolver sistemas lineales**

Ya hemos visto cómo utilizar las matrices y su aplicación a los sistemas de ecuaciones lineales. La siguiente regla muestra cómo usar los determinantes para resolver sistemas compatibles determinados.

## Regla de Cramer

Los pasos a seguir para resolver los sistemas de ecuaciones según la regla de Cramer son los siguientes. Se supone que el sistema es cuadrado de orden n, esto es, que existen tantas ecuaciones como incógnitas.

**1.** Hallar la matriz ampliada $(A \vdots b)$ asociada al sistema de ecuaciones.
**2.** Calcular el determinante de *A* (el cual se supone diferente de cero).
**3**. Aplicar la regla de Cramer, que consiste en sustituir cada columna de la matriz A por el vector b. Se obtienen así tantas matrices cuadradas como incógnitas tiene el sistema. Para cada matriz así obtenida se calcula el correspondiente determinante. Si se denomina $|A_1|$ al determinante de la matriz A donde se ha sustituido la primera columna por b, $|A_2|$ al determinante de la matriz A donde se ha sustituido la segunda columna por b, etc., entonces la solución del sistema se obtiene dividiendo cada uno de estos determinantes entre el determinante de A:

$$\text{SOLUCIÓN} = \left\{ x_1 = \frac{|A_1|}{|A|}, x_2 = \frac{|A_2|}{|A|}, x_3 = \frac{|A_3|}{|A|}, \ldots\ldots, x_n = \frac{|A_n|}{|A|} \right\}$$

*Ejemplo:*

Sea el sistema de ecuaciones lineales formado por dos ecuaciones con dos incógnitas:

$$\left.\begin{aligned} 3x - 2y &= 1 \\ x + 5y &= 3 \end{aligned}\right\}$$

Encontrar el valor de *x* e *y* mediante la regla de Cramer.

Empezaremos con el primer paso, que consiste en hallar la matriz ampliada $(A \vdots b)$ asociada al sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{array}{c} \qquad\; x \quad\; y \qquad b \\ A \vdots b = \begin{pmatrix} 3 & -2 & \vdots & 1 \\ 1 & 5 & \vdots & 3 \end{pmatrix}. \end{array}$$

El segundo paso es calcular el determinante de *A*. Así pues:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 15 + 2 = 17.$$

Y el tercero y último paso consiste en calcular las incógnitas:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -5 \end{vmatrix}}{17} = \frac{5+6}{17} = \frac{11}{17}. \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}}{17} = \frac{9-1}{17} = \frac{8}{17}.$$

(columnas $b$, $y$ en el determinante de $x$; columnas $x$, $b$ en el determinante de $y$)

## Discusión de los sistemas de ecuaciones lineales

A continuación, se analiza si un sistema de ecuaciones lineales tiene o no raíces y si tiene una única o infinitas raíces.

El estudio o discusión de los sistemas de ecuaciones se efectúa aplicando el teorema de Rouché-Fröbenius. Éste dice que con un sistema de ecuaciones lineales pueden ocurrir dos cosas:

**1.** Que el sistema de ecuaciones sea un sistema compatible (S.C.), esto es, que tenga solución no vacía.

**2.** Que el sistema de ecuaciones sea un sistema incompatible (S.I.) o que el conjunto solución sea vacío.

El primer caso puede dividirse en dos:

*a)* que sea un sistema compatible y determinado (S.C.D.), esto es, que tenga una única raíz;

*b)* que el sistema sea compatible e indeterminado (S.C.I.), es decir, que tenga infinitas raíces.

Sea un sistema no homogéneo:

$$\begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{pmatrix}$$

En consecuencia, la matriz ampliada ($A \therefore$ b) asociada al sistema de ecuaciones es:

$$A \vdots b = \left(\begin{array}{cccc} a_{11} & \cdots & a_{1n} & \vdots & b_1 \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} & \vdots & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \vdots & \cdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & \vdots & b_m \end{array}\right)$$

El sistema es compatible cuando rango ($A$) = rango ($A \vdots b$), lo que suele expresarse diciendo que el rango de la matriz de coeficientes coincide con el rango de la matriz ampliada.

Si el sistema anterior es compatible y rango ($A$) = rango ($A \vdots b$) = número de incógnitas, el sistema es compatible y determinado, es decir, tiene una única raíz.

Si, por el contrario, tenemos que rango ($A$) = rango ($A \vdots b$) < número de incógnitas, el sistema es compatible e indeterminado, es decir, tiene infinitas raíces.

Si rango ($A$) $\neq$ rango ($A\vdots b$), el sistema es incompatible y no tiene solución.

*Ejemplos*:

Discutir, sin resolver, los siguientes sistemas de ecuaciones:

a) $\left.\begin{array}{r} x+2y=5 \\ 2x+4y=13 \end{array}\right\}$ b) $\left.\begin{array}{r} 3x-y=8 \\ x+3y=2 \end{array}\right\}$ c) $\left.\begin{array}{r} 6x-2y=-10 \\ 3x-y=-5 \end{array}\right\}$

a) $\left.\begin{array}{r} x+2y=5 \\ 2x+4y=13 \end{array}\right\}$

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix},\quad (A\vdots b)=\begin{pmatrix} 1 & 2 & \vdots & 5 \\ 2 & 4 & \vdots & 13 \end{pmatrix}.$$

$$\text{rango }(A)=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}=4-4=0;\text{rango }(A)=1.$$

$$\text{rango }(A\vdots b)=\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 13 \end{vmatrix}=13-10=3\neq 0;\text{rango }(A\vdots b)=2.$$

Puesto que rango($A$) = 1 $\neq$ rango($A\vdots b$) = 2, el sistema es incompatible; el conjunto solución es vacío.

b) $\left.\begin{array}{r} 3x-y=8 \\ x+3y=2 \end{array}\right\}$

$$A=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix},\quad (A\vdots b)\begin{pmatrix} 3 & -1 & \vdots & 8 \\ 1 & 3 & \vdots & 2 \end{pmatrix}.$$

$$\text{rango }(A)=\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}=9+1=10\neq 0,\ \text{rango }(A)=2.$$

$$\text{rango }(A\vdots b)=\begin{vmatrix} 3 & 8 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}6-8=-2\neq 0,\ \text{rango }(A\vdots b)=2.$$

Ya que rango($A$) = rango($A\vdots b$) = 2 = número de incógnitas, el sistema es compatible y determinado; es decir, existe una única raíz.

c) $\left.\begin{array}{r} 6x-2y=-10 \\ 3x-y=-5 \end{array}\right\}$

$$A=\begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix},\quad (A\vdots b)=\begin{pmatrix} 6 & -2 & \vdots & -10 \\ 3 & -1 & \vdots & -5 \end{pmatrix}.$$

$$\text{rango }(A) = \begin{vmatrix} 6 & -2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -6+6 = 0, \ \text{rango }(A) = 1.$$

$$\text{rango }(A \vdots b) = \begin{vmatrix} 6 & -10 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = -30+30 = 0, \text{ de momento, rango }(A \vdots b) = 1.$$

$$\text{rango }(A \vdots b) = \begin{vmatrix} -2 & -10 \\ -1 & -5 \end{vmatrix} = 10-10 = 0, \text{ rango }(A \vdots b) = 1.$$

Puesto que rango($A$) = rango($A \vdots b$) = 1 < número de incógnitas, el sistema es compatible e indeterminado; existen infinitas raíces.

*Otro ejemplo:* Probar que el sistema siguiente es compatible determinado y calcular el valor de las incógnitas.

$$a) \left.\begin{array}{r} 3x + 2y - z = 4 \\ 2x - y + 2z = 3 \\ x + 3y + 2z = -5 \end{array}\right\}$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad (A \vdots b) = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & \vdots & 4 \\ 2 & -1 & 2 & \vdots & 3 \\ 1 & 3 & 2 & \vdots & -5 \end{pmatrix}$$

Calculamos a continuación el rango de $A$ y el rango de la matriz ampliada ($A \vdots b$):
El rango de la matriz $A$ será:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -6+4-6-1-8-18 = -35 \neq 0 \Rightarrow r(A) = 3$$

El rango de la matriz ampliada ($A \vdots b$) también es 3 pues a lo sumo puede ser 3 y ya tenemos una submatriz (A) con determinante no nulo.

Dado que rango ($A$) = rango ($A \vdots b$) = 3 = número de incógnitas, el sistema es compatible y determinado; tiene, pues, una única raíz.

Resolvamos el sistema mediante la regla de Cramer:

Ya conocemos el det ($A$) = -35

Aplicando la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \\ -5 & 3 & 2 \end{vmatrix}}{-35} = \frac{-68}{-35} = \frac{68}{35} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & -5 & 2 \end{vmatrix}}{-35} = \frac{53}{-35} = \frac{-53}{35}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & -5 \end{vmatrix}}{-35} = \frac{42}{-35} = \frac{-42}{35}$$

Raíz = {$x$ = 68/35; $y$ = -53/35; $z$ = -42/35}.

## *La matriz de insumo-producto*

**Sea una economía con dos sectores productivos A y B. Una parte de su producción es consumida dentro de los sectores productivos (insumos de la producción) y otra parte se destina a satisfacer la demanda de los consumidores finales (hogares, gobierno, demandantes del exterior). El siguiente cuadro, denominado MATRIZ DE INSUMO-PRODUCTO, muestra el monto de las transacciones entre los sectores, medido en unidades monetarias.**

Matriz de Insumo-Producto

| | A | B | Demanda final | Total |
|---|---|---|---|---|
| A | 200 | 1600 | 200 | 2000 |
| B | 600 | 800 | 2600 | 4000 |
| Otros factores | 1200 | 1600 | ----- | |
| Total | 2000 | 4000 | | |

Los “Otros factores” de la producción son otros integrantes del costo, que no son producto de los sectores productivos. Integran los “Otros factores”: las retribuciones personales (y las cargas sociales), la depreciación de los bienes de activo fijo utilizados en la producción y el excedente de explotación (concepto similar al beneficio empresario).

Si se dividen los valores de las columnas de los sectores productivos por el total de cada columna, se obtiene la MATRIZ DE COEFICIENTES DE INSUMO-PRODUCTO para esa economía. En el ejemplo numérico el 10% de la producción de A es consumida por A, mientras que las compras de insumos al sector B representa el 30% de la producción de A. El 40% de la producción de B es consumido por A y un 20% en B.

**Matriz de coeficientes**

| | A | B |
|---|---|---|
| A | 0,1 | 0,4 |
| B | 0,3 | 0,2 |
| Otros | 0,6 | 0,4 |

**Matriz de Leontief**

| | A | B |
|---|---|---|
| A | 0,1 | 0,4 |
| B | 0,3 | 0,2 |

La industria A destina el 40% del valor de su producción a pagar el costo de sus insumos (10% en la propia industria A y 30% en el sector productivo B) y el 60% restante se podría distribuir así:

- 38% en Remuneraciones y Cargas Sociales
- 6% en Depreciaciones
- 16% Excedente de Explotación.

Si no hay variación de stocks (se produce exactamente lo que se demanda), entonces se cumple la siguiente relación para cada uno de los sectores productivos:

Producción en A = Consumido en A de productos A + Consumido en B de productos A + Demanda Final de productos A

Producción en B = Consumido en A de productos B + Consumido en B de productos B + Demanda Final de productos B

Si el vector X = $\begin{pmatrix} X_A \\ X_B \end{pmatrix}$ representa la producción de ambos sectores, y el vector $\begin{pmatrix} DF(A) \\ DF(B) \end{pmatrix}$ la demanda final de la producción de ambos sectores, las relaciones anteriores pueden escribirse así: $\begin{cases} X_A = 0{,}1.X_A + 0{,}4.X_B + DF(A) \\ X_B = 0{,}3.X_A + 0{,}2.X_B + DF(B) \end{cases}$

En notación matricial: $\begin{pmatrix} X_A \\ X_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}4 \\ 0{,}3 & 0{,}2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} X_A \\ X_B \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} DF(A) \\ DF(B) \end{pmatrix}$

$$\left[ I - \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}4 \\ 0{,}3 & 0{,}2 \end{pmatrix} \right] . \begin{pmatrix} X_A \\ X_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} DF(A) \\ DF(B) \end{pmatrix}$$

Despejando resulta: $\begin{pmatrix} X_A \\ X_B \end{pmatrix} = \left[ I - \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}4 \\ 0{,}3 & 0{,}2 \end{pmatrix} \right]^{-1} . \begin{pmatrix} DF(A) \\ DF(B) \end{pmatrix}.$

Se puede verificar que la matriz inversa en este caso resulta igual a $\frac{1}{6}.\begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$ y que se cumple que: $\begin{pmatrix} 2000 \\ 4000 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}.\begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 200 \\ 2600 \end{pmatrix}$.

¿Qué utilidad tiene la matriz de insumo-producto? Podemos resolver fácilmente el problema de determinar el nivel de la producción en cada sector para satisfacer diferentes vectores de demanda final (suponiendo que se mantienen constantes los coeficientes de insumo-producto). Ejemplo: ¿cuánto deberán producir los sectores A y B para satisfacer una demanda de 500 unidades monetarias de productos A y 3200 unidades monetarias de productos B?

Respuesta: $\begin{pmatrix} X_A \\ X_B \end{pmatrix} = \frac{1}{6}.\begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 500 \\ 3200 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}.\begin{pmatrix} 16800 \\ 30300 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2800 \\ 5050 \end{pmatrix}$.

# Repartido Práctico 7: Matrices y Determinantes

**Ejercicio 1**

Sean las matrices: A = $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, B = $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ y C = $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Calcular: 2.A, -2.B, ½.(A+B), A – B, $A^2$, $A^3$ y A.B.
b) Calcular: det.(A), det.(B), det.(A+B), det.(A-B) y det.(A.B).
c) Calcular: det.(C), det.(C′) y det.(5.C).

**Ejercicio 2**

Sean las matrices: A = $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ y B = $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$. Resolver las siguientes ecuaciones en la matriz X:

a) A + X = B
b) A – B = X
c) 3.A + 4.X = 5.A
d) A.B = X
e) A.X = B
f) X.A = B
g) A.X = I

**Ejercicio 3**

Probar las propiedades conmutativa y distributiva del producto escalar de vectores.

**Ejercicio 4**

Encontrar dos matrices $B_{2.2} \neq O$ tal que: $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} xB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

**Ejercicio 5**

Probar que $|A.B| = |A|.|B|$ en el caso particular A = $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ y B = $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.

**Ejercicio 6**

Demostrar que si la matriz A es invertible, entonces: $\left|A^{-1}\right| = \dfrac{1}{|A|}$.

**Ejercicio 7**

Sea A = $\dfrac{1}{2}.\begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$. Probar que $A^3$ = I. Usar este resultado para calcular $A^{-1}$.

# Repartido Práctico 7: Matrices y Determinantes

**Ejercicio 8**

Hallar la inversa de la matriz: $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

**Ejercicio 9**

Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Calcular det.(A), $A^2$ y $A^3$.
b) Probar que $A^3 - 2A^2 + A - I = \mathbf{O}$, donde I es la identidad de orden 3 y **O** es la matriz nula.
c) Demostrar que A tiene inversa y que $A^{-1} = (A - I)^2$.
d) Hallar una matriz P tal que $P^2 = A$. ¿Hay otras matrices con esta propiedad?

**Ejercicio 10**

Sea la matriz $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

a) Calcular M.M′, det.( M.M′) y $(M.M')^{-1}$.
b) Las matrices M.M′ y $(M.M')^{-1}$ son simétricas. ¿Es una coincidencia?

**Ejercicio 11**

Supongamos que A, P y D son matrices cuadradas tales que $A = P.D.P^{-1}$.

a) Probar que $A^2 = P.D^2.P^{-1}$.
b) Probar por inducción completa que $A^n = P.D^n.P^{-1}$ para todo natural n.

**Ejercicio 12**

Sea la matriz $C = \begin{pmatrix} -1/2 & 5 \\ 1/4 & -1/2 \end{pmatrix}$.

Calcular $C^2+C$, $C^3-2C+I$, y luego hallar $C^{-1}$.

**Ejercicio 13**

Sea B una matriz cuadrada de orden 3 tal que $B^2 + 2.B + I = O$. Probar que B tiene inversa y que $B^{-1} = -B - 2.I$.

**Ejercicio 14**

Sea D una matriz cuadrada de orden n que verifica la ecuación: $D^2+D=I$.

a) Probar que D tiene inversa y que $D^{-1} = I + D$.
b) Probar que $D^3 = -I + 2D$ y que $D^4 = 2I - 3D$.

# Repartido Práctico 7: Matrices y Determinantes

**Ejercicio 15**

Sea X una matriz m.n tal que $\det.(X'.X) \neq 0$. Sea $A = I_m - X.(X'.X)^{-1}.X'$.

a) Demostrar que la matriz A es idempotente ( que $A^2 = A$).

b) Verificar que A es idempotente en el caso particular $X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

**Ejercicio 16**

Una economía tiene dos sectores productivos A y B. El 40% de la producción de A es consumida por A, mientras que las compras de insumos al sector B representa el 30% de la producción de A. El 40% de la producción de B es consumo proveniente del sector A y un 20% de la producción de B es autoconsumida por B. La demanda final de los consumidores es de 1.000 unidades monetarias de A y 2500 unidades monetarias de B.

a) Hallar la matriz de Leontief en este problema.
b) Hallar el vector de producción que satisface la demanda agregada total.

**Ejercicio 17**

Sean las matrices:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = A, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Calcular los determinantes de las 5 matrices.
b) Hallar el rango de las 5 matrices.

**Ejercicio 18**

Sean las matrices: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & \alpha \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -2 & 2 & \alpha \\ 3 & 1 & \beta \end{pmatrix}$.

a) Hallar el rango de A, discutiendo según $\alpha$.
b) Hallar el rango de B, discutiendo según $\alpha$ y $\beta$.

# FACULTAD DE CIENCIAS SOCIALES
# DEPARTAMENTO DE ECONOMÍA

## DIPLOMA EN ECONOMÍA PARA NO ECONOMISTAS

### ASIGNATURA: MATEMÁTICA APLICADA A LA ECONOMÍA

### MATERIAL DE CONSULTA Y CASOS PRÁCTICOS

### CURSO 2004
### PARTE IV

**Profesor: David Glejberman**

## 8. ESPACIOS VECTORIALES

Definición: Sea V un conjunto de entes a los que llamaremos *vectores*. Se cumple:

a) Es posible definir la suma de dos elementos cualesquiera de V, el resultado de la suma también es un elemento de V y se verifica que {V, +} es un grupo.

b) Es posible multiplicar los elementos de V por escalares[15] o números reales, el resultado de la multiplicación es un elemento de V, y el producto por un escalar verifica las siguientes propiedades:

* Existencia de neutro: el neutro es el real 1 y se cumple que $1.v = v$, $\forall$ v XV

* Asociativa: $(\lambda.\rho).v = \lambda.(\rho.v)$ $\forall$ λ,ρ XR y $\forall$ v XV

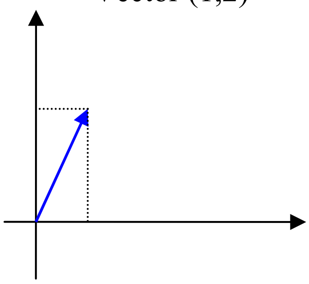
* Distributiva respecto de la suma de escalares: $(\lambda + \rho).v = \lambda.v + \rho.v$
$\forall$ λ,ρ XR y $\forall$ v XV

* Distributiva respecto de la suma de vectores: $\lambda.(u + v) = \lambda.u + \lambda.\ v$
$\forall$ λ XR y $\forall$ u,v XV

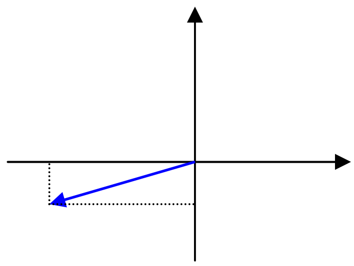
Entonces, {V, +, R, .} tiene estructura de *espacio vectorial*.

Un ejemplo fácil de visualizar gráficamente es el caso en que V es el conjunto de las “flechas” del plano con origen en el origen de coordenadas. Las “flechas” o vectores se pueden identificar por su “punta”, que no es otra cosa que un punto del plano o también un par ordenado de números reales.

Vector (1,2)



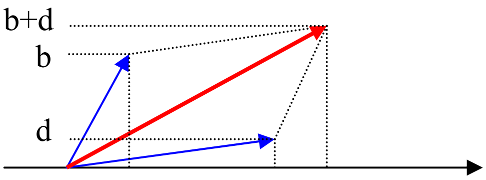
Vector (-3, -1)



La suma de estos vectores se obtiene sumando sus coordenadas.

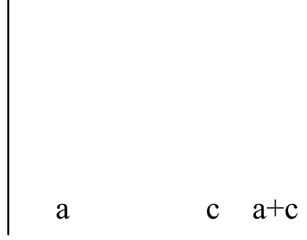
$$u = (a, b)$$
$$v = (c, d)$$
$$\overline{\phantom{u + v = (a+c, b+d)}}$$
$$u + v = (a+c, b+d)$$

y del punto de vista gráfico, la suma de dos vectores es otro vector que se obtiene como diagonal de un paralelogramo.




---

[15] Los escalares podrían ser también números complejos. Nosotros trabajaremos sólo con los reales.

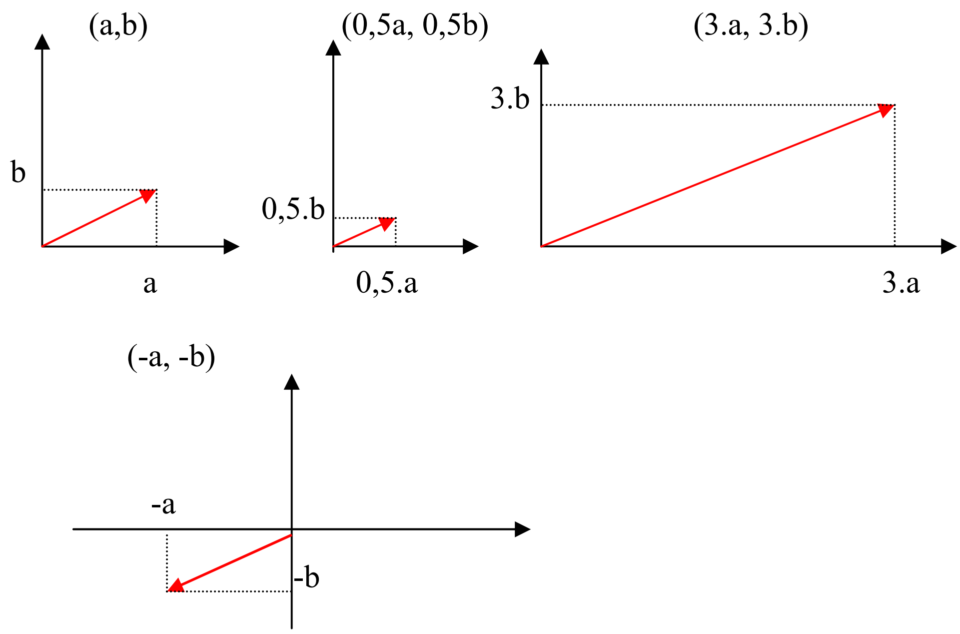



El producto de estos vectores por un número es otro vector que se obtiene multiplicando por ese número las coordenadas del primer vector.

$$\lambda.(a, b) = (\lambda.a, \lambda.b)$$

Gráficamente el producto de $\lambda$ por (a, b) consiste en "estirar" la flecha en la misma dirección si $\lambda > 1$, "achicar" la flecha si $0 < \lambda < 1$ y cambiar la dirección de la flecha si $\lambda < 0$. Si $\lambda = 0$ entonces la flecha se transforma en el vector nulo:

$$0.(a, b) = (0, 0) = \varnothing = \text{Vector nulo}$$




El lector puede verificar que, el conjunto de las flechas, utilizando como escalares los números reales y con las definiciones que hemos dado de suma y producto por un escalar, es un Espacio Vectorial, es decir, se verifican las 8 propiedades que definen dicha estructura. A modo de ejemplo, el neutro de la suma en este espacio vectorial es el vector (0, 0), pues si se suma a cualquier otro vector, se obtiene éste último.

Por definición, (0, 0) es el neutro si para todo vector (a, b) es: (a, b) + (0,0) = (a, b)
Demostración: (a, b) + (0,0) = (a + 0, b + 0) = (a, b). Efectivamente, (0, 0) es neutro de la suma.

El opuesto del vector (a, b) es el vector (-a, -b), pues se cumple que la suma de ambos es el neutro de la suma.

Otro ejemplo de Espacio Vectorial es $\{\mathcal{P}_2, +, \mathcal{R}, .\}$ donde $\mathcal{P}_2$ es el conjunto de los polinomios (en una sola indeterminada) de coeficientes reales con grado menor o igual que 2, y las operaciones de suma y producto corresponden a las definiciones ya introducidas de suma de polinomios y multiplicación de un polinomio por un número. El resultado de las operaciones es siempre un polinomio de hasta grado 2 (un vector de $\mathcal{P}_2$) y es fácil verificar que se cumplen las 8 propiedades. El neutro de la suma en este Espacio Vectorial es el polinomio nulo.

Consideremos ahora el conjunto de los polinomios de grado 2 (sólo los de grado 2) $\mathcal{P}_2^*$. ¿Por qué $\{\mathcal{P}_2^*, +, \mathcal{R}, .\}$ no es un Espacio Vectorial?

Otros ejemplos de espacios vectoriales:

$\{\mathcal{P}_3, +, \mathcal{R}, .\}$: Vectores = Polinomios de hasta grado 3
$\{\mathcal{P}_n, +, \mathcal{R}, .\}$: Vectores = Polinomios de hasta grado n
$\{\mathcal{P}, +, \mathcal{R}, .\}$: Vectores = Polinomios
$\{\mathcal{R}^2, +, \mathcal{R}, .\}$: Vectores = Pares ordenados
$\{\mathcal{R}^3, +, \mathcal{R}, .\}$: Vectores = Ternas ordenadas
$\{\mathcal{R}^n, +, \mathcal{R}, .\}$: Vectores = Énuplas ordenadas
$\{\mathcal{M}_{2.2}, +, \mathcal{R}, .\}$: Vectores = Matrices 2 por 2
$\{\mathcal{M}_{m.n}, +, \mathcal{R}, .\}$: Vectores = Matrices m por n

El Espacio Vectorial con vectores de $R^3$ tiene como interpretación geométrica el espacio de tres dimensiones, donde los vectores son flechas con origen en el centro de coordenadas. En $R^n$ los vectores también son flechas con origen en el centro de coordenadas, pero en un hiperespacio n-dimensional.

A partir de ahora supondremos que {V, +, R, .} es un Espacio Vectorial, y por abuso de lenguaje diremos que V es un Espacio Vectorial (donde las operaciones de suma y producto por un escalar son las definiciones usuales en los respectivos espacios).

Definición: Dados el conjunto $U = \{u_1, u_2, u_3, \dots, u_k\}$, $U \subseteq V$, y el vector $v \in V$, se dice que v es *combinación lineal* de U si existen los escalares $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_k \in R$ tales que el vector v se puede escribir así:

$$v = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i . u_i$$

*Observaciones*

1. Los $\lambda_i$ se llaman los *coeficientes* de la combinación lineal.
2. Cuando todos los $\lambda_i$ son iguales a 0, la combinación lineal se llama *trivial.*
3. Una combinación lineal de vectores es *no trivial* cuando uno por lo menos de los $\lambda_i$ es distinto de 0.

Ejemplo: Sea $V = R^2$ y $U = \{u_1 = (1, 2), u_2 = (2, 1)\}$. El vector $v_1 = (0, 3)$ es combinación lineal de U porque existen $\lambda_1$ y $\lambda_2 \in R$ tales que $\lambda_1.(1, 2) + \lambda_2.(2, 1) = (0, 3)$. Dichos $\lambda_1$ y $\lambda_2$ son: $\lambda_1 = 2$ y $\lambda_2 = 1$.

¿$v_2 = (5, -2)$ es combinación lineal de U? Para responder tenemos que averiguar si existen $\lambda_1$ y $\lambda_2 \in R$ tales que $\lambda_1.(1, 2) + \lambda_2.(2, 1) = (5, -2)$. Veamos si existen dichos escalares.

Partimos de la combinación lineal: $\lambda_1.(1, 2) + \lambda_2.(2, 1) = (5, -2)$
Por definición de producto por un escalar: $(\lambda_1, 2. \lambda_1) +(2. \lambda_2, \lambda_2) = (5, -2)$
Por definición de suma de vectores: $(\lambda_1 + 2. \lambda_2, 2. \lambda_1 + \lambda_2) = (5, -2)$

Para que ambos vectores sean iguales, deben ser iguales componente a componente. Es decir que las igualdades $\lambda_1 + 2. \lambda_2 = 5$ y $2. \lambda_1 + \lambda_2 = -2$ deben satisfacerse a la vez. Entonces, $v_2$ es combinación lineal de U si el siguiente sistema de ecuaciones lineales es compatible:

$$\begin{cases} \lambda_1 + 2.\lambda_2 = 5 \\ 2.\lambda_1 + \lambda_2 = -2 \end{cases}$$

Y para ello, según hemos visto, alcanza con que la matriz de coeficientes del sistema, $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ sea de rango 2, lo cual se cumple en este caso pues $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$. Entonces, $v_2$ es combinación lineal de U.

Ejemplo: Sea $V = R^3$ y $U = \{u_1 = (1, 1, 0), u_2 = (1, 1, 1)\}$. ¿Es $v = (1, 2, 3)$ combinación lineal de U? Veamos si existen $\lambda_1$ y $\lambda_2 \in R$ que satisfacen la definición.

$$\lambda_1.(1, 1, 0) + \lambda_2.(1, 1, 1) = (1, 2, 3)$$
$$(\lambda_1, \lambda_1, 0) + (\lambda_2, \lambda_2, \lambda_2) = (1, 2, 3)$$
$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 1 \\ \lambda_1 + \lambda_2 = 2 \\ \qquad \lambda_2 = 3 \end{cases}$$

El sistema es incompatible (las dos primeras ecuaciones no tienen raíces en común) y por tanto v no es combinación lineal de U.

*Observación*: el vector nulo (Ø) es combinación lineal de cualquier conjunto U no vacío. Si $U = \{u_1, u_2, u_3, \dots, u_k\}$, el vector nulo es C. L. de U si existen $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_k \in R$ tales que $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i.u_i =$ Ø. Los $\lambda_i$ existen, alcanza con tomar todos los $\lambda_i = 0$ (combinación lineal trivial). En el problema que nos planteamos a continuación, el asunto es otro: saber si además de la combinación lineal trivial, existe alguna combinación no trivial que origine el vector nulo.

Definición: Un conjunto de vectores U es *linealmente independiente* cuando la única forma de obtener el vector nulo como combinación lineal de U es mediante la combinación lineal trivial.

Ejemplo: Sea $U = \{u_1 = (1, 1, 0), u_2 = (1, 1, 1)\}$. ¿U es linealmente independiente (L. I.). Para averiguarlo nos planteamos la combinación lineal de los vectores de U, la igualamos al vector nulo y estudiamos si la única forma de la combinación es la combinación lineal trivial o si existe una combinación no trivial de U que permita expresar el vector nulo.

$$\lambda_1.(1, 1, 0) + \lambda_2.(1, 1, 1) = (0, 0, 0)$$
$$(\lambda_1, \lambda_1, 0) + (\lambda_2, \lambda_2, \lambda_2) = (0, 0, 0)$$
$$(\lambda_1 + \lambda_2, \lambda_1 + \lambda_2, \lambda_2) = (0, 0, 0)$$
$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \qquad \lambda_2 = 0 \end{cases}$$

El sistema es compatible determinado con única raíz $\lambda_1 = 0$) y $\lambda_2 = 0$. Entonces, la única forma de obtener el vector nulo como combinación lineal de U es mediante la combinación lineal trivial. Entonces, el conjunto U es L. I.

Ejemplo: Sea T = {$t_1 = (1, 1, 0)$, $t_2 = (1, 1, 1)$, $t_3 = (-1, -1, 2)$}. ¿Es T un conjunto de vectores L. I.?

$$\lambda_1.(1, 1, 0) + \lambda_2.(1, 1, 1) + \lambda_3.(-1, -1, 2) = (0, 0, 0)$$
$$(\lambda_1, \lambda_1, 0) +(\lambda_2, \lambda_2, \lambda_2) +(-\lambda_3, -\lambda_3, 2.\lambda_3) = (0, 0, 0)$$
$$(\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3, (\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3, \lambda_2 + 2.\lambda_3) = (0, 0, 0)$$
$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ \qquad \lambda_2 + 2.\lambda_3 = 0 \end{cases}$$

La segunda y tercera ecuaciones son iguales, por lo que una de ellas puede eliminarse obteniendo un sistema equivalente con dos ecuaciones y tres incógnitas.

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ \qquad \lambda_2 + 2.\lambda_3 = 0 \end{cases}$$

El sistema es compatible indeterminado. Existen $\lambda_1$, $\lambda_2$ y $\lambda_3$ no todos nulos tales que $\lambda_1.t_1 + \lambda_2.t_2 + \lambda_3.t_3 = (0, 0, 0)$. Por ejemplo, $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = -2$ y $\lambda_3 = 1$. Entonces, el conjunto T no es L. I. Se dice que el conjunto T es *linealmente dependiente*.

Definición: Un conjunto U de vectores es *linealmente dependiente* (L.D.) cuando no es L. I.

*Observaciones*

1. Si el conjunto U está formado sólo por el vector nulo, U = { Ø }, entonces U es L. D.
2. Si un conjunto U tiene como elemento el vector nulo, U = {Ø, $u_2$, $u_3$, … }, entonces el conjunto U es L. D.

Teorema[1]: H) U tiene dos o más vectores
U es L. D.
T) Uno por lo menos de los vectores de U es combinación lineal de los restantes vectores de U.

Teorema[2]: Si a un conjunto L. D. se le agrega un vector cualquiera, entonces el nuevo conjunto también es L. D.

Teorema[3]: Si a un conjunto L. I. con dos o más vectores se le quita un vector cualquiera, entonces el nuevo conjunto también es L. I.

*Observación:* Si a un conjunto L. D. se le quita un vector, entonces no puede afirmarse nada de la dependencia lineal del nuevo conjunto. Otro tanto ocurre con un conjunto L. I. al cual se le agrega un vector.

<u>Definición</u>: El conjunto G de vectores es un *generador de V* si todo vector de V puede escribirse como combinación lineal de G.

Ejemplo: Un vector cualquiera de $R^3$ es de la forma (a, b, c) donde las letras son parámetros independientes. Sea G = {$u_1$ = (1, 0, 0), $u_2$ = (0, 1, 0), $u_3$ = (0, 0, 1)}. ¿Es G un generador de $R^3$?

$$(a, b, c) = a.(1, 0, 0) + b.(0, 1, 0) + c.(0, 0, 1) \ \forall\ a, b, c \ \mathrm{X}\ R$$

Entonces todo vector de $R^3$ puede escribirse como combinación lineal de G, y por tanto G es un generador de $R^3$.

*Observación*: Si a un generador se le agregan vectores, sigue siendo generador. Pero si a un generador se le quitan vectores, entonces no puede afirmarse nada acerca de si el nuevo conjunto sigue siendo generador.

<u>Definición</u>: El conjunto de vectores B es *base* del Espacio Vectorial V si se cumple a la vez que B es generador de V, y B es un conjunto L. I.

Ejemplo: El conjunto G = {$u_1$ = (1, 0, 0), $u_2$ = (0, 1, 0), $u_3$ = (0, 0, 1)} es generador de $R^3$ y como además es L. I. (el lector habrá de probarlo), entonces G es base de $R^3$.

<u>Teorema</u>[4]: H) Existe una base en V con un número finito de vectores.
T) Todas las bases de V tienen el mismo número de vectores.

<u>Definición</u>: Se llama *dimensión del Espacio Vectorial* al número de vectores de una base cualquiera del espacio.

*Notación*: Dim(V). Por ejemplo, Dim($R^3$) = 3.

*Observación*: La dimensión del espacio puede ser finita, pero también existen espacios de dimensión infinita. Nosotros estaremos interesados en los espacios de dimensión finita.

<u>Teorema</u>[5]: H) Dim(V) = n
T) Todo conjunto de V con más de n vectores es L. D.

Ejemplo: Consideremos el Espacio Vectorial $R^3$. Ya sabemos que Dim($R^3$) = 3. En consecuencia, todos los conjuntos de $R^3$ con más de 3 vectores son L. D. Sabemos que en $R^3$ las bases tienen 3 vectores. Entonces, ¿puede haber conjuntos L. I. con dos o menos vectores? La respuesta es afirmativa. Dichos conjuntos L. I. con 2 o menos vectores, ¿pueden ser generadores de $R^3$? La respuesta es NO, pues si hubiera generadores L. I. con dos vectores, entonces serían bases del E. Vectorial, y la dimensión no sería 3.

Es fácil demostrar que en el Espacio Vectorial de los polinomios $\mathcal{P}_2$, la dimensión es 3, que en el Espacio Vectorial $\mathcal{P}_n$ la dimensión del espacio es (n + 1) y que en el Espacio $R^n$ la dimensión es n.

El último concepto que introducimos en esta sección es el de *subespacio*.

Definición: Sea el conjunto de vectores V' incluido en el Espacio Vectorial V, $V' \subseteq V$, tal que {V', +, R, .} es también un Espacio Vectorial. Entonces V' es un *subespacio vectorial* de V.

Ejemplo: Sea $V = R^2$ y sea V' = {(a, b): a = b}, es decir, V' es el conjunto de vectores de $R^2$ que tienen iguales sus coordenadas. Probaremos que V' es un subespacio vectorial de $R^2$. Como los vectores de V' son también vectores de V, y las operaciones de suma y multiplicación por un escalar son las mismas, todas las propiedades del espacio vectorial V se cumplen en V' a condición que las operaciones sean *cerradas*, esto es, que la suma de vectores de V' sea un vector de V' y que la multiplicación de un vector de V' por un escalar cualquiera también sea un vector de V'.

Dos vectores cualesquiera de V' tienen la forma: $(\alpha, \alpha)$ y $(\beta, \beta)$. La suma de estos dos vectores es $(\alpha + \beta, \alpha + \beta)$ que también es un vector de V' (pues tiene iguales sus coordenadas). El producto de un vector por un escalar tiene la forma: $\lambda.(\alpha, \alpha) = (\lambda.\alpha, \lambda.\alpha)$ que también tiene sus coordenadas iguales. Entonces, V' es un subespacio vectorial de $R^2$.

Teorema[6]: H) V' es un subespacio vectorial de V
T) $Dim(V') \leq Dim(V)$

Ejemplo: Demostrar que en el ejemplo precedente es Dim(V') = 1.

Teorema[7]: H) U es un conjunto de vectores finito en el espacio vectorial V
W = {w: w es combinación lineal de U}
T) {W, +, R, .} es un subespacio vectorial de V

El conjunto W es el conjunto de todas las combinaciones posibles del conjunto U. Lo que afirma el teorema es que este conjunto es un subespacio vectorial de V. ¿Qué pasa si el conjunto U es una base de V? Lo que ocurre es que el conjunto W coincide con V, pues el conjunto U por ser base es también generador, entonces los vectores de W son todos los que pueden escribirse como combinación lineal de un generador, o sea, todo el Espacio Vectorial V. El subespacio vectorial W se conoce como el *subespacio vectorial generado por U.*

Ejemplo: Sean $V = R^3$ y $U = \{u_1 = (1, 1, 0), u_2 = (1, -1, 0)\}$. El subespacio vectorial generado por U es W = {w: w = a.(1, 1, 0) + b.(1, -1, 0)}. W es un conjunto de vectores de la forma (a + b, a – b, 0) donde a y b son parámetros independientes. Es fácil probar que Dim(W) = 2 pues el conjunto U es generador de W y además es L. I.

# Repartido Práctico 8: Espacios Vectoriales

**Ejercicio 1**

Verificar que el conjunto de las matrices 2x2 con las operaciones de suma de matrices y producto por un escalar (real) es un Espacio Vectorial.

**Ejercicio 2**

Sea el conjunto $U = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ y sea un vector $v$ tal que: $4.u_3 + 2.v = u_1 + 2.u_2 - 6.u_4$.

Hallar los coeficientes $\lambda_i$ que permiten expresar al vector v como combinación lineal de U.

**Ejercicio 3**

Sea $U = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

a) Hallar 5 vectores que sean combinaciones lineales de U.

b) ¿El vector $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ es combinación lineal de U?

c) ¿El vector nulo es combinación lineal de U?

d) ¿Existe algún vector de $R^3$, $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ que no sea combinación lineal de U?

**Ejercicio 4**

Sea $U = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$. ¿Es posible escribir el vector nulo como combinación lineal no trivial de U?

**Ejercicio 5**

Sea $U = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

a) Probar que U es LI.

b) ¿Qué ocurre con la dependencia lineal del conjunto U si se le quita uno cualquiera de los tres vectores?

**Ejercicio 6**

Probar que $U = \{O\}$ es LD.

## Repartido Práctico 8: Espacios Vectoriales

**Ejercicio 7**

Sea $U = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$. Se sabe que $u_2 = 4.u_1 - 3.u_3 + 5.u_4$. ¿Qué puede decirse de la dependencia lineal del conjunto U?

**Ejercicio 8**

Sea el conjunto $U = \{(1,1,0) \quad (-1,2,0) \quad (2,-1,0)\}$.

a) Escribir el tercer vector de U como combinación lineal de los dos restantes.
b) El conjunto U ¿es LI?
c) Considere el conjunto de vectores $W = \{(a,b,c) \quad \textit{tales que} \quad c = 0\}$. Los vectores de W ¿pueden escribirse como combinación lineal de los vectores de U?
d) ¿W es un espacio vectorial?
e) ¿U es un generador de W?
f) ¿U es una base de W?
g) ¿Cómo puede obtenerse una base de W a partir del conjunto U?

***Ejercicio 9***

Sea $U = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.

a) Probar que el primer vector de U puede escribirse como combinación lineal de los tres restantes.
b) Estudiar la dependencia lineal del conjunto formado por U excluyendo el primer vector.
c) Probar que dicho conjunto es un generador de $R^3$.
d) ¿Qué dimensión tiene el espacio vectorial $R^3$?
e) El conjunto definido en b) ¿es una base de $R^3$?

**Ejercicio 10**

Considere los espacios vectoriales $V_1$ = Polinomios de hasta grado 2, y $V_2$ = Matrices dos por dos.

a) Hallar un generador de $V_1$.
b) Hallar un generador de $V_2$.
c) Hallar una base y la dimensión de $V_1$.
d) Hallar una base y la dimensión de $V_2$.

**Ejercicio 11**

a) Probar que $V' = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} : a + b + c = 0 \right\}$ es un SEV de $R^3$.
b) Hallar una base de V' y calcular la Dim(V').
c) ¿Cuántos vectores, por lo menos, tiene que tener un generador de V'?
d) ¿Cuántos vectores tienen todas las bases de V'?

## Repartido Práctico 8: Espacios Vectoriales

**Ejercicio 12**

Sea $V = R^2$ y sea W el subespacio generado por $U = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$.

a) Hallar una base de W.

b) Hallar Dim(W).

**Ejercicio 13**

Considere el espacio de las matrices 2x2: M = $\left\{\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\right\}$ y el subconjunto P tal que P = $\left\{\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \mathit{con}\ b + c = 0\right\}$.

a) Probar que P un subespacio de M.

b) Sea el conjunto A = $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\right\}$. Estudiar si el A conjunto es un generador de P.

c) Hallar una base de P y calcular Dim (P).

## 9. VALORES Y VECTORES PROPIOS. DIAGONALIZACIÓN.

### Polinomio característico

Consideremos una matriz *n*-cuadrada:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

La matriz ($A$ - $\lambda.I_n$), donde $I_n$ es la matriz identidad $n$-cuadrada y $\lambda$ un escalar indeterminado, se denomina *matriz característica* de $A$ *a la matriz*:

$$(A - \lambda \cdot I_n) = \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{pmatrix}$$

Su determinante, det ($A$ - $\lambda \cdot I_n$) , que es un polinomio en $\lambda$, recibe el nombre de *polinomio característico* de $A$.

La expresión det ($A$ - $\lambda \cdot I_n$) = 0 se llama *ecuación característica de A.*

Ejemplo: Hallar la matriz característica y el polinomio característico de la matriz $A$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

La matriz característica es ($A$ - $\lambda.I_n$). Luego:

$$(A - \lambda \cdot I_n) = \begin{pmatrix} 1 - \lambda & -2 \\ 2 & 0 - \lambda \end{pmatrix}$$

y el polinomio característico:

$$\det (A - \lambda \, In) \begin{vmatrix} 1 - \lambda & -2 \\ 2 & 0 - \lambda \end{vmatrix} = (1 - \lambda)(0 - \lambda) + 4 = \lambda^2 - \lambda + 4.$$

Así pues, el polinomio característico es $\lambda^2 - \lambda + 4$.

## Valores propios y vectores propios

Sea $A$ una matriz $n$-cuadrada y sea X un vector columna de n componentes tal que:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix} \neq O$$

Defínción: Se llaman *valores propios (ó característicos)* de la matriz A todos los escalares $\lambda$ que verifican la ecuación $\mathbf{A}x\mathbf{X} = \lambda.\mathbf{X}$, o la ecuación equivalente: $\mathbf{(A - \lambda.I)}x\mathbf{X} = \varnothing$.

Ejemplo: Hallar los valores propios de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Como la matriz es 3x3, el vector X tiene tres componentes. Para hallar los valores propios se plantea la ecuación característica.

$$AxX = \lambda xX \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} x \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \lambda x \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 3 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Como el vector X no puede ser el vector nulo, y el sistema lineal es homogéneo, es necesario que el sistema tenga otras raíces. Para ello, el sistema debe ser indeterminado. Entonces, alguna punta de escalón debe ser diferente de cero. Los valores propios son, entonces, $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = 2$. De otra forma, el polinomio característico es $(1 - \lambda)^2.(2 - \lambda)$ y la ecuación característica tiene las raíces 1 y 2.

Los $\lambda$ que resuelven la ecuación característica pueden ser números reales o complejos

Defínción: Sea $\lambda_0$ un valor propio real de A. Se llama *vector propio* de la matriz A asociado a $\lambda_0$ a cualquier vector $X \neq 0$ tal que $\mathbf{A}x\mathbf{X} = \lambda_0.\mathbf{X}$.

Los términos *valor característico* y *vector característico* (o *autovalor* y *autovector*) se utilizan con frecuencia en lugar de valor propio y vector propio.

Ejemplo:

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, y sean $v_1 = (2,3)$ y $v_2 = (1,-1)$. Entonces

$$Av_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 12 \end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 4v_1.$$

y

$$Av_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = -1v_2$$

Así pues, $v_1$ y $v_2$ son vectores propios de $A$ asociados, respectivamente, a los valores propios $\lambda_1 = 4$ y $\lambda_2 = -1$ de $A$. En este ejemplo hemos visto que los vectores $v_1$ y $v_2$ verifican la definición de vector propio, pero no hemos resuelto el problema de encontrar los vectores propios asociados a una matriz.

Los valores y vectores propios cumplen las siguientes propiedades:

1. *$\lambda$ es un valor propio de A si y solo si $|A - \lambda.I| = 0$.*

2. *Si X es un vector propio de A, entonces el vector k.X (k es un escalar no nulo) también es un vector propio de A.*

3. *Si A es una matriz simétrica, entonces todos los valores propios de A son reales.*

4. *Si A es simétrica, entonces los vectores propios correspondientes a diferentes valores propios tienen su producto escalar nulo.*

*5. Sea A una matriz cuadrada y Q otra matriz cuadrada invertible. La matriz $B = Q^{-1}.A.Q$ tiene los mismos valores propios de la matriz A.*

*Demostración: El polinomio característico de la matriz B es $|B - \lambda.I| = |Q^{-1}.A.Q-\lambda.I|$. Pero la matriz identidad I es igual al producto $Q^{-1}.I.Q$ y por tanto: $|B - \lambda.I| = |Q^{-1}.A.Q-\lambda.Q^{-1}.I.Q| = |Q^{-1}.(A-\lambda.I).Q| = |Q^{-1}|.|A-\lambda.I|.|Q| = |A-\lambda.I|$.*

Ejemplo: Nos planteamos ahora el problema de encontrar los vectores propios de la matriz A = $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Ya vimos que los valores propios son $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = 2$.

- Cuando es $\lambda_1 = 1$, los vectores propios asociados se obtienen de la ecuación $A$x$X = \lambda_1.X$. Entonces:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 1. \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

que conduce al sistema:

$$\begin{cases} 2.x_2 + x_3 = 0 \\ 3.x_3 = 0 \\ 2.x_3 = 0 \end{cases}$$

cuyas raíces son de la forma $\begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

- Cuando es $\lambda_2 = 2$, los vectores propios asociados se obtienen de la ecuación **$A$x$X = \lambda_2.X$**. Entonces:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 2. \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

que conduce al sistema:

$$\begin{cases} -x_1 + 2.x_2 + x_3 = 0 \\ -x_2 + 3.x_3 = 0 \\ 0.x_3 = 0 \end{cases}$$

cuyas raíces son de la forma $\begin{pmatrix} 7.x_3 \\ 3.x_3 \\ x_3 \end{pmatrix}$.

Como puede observarse en el ejemplo, en virtud de la propiedad 2 antes enunciada, para cada valor propio existen infinitos vectores propios, los cuales difieren entre sí solamente por una constante multiplicativa. En el ejemplo, para $\lambda_1 = 1$ un vector propio asociado es $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ y se puede obtener otro cualquiera (asociado al mismo valor propio) multiplicando dicho vector por un número real cualquiera. Lo mismo ocurre en el caso de $\lambda_2 = 2$: cualquier vector propio asociado a dicho valor propio tiene la forma:
$\begin{pmatrix} 7.x_3 \\ 3.x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_3. \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

<u>Teorema</u>[1]: H) A es una matriz simétrica n.n con n valores propios distintos
Q es una matriz que tiene en las columnas vectores propios correspondientes a distintos valores propios de la matriz A
T) Q es una matriz ortogonal (es decir, $Q^T = Q^{-1}$).

<u>Teorema</u>[2]: H) A es simétrica
$\lambda_i$ son valores propios de A
$v_i$ es un vector propio de A asociado al valor propio $\lambda_i$

$$Q = \left( \begin{pmatrix} \\ v_1 \\ \\ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \\ v_2 \\ \\ \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} \\ v_n \\ \\ \end{pmatrix} \right)$$

T) $Q^{-1}.A.Q$ es una matriz diagonal

Ejemplo: Sea la matriz simétrica $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. El lector demostrará que la matriz tiene tres valores propios diferentes, 1, 2 y 3, y vectores propios asociados a dichos valores $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} y \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$ respectivamente.

Entonces de acuerdo al teorema anterior, la matriz Q = $\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&0&-1\end{pmatrix}$ *diagonaliza* a la matriz A, pues $Q^{-1}.A.Q$ es una matriz diagonal. Para comprobarlo alcanza con hallar la inversa de Q y realizar el producto $Q^{-1}.A.Q$. Al realizar las operaciones se encuentra que:

$$Q^{-1}.A.Q = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}$$

¿Es una casualidad que la matriz $Q^{-1}.A.Q$ tenga en su diagonal los valores propios de A?

<u>Definición</u>: Se dice que un vector u está *normalizado*[16] si se cumple que el producto escalar del vector por sí mismo es igual a la unidad.

u está normalizado si: u (x) u = 1

*Observaciones*

1. El vector nulo es el único que no se puede normalizar.
2. Para normalizar un vector diferente del vector nulo alcanza con transformarlo así: $\dfrac{u}{\sqrt{u(x)u}}$.

Ejemplo: Sea u = $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \Rightarrow u(x)u = 1x1+2x2+3x3 = 14 \Rightarrow \begin{pmatrix}1/\sqrt{14}\\2/\sqrt{14}\\3/\sqrt{14}\end{pmatrix}$ es un vector normalizado.

<u>Teorema</u>[3]: H) A es una matriz simétrica n.n

$\lambda_i$ son valores propios de A

$v_i$ son vectores propios de A normalizados

$$Q = \left(\begin{pmatrix} \\ v_1 \\ \\ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \\ v_2 \\ \\ \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} \\ v_n \\ \\ \end{pmatrix}\right)$$

T) $Q^{-1}.A.Q$ contiene en su diagonal principal a los $\lambda_i$.

Entonces, el resultado que obtuvimos en el ejemplo de la página anterior no era una casualidad.

[16] No en todos los espacios vectoriales es posible definir la norma de un vector. Los que tienen esta propiedad se denominan espacios normados. R, $R^2$, $R^3$ y en general $R^n$ son espacios normados.

Definición: Dos matrices $A_{n.n}$ y $B_{n.n}$ se dicen *semejantes* si existe una tercera matriz Q tal que: $B = Q^{-1}.A.Q$.

*Observación*: Si A es una matriz simétrica, ¿cómo se puede obtener una matriz B semejante a A y diagonal? De acuerdo con el último teorema, alcanza con encontrar los valores propios de A. Una matriz B diagonal que tenga en la diagonal principal los valores propios de A es semejante a A.

Ejemplo: la matriz simétrica $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, según ya hemos visto, tiene los valores propios 1, 2 y 3. En consecuencia, la matriz diagonal B $= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ es semejante a A.

## Formas cuadráticas

Definición: Sea $A_{n.n}$ una matriz simétrica y sea $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}$ un vector de n indeterminadas. La expresión $X^T.A.X$ es una *forma cuadrática en las indeterminadas* $x_1, x_2, \dots, x_n$. A se llama *la matriz* de la forma cuadrática.

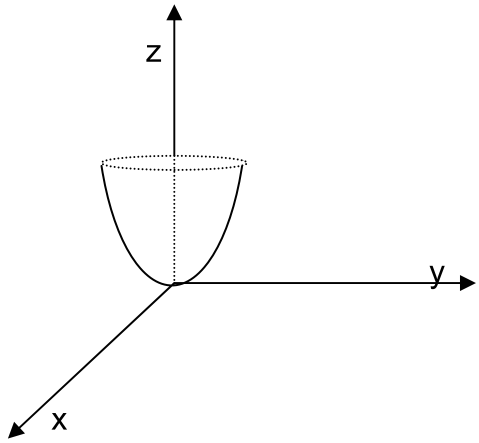
Ejemplo: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ $y$ $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Entonces, $X^T.A.X = x^2 + 2.x.y + 2.y^2$.

*Observaciones*

1. La forma cuadrática es un polinomio homogéneo de grado 2 en las indeterminadas $x_1, x_2, \dots, x_n$.
2. A partir de la forma cuadrática puede definirse una función de varias variables, cuya representación gráfica no es fácil de visualizar.

Ejemplo 1: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $y$ $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Entonces, $X^T.A.X = x^2 + y^2$.
Sea $z = f(x, y) = x^2 + y^2$. ¿Cómo es el gráfico de esta función? Sean x, y, z las coordenadas en el espacio de tres dimensiones. Cuando nos posicionamos en el plano xy es z = 0. Pero si z = 0, entonces $x^2 + y^2 = 0$ y esta ecuación se satisface sólo si x = y = 0. Entonces la función f(x, y) corta al plano xy sólo en el centro de coordenadas. En el semiespacio donde z < 0 no hay gráfico, pues no existen valores (x, y) para los cuales $x^2 + y^2 < 0$. Si z > 0, entonces la ecuación $x^2 + y^2 = z$ representa para cada z una circunferencia de radio $\sqrt{z}$ que va aumentando de diámetro a medida que aumenta el valor de z. La intersección del gráfico con el plano xz (y = 0) tiene la forma $z = x^2$, que es una

parábola, y otro tanto ocurre al intersectar el gráfico con el plano yz, resultando una parábola de la forma z = $y^2$. El gráfico se denomina *paraboloide.*




Ejemplo 2: A = $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ $y \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Entonces, $X^T.A.X$ = f(x, y) = $x^2 - y^2$. ¿En qué puntos gráfico de la función corta al plano xy? z = 0 = $x^2 - y^2$ = (x – y).(x + y). Esta condición equivale a las condiciones (x = y) ó (x = -y). Entonces el gráfico corta al plano xy en dos rectas, que son las bisectrices de los cuadrantes del plano. Es difícil visualizar qué ocurre con el gráfico cuando z < 0 o cuando z > 0.

Ejemplo 3: Sea la forma cuadrática $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$. El gráfico es un paraboloide en un espacio de n+1 dimensiones. ¿Alguien lo puede imaginar?

*Observaciones*

1. Cuando $X_{n.1}$ y $A_{n.n}$, la forma cuadrática $X^T.A.X$ tiene dimensiones 1.1 y su expresión general es:

$$X^T.A.X = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.x_i^2 + 2.\sum_{i<j} a_{ij}.x_i.x_j$$

2. Cuando la forma cuadrática admite la expresión $X^T.A.X = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.x_i^2$ (intervienen sólo los cuadrados de las indeterminadas) la forma cuadrática se llama *canónica.*
3. ¿Existe algún procedimiento para pasar de la forma general a una forma cuadrática canónica de tal forma que la nueva matriz de la forma tenga los mismos valores propios de la matriz original? La respuesta es afirmativa, y el procedimiento para lograrlo es una *transformación lineal*.

Ejemplo: Sea la forma cuadrática f(x, y) = $\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2.x^2 + 2.x.y + 2.y^2$

Si se hace la transformación lineal $\begin{cases} x' = \dfrac{1}{\sqrt{2}}.(x+y) \\ y' = \dfrac{1}{\sqrt{2}}.(-x+y) \end{cases}$ se obtiene la nueva forma $f(x', y') = 3.x'^2 + y'^2$, que tiene la forma canónica.

*Observaciones*

1. En el ejemplo precedente se observa que la matriz A = $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ y la matriz de la nueva forma $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ tienen los mismos valores propios.
2. En una forma cuadrática canónica, la matriz de la forma es una matriz diagonal.
3. *Diagonalizar una forma cuadrática* consiste en obtener una nueva forma cuya matriz sea a la vez diagonal y semejante a la matriz de la forma original.

Teorema[1]: H) Sea $X^T.A.X$ una forma cuadrática
Sea $X = Q.Y$ transformación del vector X donde Q es la matriz de vectores propios de A normalizados

T) $(Q.Y)^T.A.(Q.Y)$ es una forma cuadrática canónica en el vector Y
$(Q.Y)^T.A.(Q.Y) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i . y_i^2$ donde los $\lambda_i$ son los valores propios de la matriz A.

La demostración del Teorema se basa en las propiedades ya vistas sobre valores y vectores propios. $(Q.Y)^T.A.(Q.Y) = Y^T.(Q^T.A.Q).Y$ y ya sabemos que la matriz $Q^T.A.Q$ es diagonal, semejante a A y tiene en la diagonal principal a los valores propios de la matriz A.

En consecuencia, la transformación lineal $X = Q.Y$, o lo que es lo mismo, $Y = Q^{-1}.X$, permite pasar de una forma cuadrática general a una forma canónica, de manera que las matrices de ambas formas (A y $Q^T.A.Q$) sean semejantes.

Definición:

(A) Una forma cuadrática $f(x_1, x_2,...,x_n)$ se llama DEFINIDA POSITIVA si para todo vector $X = (x_1, x_2,...,x_n) \neq \varnothing$ es $f(x_1, x_2,...,x_n) > 0$.

(B) Una forma cuadrática $f(x_1, x_2,...,x_n)$ se llama SEMIDEFINIDA POSITIVA si para todo vector $X = (x_1, x_2,...,x_n) \neq \varnothing$ es $f(x_1, x_2,...,x_n) \geq 0$.

(C) Una forma cuadrática $f(x_1, x_2,...,x_n)$ se llama DEFINIDA NEGATIVA si para todo vector $X = (x_1, x_2,...,x_n) \neq \varnothing$ es $f(x_1, x_2,...,x_n) < 0$.

(D) Una forma cuadrática $f(x_1, x_2,...,x_n)$ se llama SEMIDEFINIDA NEGATIVA si para todo vector $X = (x_1, x_2,...,x_n) \neq \varnothing$ es $f(x_1, x_2,...,x_n) \leq 0$.

(E) Una forma cuadrática se llama INDEFINIDA si no es de ninguna de las formas anteriores.

Teorema[2]: H) Sea una forma cuadrática $X^T.A.X$

$T_1$) La forma cuadrática es *definida positiva* si mediante una trasformación apropiada se puede llevar a la forma canónica $\sum_{i=1}^{n} b_i.y_i^2$ con todos los $b_i > 0$.

$T_2$) La forma cuadrática es *semidefinida positiva* si mediante una trasformación apropiada se puede llevar a la forma canónica $\sum_{i=1}^{n} b_i.y_i^2$ con todos los $b_i \geq 0$.

$T_3$) La forma cuadrática es *definida negativa* si mediante una trasformación apropiada se puede llevar a la forma canónica $\sum_{i=1}^{n} b_i.y_i^2$ con todos los $b_i < 0$.

$T_4$) La forma cuadrática es *semidefinida negativa* si mediante una trasformación apropiada se puede llevar a la forma canónica $\sum_{i=1}^{n} b_i.y_i^2$ con todos los $b_i \leq 0$.

$T_5$) La forma cuadrática es *indefinida* si mediante una trasformación apropiada se puede llevar a la forma canónica $\sum_{i=1}^{n} b_i.y_i^2$ con algún $b_i > 0$ y algún $b_i < 0$.

## ***Proyección de población (aplicación de cadenas de Harkov)***

Supongamos que la población de un país se puede clasificar en tres categorías según la localidad donde residen:

- mega ciudades
- localidades urbanas medianas y pequeñas
- área rural.

En el país se realizan censos de población cada 5 años. En los censos, entre otras variables, se pregunta a las personas por el lugar donde residían 5 años antes. Al analizar varios censos consecutivos se observa un comportamiento estable con las siguientes características:

i) Los movimientos de migración internacional no tienen significación en la distribución poblacional por categoría de la localidad.

ii) Si una persona residía hace 5 años en una mega ciudad, tiene actualmente las siguientes probabilidades:
* 70% de seguir residiendo en una mega ciudad
* 20% de pasar a residir en otra localidad urbana
* 10% de pasar a residir en el área rural.

iii) Si una persona residía hace 5 años en una localidad urbana mediana o pequeña, entonces actualmente tiene:
* 20% de probabilidad de pasar a residir en una mega ciudad
* 60% de permanecer en una localidad urbana mediana o pequeña
* 20% de pasar a residir en el área rural.

iv) Si una persona residía hace 5 años en el área rural, entonces actualmente tiene:
* 10% de probabilidad de pasar a residir en una mega ciudad
* 20% de pasar a residir en otra localidad urbana
* 70% de permanecer en el área rural.

Con estas probabilidades es posible construir una *matriz de transición* (T).

| | | RESIDENCIA ACTUAL | | |
|---|---|---|---|---|
| | | Mega ciudad | Otra urbana | Área rural |
| RESIDENCIA HACE 5 AÑOS | Mega ciudad | 0,7 | 0,2 | 0,1 |
| | Otra urbana | 0,2 | 0,6 | 0,2 |
| | Área rural | 0,1 | 0,2 | 0,7 |

Actualmente, la población se distribuye por categoría de localidad de acuerdo con el siguiente vector ($X_0$):

| Mega ciudad | Otra urbana | Área rural |
|---|---|---|
| 0,40 | 0,45 | 0,15 |

Si se espera que la matriz de transición permanezca estable y que el crecimiento natural de la población sea similar en las tres categorías de localidades, ¿cuál será la distribución de la población dentro de 100 años?

Se demuestra que el vector que estamos buscando, $X_{20} = (x_1, x_2, x_3)$ tiene la propiedad siguiente:

$$X_{20} = X_0 * T^{20}$$

El problema a resolver, bastante pesado, es el cálculo de $T^{20}$. Una forma de resolverlo es hacer $[(T^5)^2]^2$ lo que no deja de ser complicado en virtud que los elementos de T son números decimales. Otra forma de resolverlo consiste en diagonalizar la matriz T.

Sea Q la matriz que diagonaliza T. Entonces: $B = Q^T * T * Q$, es una matriz diagonal que tiene en la diagonal principal los valores propios de T si Q tiene en cada columna un vector propio de T normalizado y asociado a cada valor propio. Como se sabe, Q es una matriz ortogonal, esto es: $Q^T = Q^{-1}$. Entonces:

$$B^{20} = (Q^T*T*Q)^{20} = (Q^{-1}*T*Q)^{20} = (Q^{-1}*T*Q)*(Q^{-1}*T*Q)*(Q^{-1}*T*Q)*\ldots..*(Q^{-1}*T*Q)$$

y aplicando la propiedad asociativo del producto de matrices resulta:

$$B^{20} = (Q^{-1}*T)*(Q*Q^{-1})*T*(Q*Q^{-1})*T*\ldots..(Q*Q^{-1})*(T*Q)$$

y como $Q*Q^{-1} = I$, se deduce $B^{20} = Q^{-1}*T^{20}*Q$ y, por tanto: $T^{20} = Q*B^{20}*Q^{-1}$.

Es fácil demostrar que si $B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}; \textit{entonces}\ B^{20} = \begin{pmatrix} \lambda_1^{20} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^{20} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^{20} \end{pmatrix}$.

Resulta entonces que, para hallar $T^{20}$, alcanza con encontrar los valores propios de T, $\lambda_1$, $\lambda_2$, $\lambda_3$, (y ello resuelve el problema $B^{20}$) y los vectores propios normalizados asociados (y ello permite encontrar la matriz Q) y finalmente multiplicar $Q*B^{20}*Q^T$.

En nuestro ejemplo es $T = \begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}2 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}6 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}7 \end{pmatrix}$ que es una matriz simétrica. Por tanto, todos sus valores propios son números reales. La ecuación característica es $(\lambda - 0{,}6)*(\lambda^2 - 1{,}4*\lambda + 0{,}4)$ que tiene por raíces: 1; 0,6 y 0,4. Para cada uno de ellos se calcula un vector propio normalizado y resultan:

- Para $\lambda = 1$, el vector propio $\frac{1}{\sqrt{3}} * \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

- Para $\lambda = 0{,}6$, el vector propio $\frac{1}{\sqrt{2}} * \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

- Para $\lambda = 0{,}4$, el vector propio $\frac{1}{\sqrt{6}} * \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Entonces, $T^{20}$ =

$$\begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & -2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}6^{20} & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}4^{20} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & -2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \end{pmatrix}^T =$$

$$= \begin{pmatrix} 0{,}333352 & 0{,}333333 & 0{,}333315 \\ 0{,}333333 & 0{,}333333 & 0{,}333333 \\ 0{,}333315 & 0{,}333333 & 0{,}333352 \end{pmatrix}$$

Finalmente, el vector de la distribución de la población 100 años después resulta igual a:

$$(0{,}40 \quad 0{,}45 \quad 0{,}15) * \begin{pmatrix} 0{,}333352 & 0{,}333333 & 0{,}333315 \\ 0{,}333333 & 0{,}333333 & 0{,}333333 \\ 0{,}333315 & 0{,}333333 & 0{,}333352 \end{pmatrix} = (0{,}333338,\ 0{,}333333,\ 0{,}333329)$$

Este resultado sugiere que la población en el largo plazo tiende a repartirse en partes iguales en las tres categorías de localidades, si se mantienen los supuestos y en particular la estabilidad de la matriz de transición. Se demuestra que el vector X de la distribución en el largo plazo (cuando el número de censos se hace tan grande como se quiera) se obtiene resolviendo la ecuación: X*T = X. Esta ecuación vectorial conduce al siguiente sistema lineal de ecuaciones:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} & & & 0 \\ & T^T - I & & 0 \\ & & & 0 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Como en nuestro caso T es simétrica, $T^T - I = T - I$. La resolución del sistema conduce a la raíz: (1/3, 1/3, 1/3), tal como podía intuirse. Obsérvese que este resultado es independiente de la situación de partida ($X_0$), sólo depende de la forma de la matriz de transición.

# Repartido Práctico 9: Valores y vectores propios. Diagonalización. Formas cuadráticas.

**Ejercicio 1**

Se recuerda que una matriz A es ortogonal si $A^T = A^{-1}$. Se pide:

a) Demostrar que si A es ortogonal, entonces $A^{-1}$ también lo es.
b) Demostrar que el producto de una matriz ortogonal por su traspuesta es conmutativo.
c) Demostrar que si A y B son matrices ortogonales, entonces el producto A.B es también una matriz ortogonal.
d) Demostrar que si la matriz A es ortogonal, entonces: $|A| = \pm 1$.

**Ejercicio 2**

Normalizar los siguientes vectores:

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \qquad u_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

**Ejercicio 3**

a) ¿La matriz $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ es ortogonal?

b) Normalizar los vectores columna de Q.

**Ejercicio 4**

Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$.

a) Hallar sus valores propios.
b) Hallar sus vectores propios normalizados.
c) Hallar una matriz Q tal que $Q^{-1}.A.Q$ sea diagonal.

**Ejercicio 5**

En los casos que siguen, explicitar la matriz de la forma cuadrática.

a) $4.x^2 + 9.y^2$
b) $x^2 + y^2 + z^2$
c) $2.x^2 + 4.x.y - y^2$

**Ejercicio 6**

Sea la forma cuadrática $(x_1 \quad x_2).\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$.

a) Escribirla como un polinomio homogéneo de segundo grado.
b) Escribirla de la forma: $\lambda_1.y_1^2 + \lambda_2.y_2^2$, hallando $\lambda_1$ y $\lambda_2$.

## Repartido Práctico 10: Valores y vectores propios. Diagonalización. Formas cuadráticas.

### Ejercicio 7

Clasificar las siguientes formas cuadráticas correspondientes al vector $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$.

a) $x_1^2 + 2.x_2^2 + 3.x_3^2$

b) $x_1^2 + x_2^2$

c) $-x_1^2 + -5.x_2^2 - 7.x_3^2$

d) $-x_1^2 - x_3^2$

e) $(x_1 + x_2 + x_3)^2$

f) $x_1^2 + (x_2 - x_3)^2$

g) $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2$

### Ejercicio 8

Clasificar las siguientes formas cuadráticas correspondientes al vector $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ utilizando el Teorema[2].

a) $x_1^2 - 2.x_1.x_2 + 3.x_2^2 - 4.x_2.x_3 + 5.x_3^2$

b) $-3.x_1^2 - 8.x_1.x_2 + 3.x_2^2$

c) $5.x_1^2 - 8.x_1.x_2 + 5.x_2^2$

# FACULTAD DE CIENCIAS SOCIALES
# DEPARTAMENTO DE ECONOMÍA

## DIPLOMA EN ECONOMÍA PARA NO ECONOMISTAS

### ASIGNATURA: MATEMÁTICA APLICADA A LA ECONOMÍA

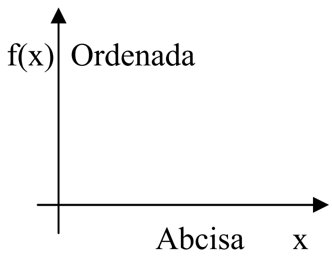
### MATERIAL DE CONSULTA Y CASOS PRÁCTICOS

### CURSO 2004
### PARTE V

**Profesor: David Glejberman**

## 10. FUNCIONES DE UNA VARIABLE
## GRÁFICAS DE FUNCIONES ELEMENTALES
## OPERACIONES CON FUNCIONES
## FUNCIÓN INVERSA Y FUNCIÓN COMPUESTA

En esta parte del curso centramos nuestra atención en las funciones que tienen por dominio y codominio conjuntos numéricos, es decir, funciones que dependen de una sola variable (a la que simbolizamos con la letra x). En consecuencia, la representación gráfica más apropiada es la que utiliza un par de ejes cartesianos ortogonales: al eje horizontal se le llama eje de las *abcisas* y al vertical eje de las *ordenadas*.




Incluso vamos a restringir el estudio a las funciones donde la correspondencia puede expresarse mediante una fórmula que involucra una ecuación o a lo sumo un número reducido de ecuaciones (la función puede expresarse en un renglón o en un par de renglones). Ejemplos:

$$f(x) = 3.x^2 - x + 1$$

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & si \quad x \geq 0 \\ -x+1 & si \quad x < 0 \end{cases}$$

El dominio de la función es el conjunto de los números reales o una parte de los números reales, porque en algunos casos la fórmula que define la función sólo es válida para una parte de los números reales. El problema de encontrar para qué números reales es válida la fórmula se conoce como *determinación del dominio de existencia de la función*.

Ejemplo: Sea f: $f(x) = \dfrac{x+2}{x^2-1}$. La fórmula que define la correspondencia es, en este caso, una fracción algebraica, la cual tiene sentido si el denominador no se anula. Y en este caso el denominador se anula si $x = \pm 1$. Por tanto, el dominio de la función es: $D(f) = \{x: x \in R \text{ y } x \neq \pm 1\}$.

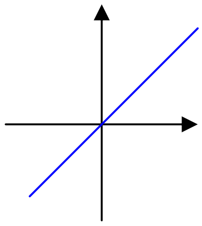
<u>Definición</u>: Una función se dice *elemental* si en la fórmula la variable x interviene una sola vez.

Ejemplos de funciones elementales: $x$, $x^2$, $x^3$, $e^x$, $e^{-x}$, $|x|$, entre otras.

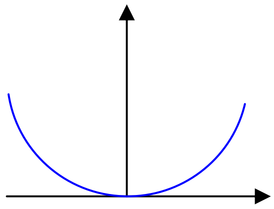
Vamos a considerar a continuación el problema de hallar el gráfico de las funciones de una variable. Comenzamos con las funciones elementales y luego introduciremos las herramientas para el estudio de funciones cualesquiera.

Restringimos el conjunto de las funciones elementales a las siguientes (dejamos fuera, por ejemplo, a las funciones trigonométricas).

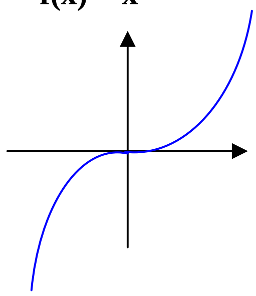
**$f(x) = x$**



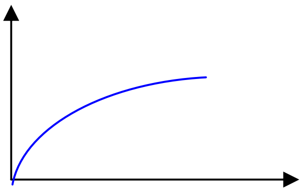
**$f(x) = x^2$**



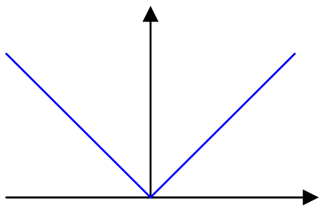
**$f(x) = x^3$**



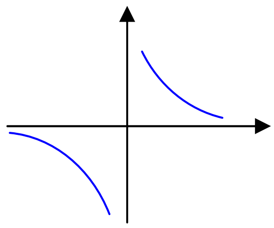
**$f(x) = \sqrt{x}$**



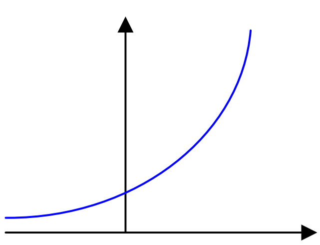
**$f(x) = |x|$**



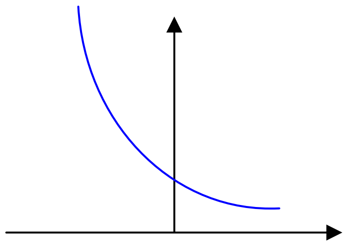
**$f(x) = \frac{1}{x}$**



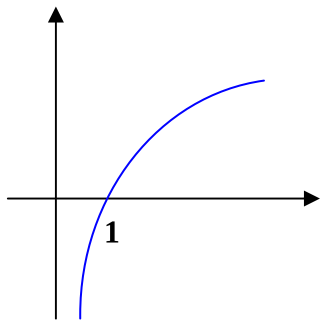
**$f(x) = e^x$**



**$f(x) = e^{-x}$**



**$f(x) = Lx$**




*Observaciones*

1. El gráfico de $f(x) = x$ es una recta que pasa por el origen. Se trata de un caso particular de las funciones del tipo $f(x) = a + b.x$ (donde a y b son dos números reales que no dependen de x) cuyo gráfico también es una recta cuyo comportamiento depende de los parámetros a y b. Por la forma del gráfico, estas funciones se llaman *lineales*.
2. El gráfico de $f(x) = x^2$ es una parábola con los "brazos" hacia arriba. Se trata de un caso particular de de las funciones *cuadráticas* de la forma $f(x) = a.x^2 + b.x + c$ (donde a, b y c son parámetros que no dependen de x) cuyo comportamiento depende de ciertas relaciones entre los parámetros como veremos más adelante.
3. El dominio de $f(x) = \sqrt{x}$ es el conjunto de los reales mayores o iguales que 0.
4. La fórmula de la función $f(x) = |x|$ (valor absoluto de x) también puede expresarse en dos renglones:

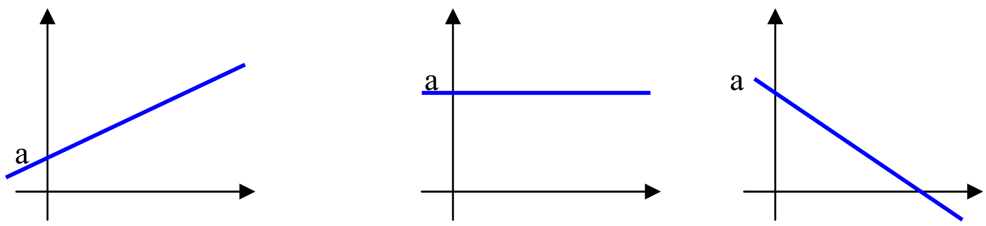
$$f(x) = \begin{cases} x & si \quad x \geq 0 \\ -x & si \quad x < 0 \end{cases}$$

5. El dominio de la función $f(x) = \dfrac{1}{x}$ es el conjunto de los números reales con exclusión del cero.
6. Las funciones $e^x$ y $e^{-x}$ se dibujan por encima del eje de las abcisas, es decir, las funciones nunca toman valores negativos ni se anulan.
7. La función $f(x) = Lx = \log_e x$ restringe su dominio a los reales positivos (el logaritmo de cero o de un número negativo no están definidos).

Las *funciones lineales* cumplen un importante papel en los modelos de análisis económicos simplificados. Se trata de funciones con gráficos muy sencillos, los cuales se comentan a continuación.

$$f(x) = a + b.x$$

El parámetro "a" se llama *ordenada en el origen* porque indica la ordenada del punto donde la recta corta al eje Oy. El parámetro "b" se llama *coeficiente angular* de la recta y determina si la recta es creciente, constante o decreciente, según que su valor sea positivo, cero o negativo.

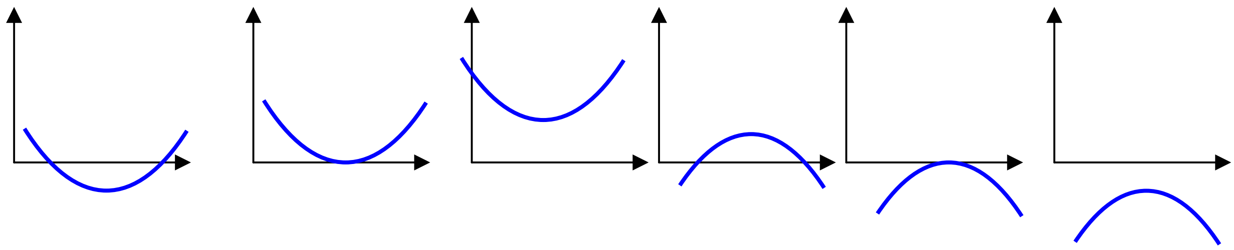



$b > 0$ $\qquad$ $b = 0$ $\qquad$ $b < 0$

Las *funciones cuadráticas* también tienen una fórmula y un gráfico sencillos.

$$f(x) = a.x^2 + b.x + c$$

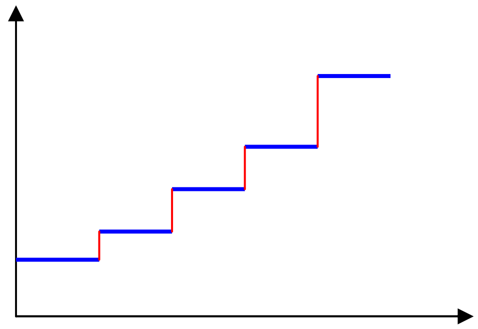
La representación gráfica es siempre una parábola, cuyos brazos miran hacia arriba si $a > 0$ y hacia abajo en caso contrario. El eje de simetría de la parábola corta al eje Ox en el punto $x = -b/2a$. La parábola corta al eje Ox si el discriminante de la ecuación $a.x^2 + b.x + c = 0$ es no negativo (el discriminante es $\Delta = b^2 - 4.a.c$).



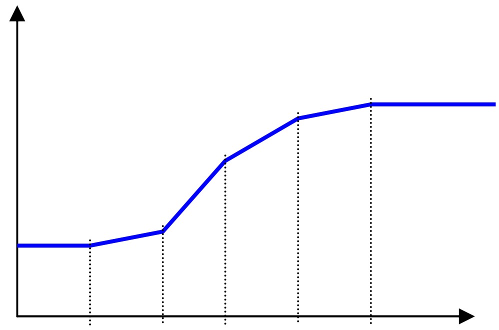
$a > 0, \Delta > 0$ $\qquad$ $a > 0, \Delta = 0$ $\qquad$ $a > 0, \Delta < 0$ $\qquad$ $a < 0, \Delta > 0$ $\qquad$ $a < 0, \Delta = 0$ $\qquad$ $a < 0, \Delta < 0$

Se podrían denominar *cuasi-lineales* a las funciones cuyo gráfico contiene segmentos de recta y/o semirrectas. Ya hemos visto un ejemplo: la función valor absoluto, cuyo gráfico se compone de dos semirrectas. Veamos ahora dos ejemplos más.

Escalera



Poligonal



La primera se suele utilizar en Economía para representar en el eje horizontal el tiempo y en el eje vertical el nivel de los salarios (en este caso el gráfico se denomina "dientes de sierra"). Los salarios se mantienen constantes por un cierto tiempo (3 meses, 6 meses, 12 meses) y luego pegan un salto igual al aumento recibido por los trabajadores. Las líneas verticales que unen los escalones no son, estrictamente hablando, parte del gráfico de la función, pero se dibujan para mostrar la magnitud del aumento en cada período.

La segunda suele utilizarse en Estadística para representar distribuciones acumuladas. En Economía, la poligonal puede utilizarse para representar el ingreso acumulado por las personas o los hogares. Si por ejemplo un trabajador gana \$20 la hora normal y \$40 la hora extra, entonces el ingreso acumulado por el trabajador según el tiempo trabajado (t) es una poligonal que tiene la siguiente fórmula:

$$\mathrm{Y(t)} = \begin{cases} 20.t \quad si \quad 0 \le t \le 8 \\ 160 + 40.t \quad si \quad t > 8 \end{cases}$$

Recordemos algunas definiciones ya introducidas en el curso.

- La función f es *inyectiva* si para todo $x_1 \neq x_2$ del dominio resulta $f(x_1) \neq f(x_2)$
- La función f es *sobreyectiva* si para todo elemento del codominio hay al menos una preimagen en el dominio.
- La función f es *biunívoca* o *biyectiva* si es a la vez inyectiva y sobreyectiva.
- La función f es *par* si para todo x del dominio es $f(-x) = f(x)$
- La función f es *impar* si para todo x del dominio es $f(-x) = -f(x)$

*Observaciones*

1. Si una función es inyectiva, entonces su gráfico es cortado una sola vez por cada paralela al eje Ox.
2. Si la función es sobreyectiva y el codominio es el conjunto de los reales, entonces el gráfico de la función se dibuja a lo largo de todo el eje Ox.
3. Si la función es par, su gráfico es simétrico respecto del eje Oy.
4. Si la función es impar, su gráfico es simétrico respecto del centro de coordenadas.

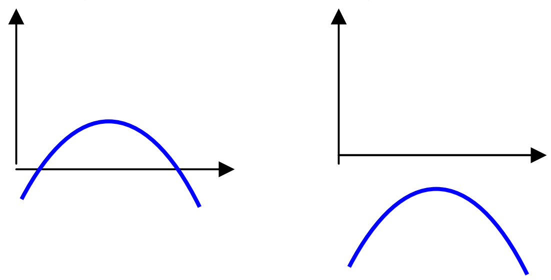
A continuación enunciamos algunos resultados útiles para graficar funciones relacionadas con las funciones elementales.

***Relación entre la gráfica de $y = f(x)$ y las gráficas de funciones relacionadas***

| | |
|---|---|
| y = f(x) + c | La gráfica se desplaza hacia arriba a distancia c. |
| y = f(x) - c | La gráfica se desplaza hacia abajo a distancia c. |
| y = f(x - c) | La gráfica se desplaza hacia la derecha a distancia c. |
| y = f(x + c) | La gráfica se desplaza hacia la izquierda a distancia c. |
| y = - f(x) | La gráfica es simétrica respecto del eje Ox. |
| y = f(-x) | La gráfica es simétrica respecto del eje Oy. |
| y = c.f(x) con c>1 | La gráfica se estira verticalmente, alejándose del eje Ox. |
| y = c.f(x) con c<1 | La gráfica se contrae verticalmente, acercándose al eje Ox. |

Ejemplo:

y = f(x)            y = f(x) - c



Los siguientes resultados de la geometría analítica son útiles para construir e interpretar el gráfico de las funciones.

***Fórmulas relacionadas con las rectas del plano***

*a) Distancia entre dos puntos*

$$A = (x_1, y_1) \qquad B = (x_2, y_2)$$

$$d(A,B) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

*b) Ecuación de la recta que pasa por el punto $P = (x_0, y_0)$*

$$y = m.(x - x_0) + y_0$$

*c) Ecuación de la recta que pasa por dos puntos*

$$A = (x_1, y_1) \quad B = (x_2, y_2)$$
$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.(x - x_1)$$

*d) Ecuaciones del haz de rectas que pasan por el punto $P = (x_0, y_0)$*

$$y = m.(x - x_0) + y_0$$
$$x = x_0$$

*e) Ecuaciones de rectas paralelas*

$$y = m.x + n_0$$
$$y = m.x + n_1$$

*f) Ecuaciones de rectas perpendiculares que se cortan en el punto $P = (x_0, y_0)$*

$$y = m.(x - x_0) + y_0$$
$$y = (-1/m).(x - x_0) + y_0$$

***Fórmulas de la circunferencia y de la parábola***

*a) Ecuación de la circunferencia de radio r y centro en el punto $P(x_0, y_0)$*

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

*b) Ecuación de la parábola de eje paralelo a Oy con foco en $(x_1, y_1)$ y vértice en $(x_1, y_2)$*

$$4.(y - y_2).(y_1 - y_2) = (x - x_1)^2$$

*c) Ecuación de la parábola de eje paralelo a Oy que corta al eje Ox en $x=x_1$ y en $x=x_2$*

$$y = m.(x - x_1).(x - x_2)$$

***Función inversa***

Recordemos la definición ya introducida en el curso, para funciones en general.

<u>Definición</u>: Sea f una función de A en B. Se denomina *función inversa de f* (notación: $f^{-1}$) a otra función tal que a cada imagen le hace corresponder su preimagen: $[B, A, f^{-1}]$.

En la definición de la función inversa, $f^{-1}$, el dominio es el codominio de la función f, el codominio de la función $f^{-1}$ es el dominio de la función f y la correspondencia va en el sentido inverso.

¿Cómo se obtiene la fórmula de la función inversa? Cuando existe la función inversa, la fórmula se obtiene de la ecuación y = f(x) despejando la “x” en función de “y”.

*Observaciones*

1. La función inversa no siempre existe. La condición necesaria y suficiente para que exista la función inversa es que la función f sea biyectiva.
2. No siempre es fácil explicitar la fórmula de la función inversa. Y ello es así porque no siempre es posible despejar la “x” en función de “y”.
3. Es necesario tener en cuenta que *función inversa* e *inversa de la función* son conceptos diferentes.

Ejemplo: La inversa de la función $f(x) = e^x$ es la función $g(x) = 1/e^x = e^{-x}$ mientras que la función inversa es la que resulta de despejar la “x” en la ecuación $y = e^x$ (y luego intercambiar los nombres de las variables, para poder representar ambas funciones en el mismo gráfico).

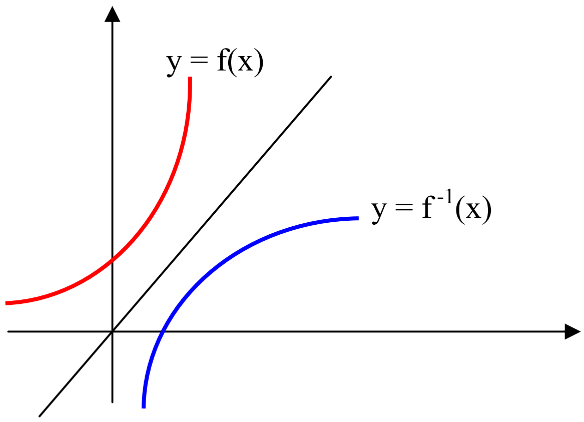
$y = e^x$

Tomando logaritmos: $Ly = Le^x = x$

Resulta: $x = Ly$

Cambiando los nombres: $y = Lx$

La función inversa de $y = e^x$ es la función $y = Lx$. Los gráficos de una función y de la función inversa tienen la propiedad de ser simétricos respecto de la bisectriz del primer y tercer cuadrantes.




***Función compuesta***

Este concepto también fue introducido en el curso con anterioridad.

<u>Definición</u>: Sean dos funciones [A, B, f] y [B, C, g]. Se dice que h es la función compuesta de f y g si el conjunto de partida de h es el conjunto de partida de f , el conjunto de llegada de h es el conjunto de llegada de g, y la imagen de un argumento x por g se obtiene de aplicar a x la función f y al valor f(x) la función g.

[A, C, h] función compuesta de [A, B, f] y [B, C, g] $\leftrightarrow$ $h(x) = g[f(x)]$

La composición de funciones se una herramienta muy potente para generar nuevas fórmulas de funciones. Por ejemplo, si en la función elemental $g(x) = e^x$ se sustituye el argumento x por una función lineal como $f(x) =2.x +1$, se obtiene una nueva función cuya fórmula es: $h(x) = g[f(x)] = e^{2.x + 1}$. En general, los gráficos de g y h no presentan similitudes ni relaciones interesantes. En cuanto al dominio de h, éste muchas veces debe restringirse (respecto del conjunto más amplio posible, el conjunto de los números reales) porque se requiere a la vez que: a) los valores de x pertenezcan al dominio de f, y b) los valores f(x) pertenezcan al dominio de g.

Ejemplo 1: Sean $g(x) = x - 3$ y $f(x) = \sqrt{x}$. Resulta: $h(x) = g[f(x)] = \sqrt{x} - 3$. En este caso la única restricción proviene de la función f: su dominio es el conjunto de los reales no negativos, y éste es también el dominio de la función h.

Ejemplo 2: Sean $g(x) = \frac{1}{x}$ y $f(x) = \sqrt{x}$. Resulta: $h(x) = g[f(x)] = \frac{1}{\sqrt{x}}$. En este caso el dominio de f es el conjunto de los reales no negativos, pero la forma funcional de g agrega otra restricción: la x no puede tomar el valor 0. Entonces, en el dominio de la función h intervienen las dos restricciones y resulta: $D(h) = \{x: x \in R \text{ y } x > 0\}$.

***Operaciones con funciones***

Dadas dos funciones f y g, es posible obtener nuevas funciones a partir de las operaciones algebraicas. Por ejemplo, la función suma de f y g se obtiene haciendo corresponder a la abcisa x el resultado de la suma de las imágenes según f y g.

$$x \xrightarrow{f+g} [f+g](x) = f(x) + g(x)$$

El dominio de la función suma depende de los respectivos dominios de las funciones sumandos. El siguiente esquema muestra las restricciones que es necesario imponer al dominio en cada operación para que el resultado siga siendo una función.

| OPERACIÓN | FUNCIÓN | DOMINIO |
|---|---|---|
| Suma | $y = f(x) + g(x)$ | $D(f) \cap D(g)$ |
| Resta | $y = f(x) - g(x)$ | $D(f) \cap D(g)$ |
| Producto | $y = f(x).g(x)$ | $D(f) \cap D(g)$ |
| Cociente | $y = f(x) / g(x)$ | $D(f) \cap D(g) \cap \{x: g(x) \neq 0\}$ |
| Potencia | $y = [f(x)]^k$ | $D(f)$ |
| Inversa de la función | $y = 1 / f(x)$ | $D(f) \cap D(g) \cap \{x: f(x) \neq 0\}$ |
| Exponencial | $y = e^{f(x)}$ | $D(f)$ |
| Logaritmo | $y = Lf(x)$ | $D(f) \cap \{x: f(x) > 0\}$ |
| Raíz cuadrada | $y = \sqrt{f(x)}$ | $D(f) \cap \{x: f(x) \geq 0\}$ |
| Raíz cúbica | $y = \sqrt[3]{f(x)}$ | $D(f)$ |
| Potencial exponencial | $y = [f(x)]^{g(x)}$ | $D(f) \cap D(g) \cap \{x: f(x) > 0\}$ |

## Repartido Práctico 10: Funciones

**Ejercicio 1**

**Indicar si las siguientes funciones son o no inyectivas, sobreyectivas o biyectivas. El codominio en todos los casos es R (conjunto de los números reales), y el dominio D(f) se explicita en cada caso.**

a) $f(x) = x$ $\quad$ $D(f) = R$
b) $f(x) = x^2$ $\quad$ $D(f) = R$
c) $f(x) = e^x$ $\quad$ $D(f) = R$
d) $f(x) = 1/x$ $\quad$ $D(f) = R^+$
e) $f(x) = \sqrt{x}$ $\quad$ $D(f) = \{x: x \geq 0\}$
f) $f(x) = (x - 1)^2$ $\quad$ $D(f) = \{x: x \geq 1\}$

**Ejercicio 2**

**Estudiar si las siguientes funciones son o no pares o impares.**

a) $f(x) = x$
b) $f(x) = x^2$
c) $f(x) = x^2 + \alpha.x + 1$ (discutir según $\alpha$ real)
d) $f(x) = 1/x$
e) $f(x) = \sqrt{x}$
f) $f(x) = \sqrt{x^2 + 4}$
g) $f(x) = e^{-x^2}$

**Ejercicio 3**

Sea la recta de ecuación: (r) $y = 2.x + 2$.

a) Mostrar que la recta pasa por el punto (1,4).
b) Hallar la ecuación de la recta paralela a (r) que pasa por el punto (1,3) y representarla en un mismo gráfico junto con (r).
c) Hallar la ecuación de la recta perpendicular a (r) que pasa por (1,4).
d) Hallar las ecuaciones del haz de rectas que pasan por (1,4).

**Ejercicio 4**

a) Hallar la ecuación de la parábola que corta al eje Ox en los puntos (1,0) y (2,0) y tiene su vértice en el punto (3/2, -1/2).
b) Hallar la ecuación de la parábola que corta al eje Ox en los puntos (-1,0) y (1, 0) y corta al eje Oy en el punto (0, 2).
c) Hallar la ecuación de la parábola con foco en (1,1) y vértice en (1,0).
d) Dibujar aproximadamente los gráficos de las tres parábolas.

## Ejercicio 5

a) **Hallar la ecuación de la circunferencia con centro en (0,0) y radio 2.**
b) Hallar la ecuación de la circunferencia con centro en (1,1) y radio 1.
c) Dibujar aproximadamente los gráficos de las dos circunferencias.

## Repartido Práctico 10: Funciones

**Ejercicio 6**

Hallar la representación gráfica aproximada de las funciones:
(a) y = f(x) + c   (con  c>0)
(b) y = f(x + c)   (con  c>0)
en los siguientes casos.

1. f(x) = x
2. $f(x) = x^2$
3. f(x) = 1/x
4. $f(x) = \sqrt{x}$
5. $f(x) = e^x$
6. f(x) = Lx
7. f(x) = |x|
8. f(x) = |x| - x

**Ejercicio 7**

Hallar la función inversa en cada uno de los siguientes casos. Si la inversa existe sólo para una parte del dominio, calcular la función inversa restringiendo el dominio de f a $R^+$. Explicitar $D(f^{-1})$ en cada caso.

a) f(x) = 3.x – 3
b) $f(x) = e^x$
c) $f(x) = \sqrt{x}$
d) $f(x) = x^2 - 1$
e) f(x) = x/x – 1

**Ejercicio 8**

Hallar g[f(x)] y explicitar el dominio de la función compuesta en cada uno de los siguientes casos.

1. $g(x) = x^2 + 2.x + 1$
   f(x) = x – 1

2. $g(x) = x^2$
   f(x) = 1/x

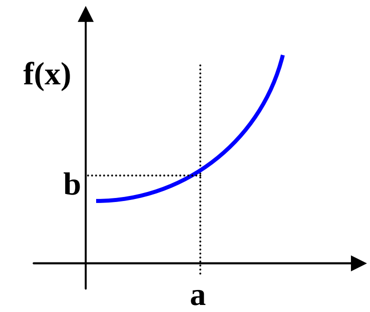
3. g(x) = Lx
   $f(x) = e^x$

4. $g(x) = \sqrt{x}$
   $f(x) = x^2$

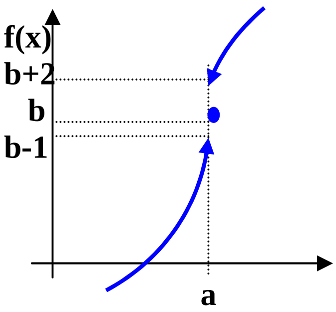
## 11. LÍMITES Y CONTINUIDAD DE FUNCIONES

El concepto de límite de una función (f) en un punto (x = a) refiere al comportamiento del gráfico en las vecindades, en un entorno reducido centrado en dicho punto. ¿Qué comportamiento podría tener el gráfico de f en un entorno de x = a?

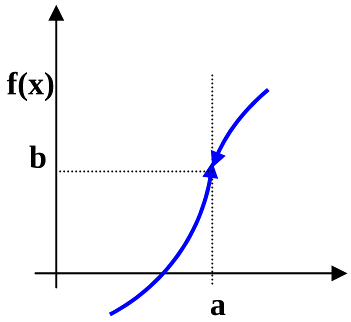
(A)



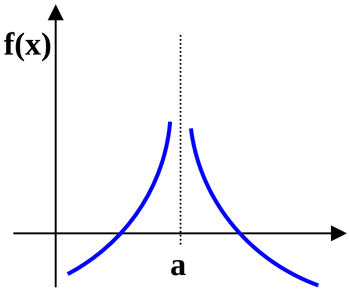

(B)



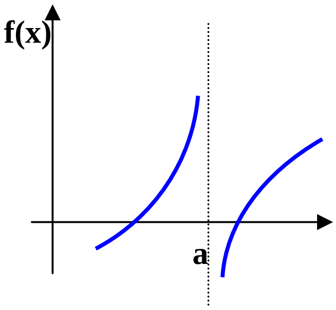

(C)



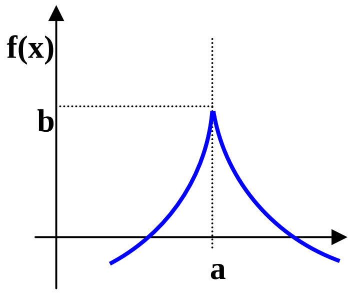

(D)



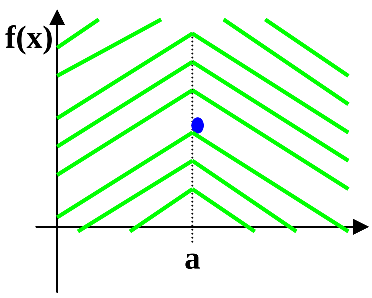

(E)



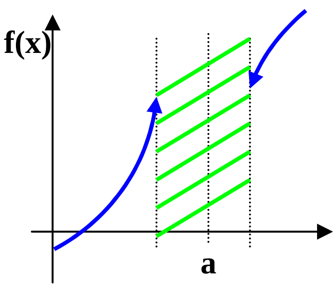

(F)



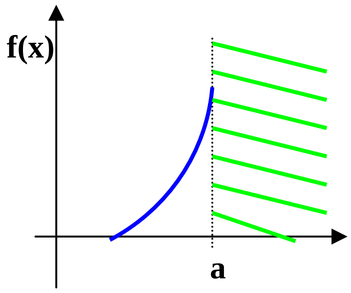

(G)



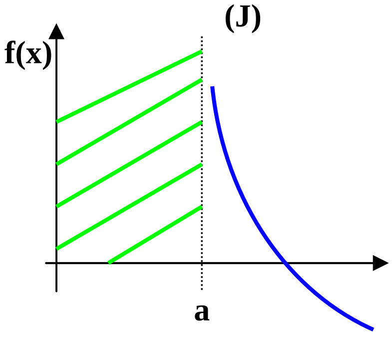

(H)




(I)




(J)




¿En qué difieren los gráficos precedentes en relación a lo que ocurre en las vecindades de de x=a?

En algunos de ellos el punto x=a no es parte del D(f).

| Marcarlos con una cruz. | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | | | | |

En algunos de ellos el D(f) excluye un entorno o un entorno reducido centrado en a.

| Marcarlos con una cruz. | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | | | | |

En algunos de ellos el D(f) excluye los valores de x en un semientorno reducido (a izquierda o a derecha) centrado en x=a.

| Marcarlos con una cruz. | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | | | | |

En algunos de ellos los valores de f(x) en un entorno reducido de centro a difieren entre sí tan poco como se desee, a condición de reducir los suficiente el radio del entorno.

| Marcarlos con una cruz. | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | | | | |

En algunos de ellos el gráfico de la función se puede dibujar sin levantar el lápiz al pasar por x=a.

| Marcarlos con una cruz. | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | | | | |

En algunos de ellos los valores de f(x) en un entorno reducido de centro *a* difieren tanto como se quiera, aunque se reduzca el radio del entorno.

| Marcarlos con una cruz. | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | | | | |

Definición: *Límite finito de una función en un punto* $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$

El límite de la función f en el punto x=a es *b*, si dado un entorno pequeño centrado en *b* y de radio ε ($\cup_{b,\varepsilon}$), existe un entorno reducido de centro *a* ($\cup'_{a,\delta}$), tal que para todos los x pertenecientes a este último entorno, se cumple que f(x) pertenece al entorno centrado en *b*.

Que el límite de la función f en el punto x=a es *b* implica que f(x) está tan cercano a *b* como se quiera, cuando x se aproxima a *a* sin tocar a *a*.

Ejemplo 1: $\lim\limits_{x \to 2}(2.x + 1) = 5$ porque existe δ tal que si $x \text{ X } \cup'_{a,\delta} \to f(x) \text{ X } \cup_{b,\varepsilon}$.

¿Se puede probar la existencia del δ? La respuesta es afirmativa.

$$-\varepsilon < (2.x + 1) - 5 < \varepsilon$$

$$-\varepsilon < 2.x - 4 < \varepsilon$$

$$- \varepsilon/2 < x - 2 < \varepsilon/2$$

Entonces $\delta = \varepsilon/2$, pues cuando $|x - 2| < \varepsilon/2$ se cumple que $|(2.x + 1) - 5| < \varepsilon$.

Ejemplo 2: Sea f(x) = $\frac{x^2 - 1}{x - 1}$. ¿Qué pasa con la función en x=1? El punto x=1 no pertenece al dominio de la función. Sin embargo, se puede calcular el límite de la función cuando x se acerca a 1. Obsérvese que si x≠1, es f(x) = $\frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{(x-1).(x+1)}{x-1} = x + 1$. Es decir, que salvo en x=1, la función se comporta como la recta y = x + 1. Por tanto:

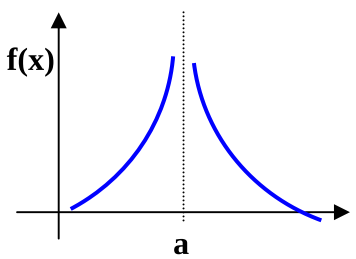
$\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 2$, porque en un entorno reducido de centro a=1, los valores de x tienen imágenes muy cercanas a b=2.

*Observaciones*

1. Según la definición de límite en el punto x=a, lo que hay que saber es qué ocurre con los valores de f(x) cuando la variable x recorre los puntos de un entorno reducido de centro *a*. Es decir, no importa lo que ocurre en el punto x=a, sino lo que ocurre en los puntos vecinos a *a*.
2. Podría ocurrir que f(a) = b, que f(a) ≠ b ó también que x=a no sea parte del D(f).
3. Si: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ ¿qué debería ocurrir con f(x) cuando vamos achicando el radio del entorno reducido de centro *a* y radio δ? En tal caso, el entorno $\cup_{b,\varepsilon}$ también se va achicando. En otras palabras, cuando nos acercamos a *a* por izquierda y por derecha, los valores de f(x) se van acercando a *b* tanto como se quiera.
4. ¿Por qué en el caso (B) no es $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$? Porque no importa qué tan cerca de *a* estén los valores de x –uno por izquierda y otro por derecha– los f(x) siempre estarán a una distancia mayor o igual que 3 del valor *b*.
5. ¿Qué significa en la definición que ε es *dado*? Significa que ε es un número fijo, arbitrariamente pequeño, pero fijo.

<u>Definición</u>: *Límite infinito de una función en un punto* $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$

El límite de la función f en el punto x=a es +∞, cuando f(x) > K (K arbitrario y tan grande como se quiera) cuando la variable x se acerca a *a* sin tocar a *a*.



Ejemplo: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{|x|} = +\infty$

De manera análoga se define el límite $-\infty$ de una función en un punto. En este caso lo que ocurre con la función es que en las cercanías del punto *a* toma valores grandes (en valor absoluto) pero con signo negativo: $f(x) < -H$ (con H positivo y arbitrariamente grande) cuando los valores de x se acercan a *a*.

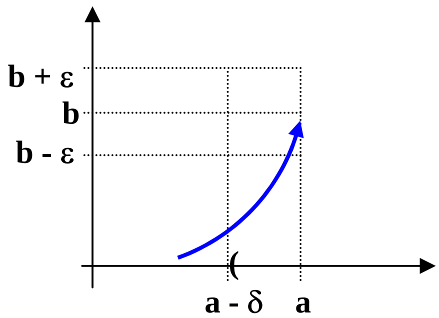
<u>Definición</u>: *Límite lateral por izquierda de una función en un punto* $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = b$

El límite de la función f en el punto $x=a^-$ es *b*, si dado un entorno pequeño centrado en *b* y de radio ε ($\cup_{b,\varepsilon}$), existe δ tal que si $0 < a - x < \delta$, entonces se cumple que: $|f(x) - b| < \varepsilon$. Para que el límite de f en "a por izquierda" sea *b* se tiene que cumplir que cuando x está cerca de *a*, pero con valores más pequeños que *a*, los valores de f(x) estén cerca de *b*.

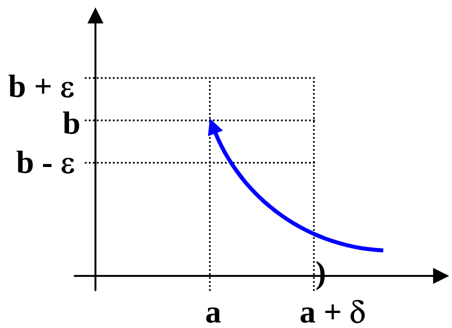
<u>Definición</u>: *Límite lateral por derecha de una función en un punto* $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = b$

El límite de la función f en el punto $x=a^+$ es *b*, si dado un entorno pequeño centrado en *b* y de radio ε ($\cup_{b,\varepsilon}$), existe δ tal que si $0 < x - a < \delta$, entonces se cumple que: $|f(x) - b| < \varepsilon$. Para que el límite de f en "a por derecha" sea *b* se tiene que cumplir que cuando x está cerca de *a*, pero con valores más grandes que *a*, los valores de f(x) estén cerca de *b*.

$\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = b$




$\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = b$




Ejemplos:

$$\lim_{x \to 0}\left(\frac{1}{x}\right) \textit{ no existe, pero}: \lim_{x \to 0^+}\left(\frac{1}{x}\right) = +\infty \quad y \quad \lim_{x \to 0^-}\left(\frac{1}{x}\right) = -\infty$$

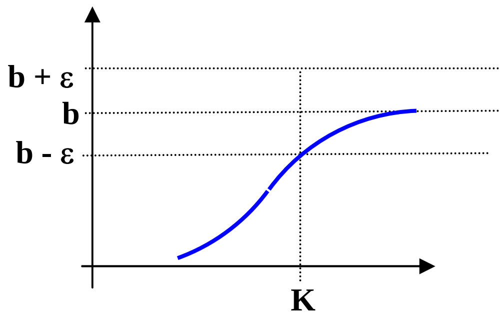
<u>Definición</u>: *Límite finito de una función cuando* $x \to +\infty$ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b$

El límite de la función f cuando $x \to +\infty$ es *b*, si dado un entorno pequeño centrado en *b* y de radio ε ($\cup_{b,\varepsilon}$), existe K tal que si $x > K$, entonces se cumple que: $|f(x) - b| < \varepsilon$.

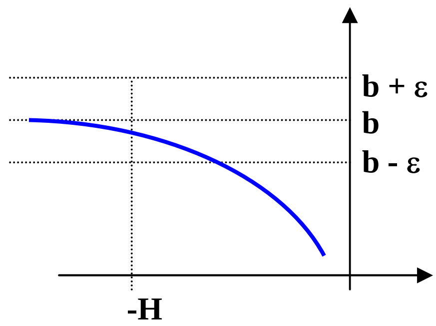
Definición: *Límite finito de una función cuando $x \to -\infty$*  $$\lim_{x \to -\infty} f(x) = b$$

El límite de la función f cuando $x \to -\infty$ es $b$, si dado un entorno pequeño centrado en $b$ y de radio $\varepsilon$ ($\cup_{b,\varepsilon}$), existe H tal que si $x < -H$, entonces se cumple que: $|f(x) - b| < \varepsilon$.

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = b$$




$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = b$$



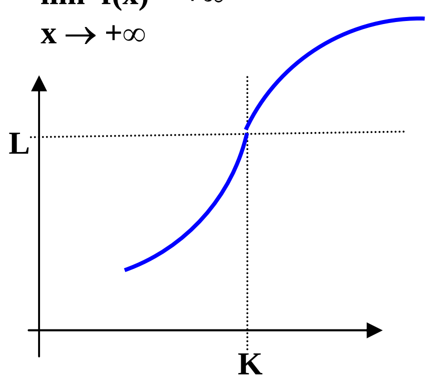

Definición: *Límite más infinito de una función cuando $x \to \pm\infty$*  $$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = +\infty$$

El límite de la función f cuando $x \to +\infty$ ($x \to -\infty$) es $+\infty$, si dado L (positivo y arbitrariamente grande), existe K (H) tal que si $x > K$ ($x < -H$), entonces se cumple que: $f(x) > L$.

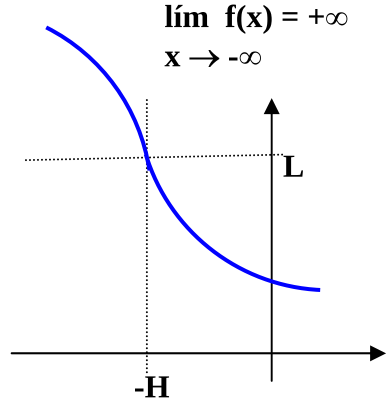
Definición: *Límite menos infinito de una función cuando $x \to \pm\infty$*  $$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = -\infty$$

El límite de la función f cuando $x \to +\infty$ ($x \to -\infty$) es $-\infty$, si dado L (positivo y arbitrariamente grande), existe K (H) tal que si $x > K$ ($x < -H$), entonces se cumple que: $f(x) < -L$.

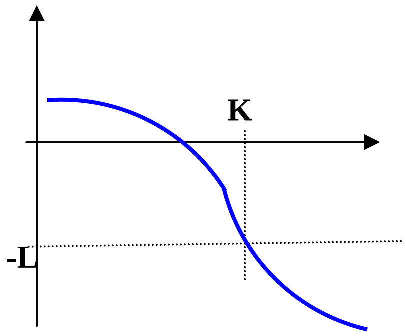
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$



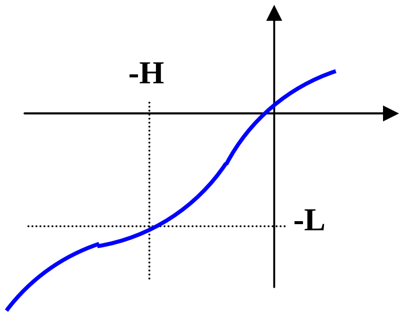

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$$



$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$$




$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$




***Propiedades de los límites de funciones***

Sean dos funciones, f y g, tales que: $\lim_{x \to \alpha} f(x) = b_1$ y $\lim_{x \to \alpha} g(x) = b_2$ donde $\alpha$ puede ser un número finito (a) o infinito ($+\infty$ ó $-\infty$). Entonces se cumplen las siguientes propiedades.

$$\text{Lím } [f(x) + g(x)] = b_1 + b_2$$
$$\text{Lím } [f(x) - g(x)] = b_1 - b_2$$
$$\text{Lím } [f(x) * g(x)] = b_1 * b_2$$
$$\text{Lím } [f(x) \div g(x)] = b_1 \div b_2 \quad (\text{si } b_2 \neq 0)$$

Estas propiedades resuelven el problema de calcular el límite de una suma, resta, etc., cuando ambos límites son finitos. Pero, ¿qué ocurre cuando el límite de un sumando, por ejemplo, es infinito? Si uno de los sumandos tiene límite finito y el otro límite infinito, entonces el límite de la suma es infinito. Si los dos sumandos tienen límite infinito y del mismo signo, entonces la suma también tiende a infinito, y con el mismo signo. Pero si los sumandos tienen límite infinito y de diferente signo, el límite de la suma no puede obtenerse como un resultado general, y hay que estudiar caso por caso. Resulta de mucha utilidad, para este propósito, la siguiente definición.

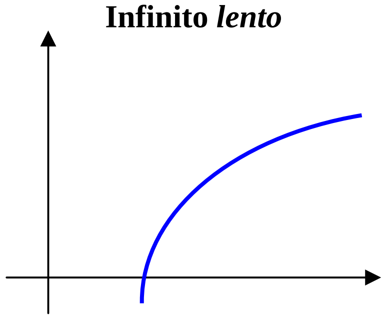
***Infinitos***

Definición: Se dice que una función f es un *infinito* cuando $x \to +\infty$ si se cumple que: $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

Entre los "infinitos" los hay más *lentos* y los que más rápidamente se "disparan" a valores altos.

**Infinito *rápido***

**Infinito *lento***



Definición: Se dice que un *infinito f es de mayor orden que otro g,* si $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$

Definición: Se dice que un *infinito f es de menor orden que otro g,* si $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$

Definición: Se dice que dos *infinitos f y g son equivalentes,* si $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$

Se puede demostrar que la suma de infinitos de distinto orden es equivalente al término de mayor orden. Si el límite del cociente no es el número uno, sino otro número distinto de cero, entonces los dos infinitos son de igual orden. Un resultado importante:

Ord (infinito log) < Ord (infinito potencial) < Ord (infinito exponencial)

Entre dos infinitos potenciales –por ejemplo, $x^2$ y $x^5$– el de mayor orden es el que tiene exponente más alto. Aplicando estas reglas se pueden resolver muchos problemas de límites.

*Ejemplos*

1. $x^2 + e^x \sim e^x$ con $x \to +\infty$. Este resultado expresa que el primer infinito es equivalente al segundo. ¿Por qué? Porque la suma de infinitos de distinto orden –en este caso, uno potencial más uno exponencial– es equivalente al de mayor orden.
2. $\lim_{x \to +\infty} \frac{(Lx)^{100}}{x^{0,01}} = 0$. En este caso tenemos el cociente de dos infinitos, uno logarítmico y otro potencial. Como el del numerador es de menor orden que el del denominador, el cociente tiende a 0.
   Aunque el límite de la expresión tiende a 0, conviene observar que esta tendencia es muy lenta. Por ejemplo, para x=100, el cociente toma el valor $2.10^{66}$ que es un número muy grande.
3. $\lim_{x \to +\infty} \frac{x + Lx}{2.x - Lx} = \lim \frac{x}{2.x} =$ ½ .
4. $\lim_{x \to +\infty} x.e^{-x} = \lim x/ e^x = 0$

***Límite de sucesiones***

Las sucesiones son un caso particular de funciones. Lo que tienen de particular es que su dominio no es el conjunto de los números reales sino el conjunto de los números naturales. Por ejemplo, la sucesión $f(n) = n^2$ asocia a cada número natural su cuadrado. La notación más habitual es de la forma $a_n = n^2$ o bien $b_n = 1/n$. En estos casos no tiene sentido estudiar el límite en un punto del dominio, porque en un entorno reducido del punto no hay función. El único límite que puede definirse es el caso en que n $\to +\infty$. Las propiedades relativas al orden y equivalencia de funciones en general, son aplicables al caso del límite de sucesiones.

Ejemplo: $Lím \dfrac{2.n^2 - 5.n + 8}{n^2 + 3.n - 2} = lím \dfrac{2.n^2}{n^2} = 2$, donde no se anota n $\to +\infty$, porque está sobreentendido.

***Infinitésimos***

Definición: Se dice que una función f es un *infinitésimo* cuando x $\to +\infty$ si se cumple que: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

También entre los infinitésimos los hay más lentos y más rápidos, pero la lentitud o rapidez refiere a la velocidad con que se acercan a 0. Por ejemplo, $1/x^2$ tiende a cero más rápido que 1/x. También se puede establecer reglas sobre el *orden* de los infinitésimos. Cuando x $\to +\infty$:

Ord (infinitésimo potencial) < Ord (infinitésimo exponencial)

Por ejemplo: $ord(x^{-1/2}) < ord(1/x) < ord(1/x^2) < ord(1/x^3) < ord(e^{-x})$.

También se pueden definir infinitésimos cuando x $\to$ 0. Son ejemplos de infinitésimos en este caso: $\sqrt{|x|}$, x, $x^2$, $x^3$, $1 - e^x$, L(1+x), pues todos ellos tienden a cero cuando x $\to$ 0. En el caso de los potenciales, el orden crece con el exponente.

La equivalencia se define en los mismos términos que la equivalencia de infinitos. Pero en el caso de la suma de infinitésimos de distinto orden, la suma es equivalente al de menor orden (obsérvese la diferencia con la propiedad en infinitos), y esto es así, porque el más *lento* enlentece la suma. Se puede demostrar que los infinitésimos $(1 - e^x)$ y L(1+x) son equivalentes del infinitésimo x, cuando x $\to$ 0.

***Los "límites tipo"***

Como consecuencia de la última propiedad enunciada más arriba, y de otras propiedades, se tienen los siguientes resultados "tipo".

$$a)\ Lím \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \quad cuando\ x \to +\infty$$

$$b)\ Lím\ (1 + x)^{1/x} = e \quad cuando\ x \to 0^+$$

$$c)\ Lím \frac{L(1+x)}{x} = 1 \quad cuando\ x \to 0$$

$$d)\ Lím \frac{e^x - 1}{x} = 1 \quad cuando\ x \to 0$$

$$e)\ Lím \frac{sen\,x}{x} = 1 \quad cuando\ x \to 0$$

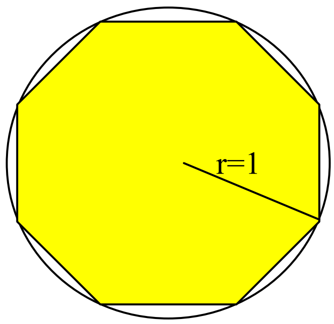
Ejemplo:

$$\underset{x \to 0}{Lím} \frac{x^2 + 2.L(1 + x^2)}{x^3 - x^2} = lím \frac{2.L(1 + x^2)}{-x^2} = lím \frac{2.x^2}{-x^2} = -2$$

Los argumentos para resolver este ejemplo son la equivalencia de la suma de infinitos (por ejemplo, $x^3 - x^2 \sim -x^2$) y una propiedad que permite extender los resultados de los límites tipo cuando $x \to 0$ sustituyendo al infinitésimo "x" por otro infinitésimo. En este ejemplo, dado que $L(1 + x) \sim x$, la aplicación de la propiedad permite afirmar que $L(1 + x^2) \sim x^2$.

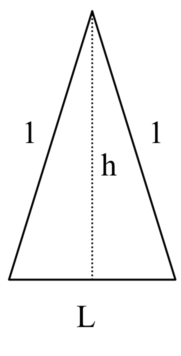
El último de los límites tipo no será utilizado en el curso porque hemos optado por dejar de lado las funciones trigonométricas. Sin embargo, por su valor didáctico, lo habremos de aplicar en el siguiente ejemplo[17].

Considérese un polígono regular inscrito en una circunferencia de radio 1.



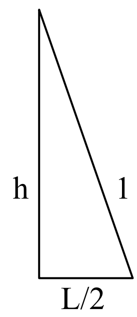

Nos interesa calcular el área del polígono inscrito y observar lo que ocurre cuando aumenta el número de lados. Es intuitivo que el área aumenta a medida que aumenta el número de lados del polígono. ¿Qué ocurre con el área del polígono si hacemos tender a $+\infty$ el número de lados? El límite del área de los polígonos, cuando el número de lados tiende a $+\infty$, debería coincidir con el área del círculo, $\pi.r^2$, $\pi$ en este caso. Vamos a demostrarlo.

Supongamos que el polígono tiene n lados, y que la medida del lado es L. El polígono no es otra cosa que la unión de n triángulos de la forma:



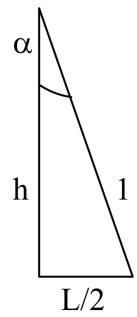

[17] Este ejemplo puede ser omitido en una primera lectura.

El área del triángulo se puede expresar en función de su altura (h) y de la base. A su vez, podemos calcular la altura del triángulo en función de L. La mitad del triángulo tiene un ángulo recto y, por tanto, se puede aplicar el teorema de Pitágoras.




Por Pitágoras: $h^2 + (L/2)^2 = 1^2$. Entonces: $h^2 + L^2/4 = 1$. Entonces: $h = \sqrt{1 - L^2/4}$. Resulta que el área del medio triángulo es: $(L/2 * \sqrt{1 - L^2/4})/2$, el área del triángulo es $L/2 * \sqrt{1 - L^2/4}$ y el área del polígono es $n * L/2 * \sqrt{1 - L^2/4}$.

¿Existe alguna relación entre n y L? Por ejemplo, sabemos que si el polígono inscrito es un hexágono (n = 6) el lado mide 1. Pero si n es un natural cualquiera, la relación entre n y L es un poco más complicada. Si hay n lados en el polígono, entonces hay n triángulos cuyo ángulo al centro mide 360º/n o lo que es lo mismo en radianes, $2.\pi/n$. Por tanto, el medio triángulo tiene ángulo al centro $\alpha = \pi/n$.




Por definición: sen $\alpha$ = $\dfrac{\textit{cateto opuesto}}{\textit{hipotenusa}} = \dfrac{L/2}{1} = \dfrac{L}{2} \Rightarrow sen\left(\dfrac{\pi}{n}\right) = \dfrac{L}{2} \Rightarrow L = 2.sen\left(\dfrac{\pi}{n}\right)$. Esta es la relación entre L y n. Ahora podemos expresar el área del polígono exclusivamente en función de n.

Área del polígono =

$$n * \frac{2.sen\left(\frac{\pi}{n}\right)}{2} * \sqrt{1 - \frac{\left[2.sen\frac{\pi}{n}\right]^2}{4}} = n * sen\frac{\pi}{n} * \sqrt{1 - sen^2\left(\frac{\pi}{n}\right)} = n * sen\left(\frac{\pi}{n}\right) * \cos\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

¿Qué ocurre con el área del polígono cuando $n \to +\infty$? Ocurre que $\pi/n$ tiende a 0, también $sen(\pi/n)$ tiende a 0, $\cos(\pi/n)$ tiende a 1, y por límites tipo se cumple que:

$$\underset{\frac{\pi}{n}\to 0}{Lím}\ \frac{sen\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\frac{\pi}{n}} = 1$$

Por tanto:

$$\underset{\frac{\pi}{n}\to 0}{Lím}\ \frac{n}{\pi} * sen\left(\frac{\pi}{n}\right) = 1$$

En consecuencia:

$$\underset{\frac{\pi}{n}\to 0}{Lím}\ n * sen\left(\frac{\pi}{n}\right) = \pi$$

Y finalmente: Lím $n * sen\left(\frac{\pi}{n}\right) * \cos\left(\frac{\pi}{n}\right) = \pi$, que era lo que queríamos probar.

***Continuidad***

Recordamos que entre los ejemplos iniciales de esta sección nos interesó identificar aquellos casos en que *el gráfico de la función se puede dibujar sin levantar el lápiz al pasar por x=a*. Ahora vamos a centrar nuestro interés en este concepto.

Definición: Se dice que f es una *función continua en el punto x=a* si se cumple que **lím f(x) = f(a).**
**x → a**

¿Qué tiene que ocurrir para que una función sea continua en el punto x=a? Tienen que ocurrir tres cosas: primero, que exista el límite de la función en el punto, segundo, el punto debe pertenecer al dominio de f, es decir, f(a) es un número, y en tercer lugar, deben coincidir el límite en el punto con el valor funcional.

Por tanto, una función no es continua en el punto x=a si el punto no pertenece al dominio de la función, si no existe el límite de la función en el punto, por ejemplo, porque los límites laterales son diferentes o porque no existe uno de los límites laterales. Cuando una función no es continua en un punto, se dice que es *discontinua.*

Indicar en cuáles de los ejemplos del inicio de esta sección, la función f es discontinua.

| Marcarlos con una cruz. | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | | | | |

Definición: Se dice que f es una *función continua en el punto* $x=a^-$ si se cumple que $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = f(a)$. En tal caso se dice que la función f es continua lateralmente por izq.

Definición: Se dice que f es una *función continua en el punto* $x=a^+$ si se cumple que $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = f(a)$. En tal caso se dice que la función f es continua lateralmente por der.

Revisando las definiciones se deduce que si una función es continua también es continua lateralmente por izquierda y por derecha. También puede asegurarse el recíproco: si una función es lateralmente continua en un punto por izquierda y por derecha, entonces es continua en el punto. También se puede hablar de *discontinuidad lateral*.

Indicar en cuáles de los ejemplos del inicio de esta sección, la función f es continua por izquierda.

| Marcarlos con una cruz. | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | | | | |

Indicar en cuáles de los ejemplos del inicio de esta sección, la función f es continua por derecha.

| Marcarlos con una cruz. | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | | | | |

Cuando en un punto los límites laterales de la función son iguales y finitos, pero no coinciden con el valor funcional o éste no está definido, se dice que la discontinuidad en el punto es *evitable*.

Indicar en cuáles de los ejemplos del inicio de esta sección, la función f presenta una discontinuidad evitable.

| Marcarlos con una cruz. | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | | | | |

Cuando en un punto los límites laterales de la función son finitos y diferentes, se dice que la función presenta en el punto una discontinuidad con *salto finito*.

Indicar en cuáles de los ejemplos del inicio de esta sección, la función f presenta una discontinuidad con salto finito.

| Marcarlos con una cruz. | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | | | | |

Cuando en un punto uno de los límites laterales de la función es infinito, se dice que la función presenta una discontinuidad con *salto infinito*.

Indicar en cuáles de los ejemplos del inicio de esta sección, la función f presenta una discontinuidad con salto infinito.

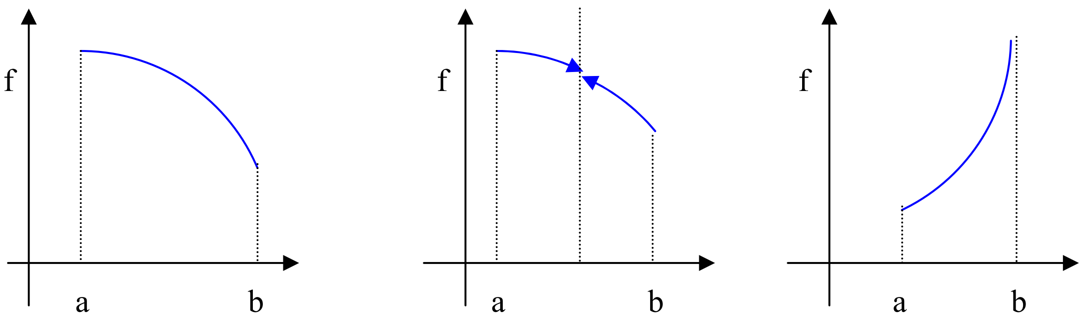
| Marcarlos con una cruz. | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | | | | |

Definición: Se dice que f es una *función continua en el intervalo (a, b)* si es continua en cada punto del intervalo abierto (a, b).

Definición: Se dice que f es una *función continua en el intervalo cerrado [a, b]* si es continua en cada punto del intervalo abierto (a, b), es continua en x=a por derecha y es continua en x=b por izquierda.

Entonces, una función es continua en un intervalo cerrado si el gráfico de la función en dicho intervalo se dibuja sin levantar el lápiz.

(I) (II) (III)




(I) f es continua en (a, b) y en [a, b].
(II) f es discontinua en (a, b) y en [a, b].
(III) f es continua en (a, b) pero es discontinua en [a, b].

¿Qué ocurre con la propiedad de continuidad en un intervalo abierto o cerrado cuando se opera con funciones? La propiedad de continuidad se extiende sin dificultad a la suma, resta y multiplicación de funciones. En el caso de la división, radicación y logaritmación se presentan algunas dificultades. En el siguiente cuadro se presentan los resultados más importantes. Donde aparece la expresión “intervalo cerrado” puede sustituirse por “intervalo abierto” y la propiedad enunciada sigue siendo válida.

| **Sean f y g dos funciones continuas en el intervalo [a, b]. Entonces:** |
|---|
| a) La suma (f + g) es una función continua en el intervalo [a, b]. |
| b) La resta (f - g) es una función continua en el intervalo [a, b]. |
| c) La multiplicación (f * g) es una función continua en el intervalo [a, b]. |
| d) El cociente (f / g) es una función continua en el intervalo [a, b] si $g(x) \neq 0$ en [a, b]. |
| e) Las funciones $e^f$ y $e^g$ son funciones continuas en el intervalo [a, b]. |
| f) La función $\sqrt{f}$ es una función continua en el intervalo [a, b] si $f(x) \geq 0$ en [a, b]. |
| g) La función L(f) es una función continua en el intervalo [a, b] si $f(x) > 0$ en [a, b]. |

Definición: Máximo (o máximo absoluto) de una función en un intervalo [a, b*] es el mayor valor que toma la función al recorrer  x  todos los valores del intervalo. Se llama* punto de máximo *al valor de x  donde  f  presenta un máximo absoluto.*

Definición: *Mínimo* (*o mínimo absoluto*) *de una función en un intervalo [a, b]* es el menor valor que toma la función al recorrer  x  todos los valores del intervalo. Se llama *punto de mínimo* al valor de x  donde  f  presenta un mínimo absoluto.

Dada una función en un intervalo cerrado, ¿siempre existen el mínimo y el máximo? La respuesta es negativa. Sin embargo, si la función es continua en dicho intervalo, la respuesta es afirmativa, y este importante resultado es el que se enuncia a continuación.

Teorema de Weierstrass: Toda función continua en un intervalo cerrado tiene mínimo y máximo absolutos (el teorema no es cierto si el intervalo es abierto, como lo prueba el ejemplo III).

Que el gráfico de una función continua en un intervalo cerrado se puede dibujar sin levantar el lápiz es otra forma de enunciar el siguiente teorema.

Teorema de Darboux: Si una función es continua en un intervalo cerrado, entonces la función toma, por lo menos una vez, todos los valores comprendidos entre el mínimo y el máximo absolutos.

Este teorema proporciona un método para aproximar raíces reales en el caso de funciones continuas. Por ejemplo, la función polinómica  $P(x) = x^4 - 3.x + 1$ toma los valores  $P(1) = -1$  y  $P(2) = +11$. Como los polinomios son funciones continuas para todo x real, P es también una función continua en el intervalo [1, 2]. Más adelante demostraremos que P es una función que crece en el intervalo [1, 2]. En consecuencia, en x=1 la función presenta el mínimo absoluto (-1) y en x=2 presenta el máximo absoluto (+11), y por el Teorema de Darboux la función pasa por todos los valores intermedios entre -1 y +11. En particular, la función toma, en algún punto del intervalo, el valor 0. Por tanto, en el intervalo [1, 2] el polinomio tiene una raíz. El Teorema no asegura que haya una sola raíz en el intervalo, afirma que hay por lo menos una.

# Repartido Práctico 11.1: Límites de funciones

**Ejercicio 1**

Calcular los siguientes límites de funciones.

1. $\lim_{x \to -1} (3.x^2 + 2.x + 1)$
2. $\lim_{x \to 2} 5^x$
3. $\lim_{x \to 2} \frac{x+1}{x-1}$
4. $\lim_{x \to -1} (x + 3).e^{x+2}$
5. $\lim_{x \to 1} x^2 - x + Lx$
6. $\lim_{x \to 4} \text{Raíz}(x)$
7. $\lim_{x \to 0} \text{Raíz}(x)$
8. $\lim_{x \to 0^+} \text{Raíz}(x)$
9. $\lim_{x \to 0^+} 1/x$
10. $\lim_{x \to 0^-} 1/x$
11. $\lim_{x \to 0} 1/x$
12. $\lim_{x \to 2^+} \frac{x+1}{x-2}$
13. $\lim_{x \to 2} \frac{x^2-1}{x-2}$
14. $\lim_{x \to -2} (x^2 + 4.x + 4)/(x + 2)$

## Repartido Práctico 11.1: Límites de funciones

**Ejercicio 1 (cont.)**

15. $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{2.x^2 + 2.x + 3}{x^2 - 2.x + 1}$

16. $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{x^2 + 3.x}{x + 5}$

17. $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{Lx}{x}$

18. $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{Lx}{x^2}$

19. $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{3^x}{x^2 + 1}$

20. $\lim_{x \to -\infty} \dfrac{3^x}{x^2 + 1}$

21. $\lim_{x \to -\infty} L(x^2 + 1)$

22. $\lim_{x \to -\infty} L(1 + 1/x^2)$

23. $\lim_{x \to +\infty} x - 4/x$

24. $\lim_{x \to -\infty} x - 4/x$

25. $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x+1}}$

26. $\lim_{x \to +\infty} (x + 1/x)^x$

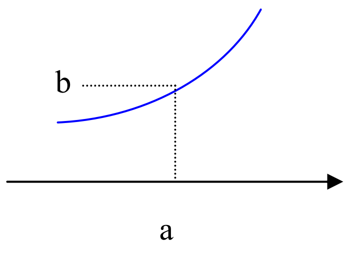
27. $\lim_{x \to 0} \dfrac{L(1+x)}{x}$

## Repartido Práctico 11.1: Límites de funciones

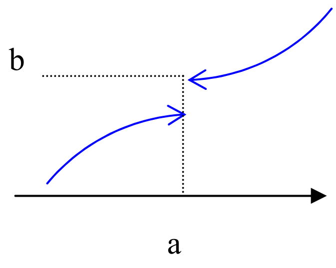
### Ejercicio 2

En cada uno de los gráficos que siguen indicar si existe el límite de la función cuando $x \to a$, cuando cuando $x \to a^{+}$ y cuando $x \to a^{-}$, y en caso afirmativo, indicar su valor.

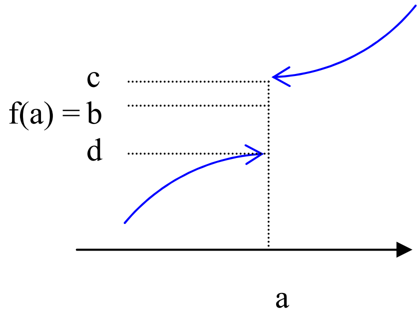
CASO 1



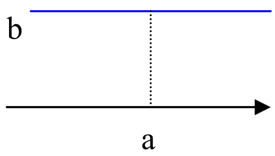

CASO 2



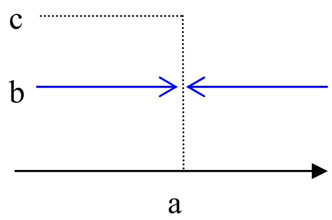

CASO 3



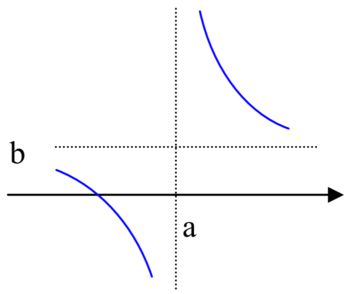

CASO 4



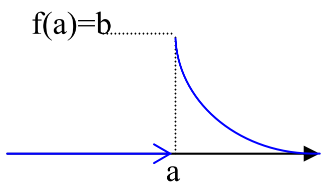

CASO 5



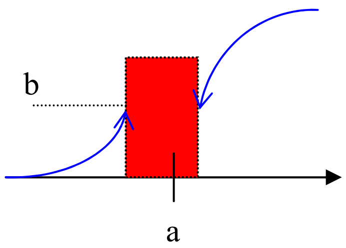

CASO 6



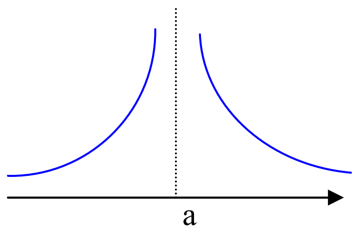

CASO 7



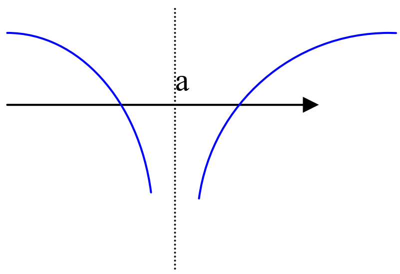

CASO 8



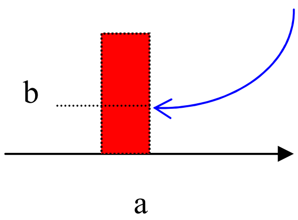

CASO 9



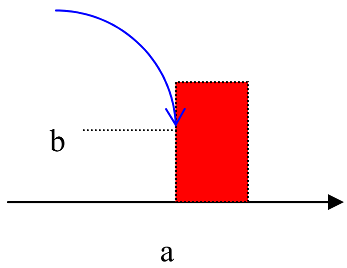

CASO 10




CASO 11




CASO 12



# Repartido Práctico 11.1: Límites de funciones

**Ejercicio 3**

**Calcular el límite, cuando n → +∞, de las siguientes sucesiones.**

1. $f(n) = 1 + \dfrac{1}{n}$
2. $f(n) = \dfrac{n^2 - 1}{n^2 + 1}$
3. $f(n) = n^2 - n$
4. $f(n) = n^2 - n.Ln$
5. $f(n) = n.e^{-n}$
6. $f(n) = n - \sqrt{n}$
7. $f(n) = \sqrt[3]{n} - \sqrt{n}$
8. $f(n) = L(n^2 - 5n + 1) - L(n^2 + 4n + 1)$
9. $f(n) = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$
10. $f(n) = \left(1 + \dfrac{2}{n}\right)^{2n+1}$

# Repartido Práctico 11.2: Continuidad de Funciones

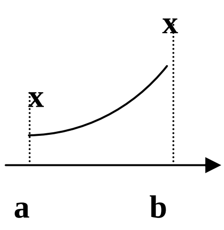
**Ejercicio 1**

Con relación a los 12 casos del Ejercicio 2 del Repartido 12 de Límites, estudiar la continuidad y la continuidad lateral de la función del gráfico en x = a.

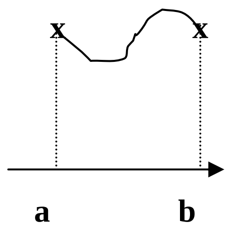
**Ejercicio 2**

Estudiar la continuidad de la función del gráfico en los intervalos (a, b) y [a, b] en cada uno de los siguientes casos.

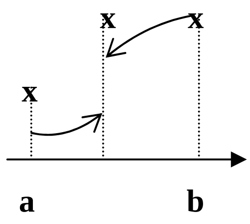
**CASO A**



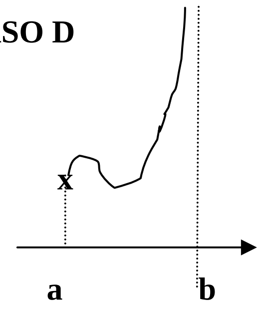

**CASO B**



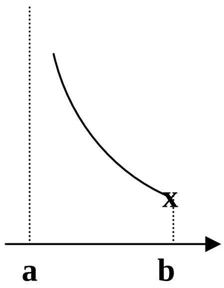

**CASO C**



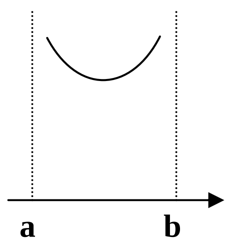

**CASO D**



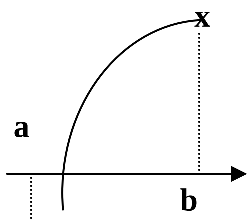

**CASO E**



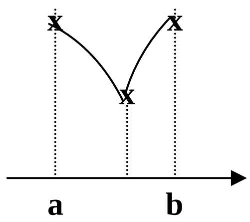

**CASO F**



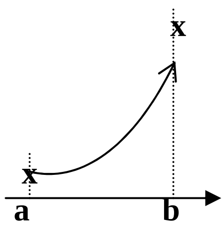

**CASO G**



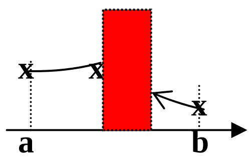

**CASO H**



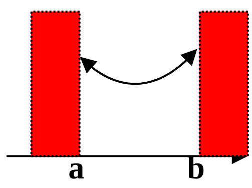

**CASO I**



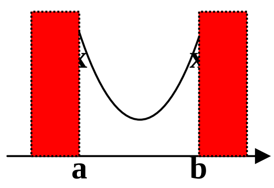

**CASO J**




**CASO K**




**CASO L**



# Repartido Práctico 11.2: Continuidad de Funciones

**Ejercicio 3**

Estudiar la continuidad y la continuidad lateral en todo el dominio de las funciones elementales: $x$, $x^2$, $\sqrt{x}$, $e^x$, $Lx$.

**Ejercicio 4**

Estudiar para todo x real la continuidad de las siguientes funciones.

a) $f(x) = x^2 - 4$

b) $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x+2}$

c) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x+2} & si\ x \neq -2 \\ -4 & si\ x = -2 \end{cases}$

d) $f(x) = \sqrt{x^2-4}$

e) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x-1}{x-3}}$

f) $f(x) = L(x^2 - 4)$

**Ejercicio 5**

**Estudiar la continuidad de las funciones que siguen en el intervalo [1, 2].**

a) $f(x) = x^2 - 9$

b) $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x+2}$

c) $f(x) = \sqrt{9-x^2}$

d) $f(x) = L(4 - x^2)$

# FACULTAD DE CIENCIAS SOCIALES
# DEPARTAMENTO DE ECONOMÍA


## DIPLOMA EN ECONOMÍA PARA NO ECONOMISTAS

## ASIGNATURA: MATEMÁTICA APLICADA A LA ECONOMÍA

## MATERIAL DE CONSULTA Y CASOS PRÁCTICOS

**CURSO 2004**
**PARTE VI**

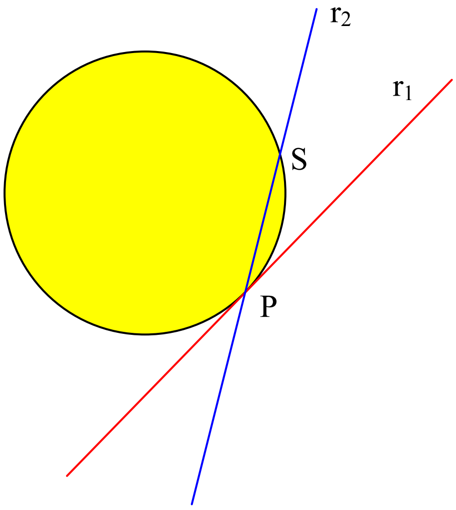

**Profesor: David Glejberman**

## 12. DERIVACIÓN Y DIFERENCIACIÓN. INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DE LA DERIVADA. REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE FUNCIONES. MONOTONÍA, EXTREMOS Y CONCAVIDADES.

En esta sección se introducen dos conceptos claves para el estudio de las funciones: *derivada de una función en un punto* y *función derivada*.

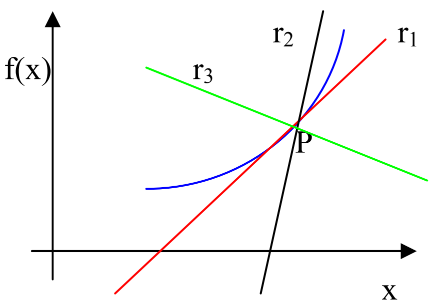
Optamos por introducir el primer concepto apelando a la interpretación geométrica, para luego presentar la definición analítica.

¿Qué es la tangente a una curva en un punto? Si la curva es una circunferencia, entonces la tangente a la circunferencia en un punto es la única recta que pasa por ese punto y toca a la circunferencia sólo en ese punto.

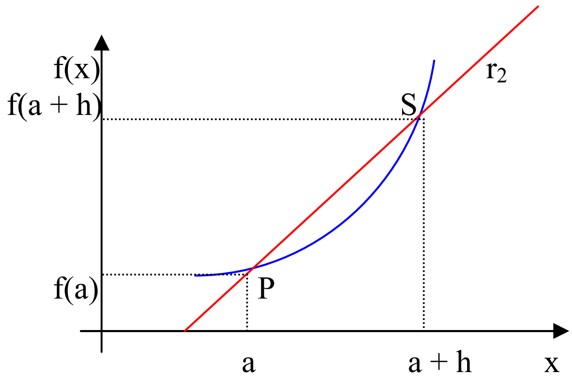



$r_2$ no es tangente a la circunferencia en P, porque la corta en dos puntos (P y S). $r_2$ es una *cuerda* de la circunferencia. $r_1$ es la tangente en P. ¿Qué sucede si el punto S se mueve en la dirección de P, y éste permanece fijo? A medida que S se acerca a P, la recta $r_2$ se acerca a la posición de $r_1$, de tal forma que cuando S coincide con P, entonces $r_2$ se superpone con $r_1$.

Consideremos ahora el gráfico de una función (la circunferencia no es el gráfico de ninguna función).




Por el punto P pasan muchas rectas que cortan el gráfico de la función en un solo punto. Estamos interesados en encontrar una recta que corte al gráfico en P pero que, además, "se parezca" al gráfico en las vecindades de P tanto como sea posible. Tal recta es, en la figura, $r_1$. Para encontrar la fórmula analítica de $r_1$ vamos a considerar una cuerda de la curva que pase por P (tal como hicimos en el caso de la circunferencia).




Las coordenadas de los puntos son P = (a, f(a)) y S = (a + h, f(a + h)) donde "h" es una variable que no depende de *a* (el punto P está fijo y por tanto *a* es también un número fijo). La diferencia entre las abcisas de los dos puntos es h = (a + h) – a y esta diferencia en las abcisas origina una diferencia de ordenadas f(a + h) – f(a). En el gráfico de la figura se ha tomado h > 0, pero h puede ser negativa si se elige el punto S a la izquierda del punto P.

Hagamos tender el punto S hacia el punto P, con lo que la recta $r_2$ tenderá hacia la posición de la tangente a la curva en el punto P. Se observa que para que S tienda a P alcanza con que $h \to 0$.

¿Cuál es la ecuación de la recta $r_2$? Es la ecuación de la recta que pasa por dos puntos:

Ecuación de $r_2$: $$y = \frac{f(a+h) - f(a)}{(a+h) - a} * (x - a) + f(a)$$

Cuando $h \to 0$, $r_2$ tiende a la posición de la tangente a la curva por P:

Ecuación de la tangente a la curva en P: $$y = [\underset{h \to 0}{Lím} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} + *(x - a) + f(a)]$$

Entonces, la expresión $Lím \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ cuando $h \to 0$ es el coeficiente angular de la recta tangente a la curva f en el punto P.

<u>Definición</u>: Se llama *derivada en el punto x=a de la función f*, y se anota f '(a), al resultado de la expresión $\underset{h \to 0}{Lím} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$.

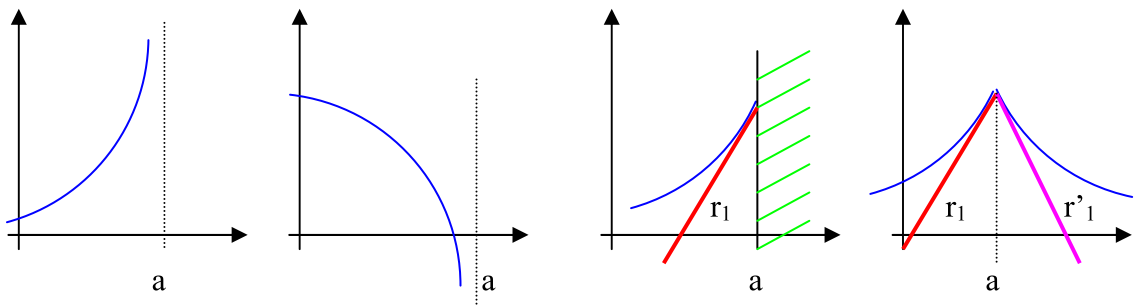
*Observaciones*

1. No siempre existe la derivada de la función en un punto. Ello depende de la existencia del límite que define f '(a).

2. Si existe f '(a), entonces f '(a) es el coeficiente angular de la recta tangente a la curva f en el punto de abcisa x=a. En tal caso, la ecuación de la tangente se puede escribir así:

$$y = f'(a)*(x - a) + f(a).$$

3. La expresión $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ es un cociente (denominado *cociente incremental*) cuyo denominador es un infinitésimo cuando $h \to 0$. Entonces, para que el límite de dicha expresión sea un número finito, el numerador también tiene que ser un infinitésimo del mismo orden que h o de orden superior. Entonces, Lím [f(a + h) – f(a)] = 0 cuando $h \to 0$ que es lo mismo que afirmar que Lím f(x) = f(a) cuando $x \to a$, que es la definición de función continua en el punto x=a. En otras palabras, para que exista y sea finita la derivada de la función en un punto, es condición necesaria que la función sea continua en dicho punto.
4. Cuando $\underset{h \to 0}{Lím} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} = \infty$, la interpretación geométrica es que en el punto de abcisa x=a no hay tangente a la curva y el gráfico tiende a comportarse como la recta x = a.
5. Cuando el límite de la expresión no existe, entonces la curva no tiene una tangente en el punto x=a. Sin embargo, bien podrían existir los límites laterales cuando $h \to 0^+$ y cuando $h \to 0^-$. En este caso la curva tiene tangentes laterales diferentes a izquierda y derecha del punto x=a.




$$\underset{h \to 0}{Lím} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} =$$

| | | | |
|---|---|---|---|
| $+\infty$ | $-\infty$ | $f'(a^-)$ si $h \to 0^-$<br>f '(a) no existe | $f'(a^-) \neq f'(a^+)$<br>f '(a) no existe |

*Tangente*

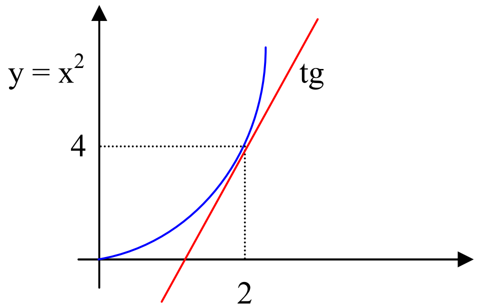
| | | | |
|---|---|---|---|
| x = a | x = a | tg en $a^-$) $r_1$ | tg laterales: $r_1$ y $r_2$ |

Cuando existen y son finitos los $Lím \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ cuando $h \to 0^+$ y $h \to 0^-$, se dice que f tiene en x=a *derivadas laterales*. Una condición necesaria para la existencia de f '(a) es que existan $f'(a^-)$ y $f'(a^+)$ y que sean iguales. Cuando $f'(a^-)$ y $f'(a^+)$ existen, son finitos y distintos, se dice que la curva f presenta en x=a un *punto anguloso*.

Ejemplo: Considérese la función f:f(x) = $x^2$. Se quiere calcular, si existe, f '(2).

$$f'(2) = \lim_{h \to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(2+h)^2 - 2^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h^2 + 4.h}{h} = \lim_{h \to 0} (h+4) = 4.$$

Entonces f '(2) = 4. ¿Cuál es la interpretación geométrica de este resultado? La tangente a la curva $y = x^2$ en el punto x=2 tiene coeficiente angular igual a 4.




La tangente tiene coeficiente angular 4 y pasa por el punto (2, 4). Por tanto, la ecuación de la tangente a la curva en el punto x=2 es:

$$y = 4.x - 4$$

<u>Definición</u>: Se llama *derivada de la función f* (notación: f ' o bien $\frac{\partial f}{\partial x}$) a una función que a cada punto del dominio de f le hace corresponder el valor de la derivada en dicho punto.

$$f': x \to f'(x)$$

Ejemplo: Considérese la función $f{:}f(x) = x^2$. Se quiere calcular f '(x).

$$f'(2) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h^2 + 2.x.h}{h} = \lim_{h \to 0} (h + 2.x) = 2.x.$$

Con el mismo argumento se puede demostrar que si $f(x) = x^3$, entonces $f'(x) = 3.x^2$ y más en general, que si $f(x) = x^m$, entonces $f'(x) = m.x^{m-1}$.

Ya sabemos derivar un monomio. ¿Cómo se hace para obtener la derivada de una función polinómica? Necesitamos saber cómo se obtiene la derivada de una suma de funciones y la derivada del producto de una función por una constante. Para hallar la derivada de funciones cualesquiera, se pueden aplicar los siguientes métodos:

| |
|---|
| I) Utilizando la definición de función derivada, mediante límites. Así se obtienen las derivadas de las funciones elementales que aparecen en la tabla más abajo. |
| II) Utilizando una "tabla de derivadas" |
| III) Utilizando las reglas de derivación para operaciones con funciones y para funciones compuestas. |

## Reglas para la derivación

Derivada de una suma de funciones: $[f(x)+g(x)]' = f'(x)+g'(x)$

Derivada de una resta de funciones: $[f(x)-g(x)]' = f'(x)-g'(x)$

Derivada de una constante por una función: [K.f(x)]’ = K.f ’(x)

Derivada de un producto de funciones: $[f(x).g(x)]' = f'(x).g(x)+f(x).g'(x)$

Derivada de un cociente de funciones: $\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]' = \dfrac{f'(x).g(x)-f(x).g'(x)}{g^2(x)}$

Derivada de un logaritmo neperiano: $[Lf(x)]' = \dfrac{f'(x)}{(x)}$

Derivada de una exponencial de base e: $\left[e^{f(x)}\right]' = e^{f(x)}.f'(x)$

Derivada de una raíz cuadrada: $\left[\sqrt{f(x)}\right]' = \dfrac{f'(x)}{2.\sqrt{f(x)}}$

Derivada de una función de función: $\{f[g(x)]\}' = f'[g(x)].g'(x)$

Derivada de la derivada = Derivada segunda = f ”(x) = [f ’(x)] ’

# Tabla de derivadas elementales

| **f(x)** | **f ’(x)** |
|---|---|
| **K** | 0 |
| x | 1 |
| $x^2$ | $2.x$ |
| $x^3$ | $3.x^2$ |
| $x^m$ | $m.x^{m-1}$ |
| 1/x | $-1/x^2$ |
| $\sqrt{x}$ | $\dfrac{1}{2.\sqrt{x}}$ |
| $e^x$ | $e^x$ |
| $a^x$ | $a^x.La$ |
| Lx | 1/x |
| L\|x\| | 1/x |

Aplicando las tres primeras reglas y la fórmula para la derivada de $x^m$ se puede calcular la derivada de cualquier función polinómica. Las dos primeras reglas establecen que la derivada de una suma es la suma de las derivadas, y que la derivada de una resta es la resta de las derivadas. El producto y la división de funciones no tienen esta sencilla propiedad.

Aunque resulte obvio, para que exista la derivada de una suma (de una resta o de un producto) deben existir las derivadas de los sumandos (del minuendo y el sustraendo o de los factores, respectivamente). En el caso de la derivada de un cociente o de una función compuesta, es necesario imponer condiciones adicionales a la derivabilidad de numerador y denominador o de las funciones que intervienen en la composición.

Ejemplo: Hallar la derivada de la función polinómica $P(x) = 3.x^4 + 2.x^3 - ½.x^2 + 8$

$$P\,'(x) = 3.(4.x^3) + 2.(3.x^2) - ½.(2.x) + 0 = 12.x^3 + 6.x^2 - x$$

¿Qué es la derivada segunda de una función? Es la derivada de la función derivada. Notación: $f\,''(x) = [f\,'(x)]'$.

Ejemplo:
$$P(x) = 3.x^4 + 2.x^3 - ½.x^2 + 8$$
$$P\,'(x) = 12.x^3 + 6.x^2 - x$$
$$P\,''(x) = 12.(3.x^2) + 6.(2.x) - 1 = 36.x^2 + 12.x - 1$$

***Aplicación de las derivadas para el estudio gráfico de funciones***

En el estudio analítico y representación gráfica de funciones interesa conocer:
- el dominio de existencia de la función
- la continuidad de la función
- las raíces de la función, es decir, el conjunto solución de la ecuación $f(x) = 0$
- los límites laterales en los puntos donde hay discontinuidad
- el comportamiento (asintótico o no) de la función cuando $x \to \pm \infty$
- los intervalos de monotonía de la función (intervalos donde f crece o decrece)
- la existencia de extremos relativos (máximos y mínimos relativos)
- la existencia de extremos absolutos
- la forma de la curva en cada intervalo: concavidad y convexidad
- la existencia de puntos de inflexión
- la existencia de puntos donde no existe la tangente a la curva.

En Economía las variables más usuales son no negativas[18] (por ejemplo, precios y cantidades). Entonces, buena parte de los problemas a estudiar tienen la restricción $x \geq 0$, es decir, el dominio de la función incluye sólo valores no negativos y el gráfico se concentra en un semiplano, y muchas veces, en el primer cuadrante del par de ejes cartesianos ortogonales. Además, los precios y las cantidades no pueden crecer indefinidamente, por lo que en Economía el lím f(x) cuando $x \to +\infty$ presenta poco interés. Los problemas en los que nos vamos a concentrar principalmente son: identificar

[18] Excepciones a esta regla son las variables que miden la utilidad monetaria en las empresas o las que miden variaciones periódicas.

intervalos de monotonía y estudiar la eventual existencia de extremos, relativos y absolutos. Para resolver estos problemas, el concepto de función derivada resulta muy útil.

***Monotonía***

Si para todo $x_1$ y $x_2$, $x_1 < x_2$, pertenecientes al intervalo [a, b] es:

- $f(x_1) \leq f(x_2)$, entonces f es *creciente en sentido amplio* en [a, b]
- $f(x_1) < f(x_2)$, entonces f es *estrictamente creciente* en [a, b]
- $f(x_1) \geq f(x_2)$, entonces f es *decreciente en sentido amplio* en [a, b]
- $f(x_1) > f(x_2)$, entonces f es *estrictamente decreciente* en [a, b]

Una función es *monótona (creciente o decreciente)* en un intervalo cuando cumple con alguna de las cuatro definiciones anteriores. En el primer caso, por ejemplo, se dice que f es *monótona creciente en sentido amplio.*

**Extremos absolutos**

Máximo (o máximo absoluto) *de una función en un intervalo [a, b] es el mayor valor que toma la función al recorrer x todos los valores del intervalo. Se llama punto de máximo al valor de x donde f presenta un máximo absoluto.*

*Mínimo* (*o mínimo absoluto*) de una función en un intervalo [a, b] es el menor valor que toma la función al recorrer x todos los valores del intervalo. Se llama *punto de mínimo* al valor de x donde f presenta un mínimo absoluto.

***Extremos relativos***

La función f presenta un *máximo relativo (en sentido amplio)* en $x = a$ si existe un entorno de a de radio $\delta$, tal que para todo x perteneciente a la intersección del entorno con el D(f) es $f(x) \leq f(a)$.

La función f presenta un *máximo relativo (en sentido estricto)* en $x = a$ si existe un entorno de a de radio $\delta$, tal que para todo x perteneciente a la intersección del entorno con el D(f), $x \neq a$, es $f(x) < f(a)$.

La función f presenta un *mínimo relativo (en sentido amplio)* en $x = a$ si existe un entorno de a de radio $\delta$, tal que para todo x perteneciente a la intersección del entorno con el D(f) es $f(x) \geq f(a)$.

La función f presenta un *mínimo relativo (en sentido estricto)* en $x = a$ si existe un entorno de a de radio $\delta$, tal que para todo x perteneciente a la intersección del entorno con el D(f), $x \neq a$, es $f(x) > f(a)$.

***Aplicación de las derivadas***

Vamos a suponer por un momento que en el intervalo donde interesa estudiar la función, [a, b] ó [a, +∞), existe la derivada en todo el dominio de la función. Entonces, se tienen los siguientes resultados:

- f es monótona creciente en un intervalo, si f ’ es positiva en dicho intervalo
- f es monótona decreciente en un intervalo, si f ’ es negativa en dicho intervalo

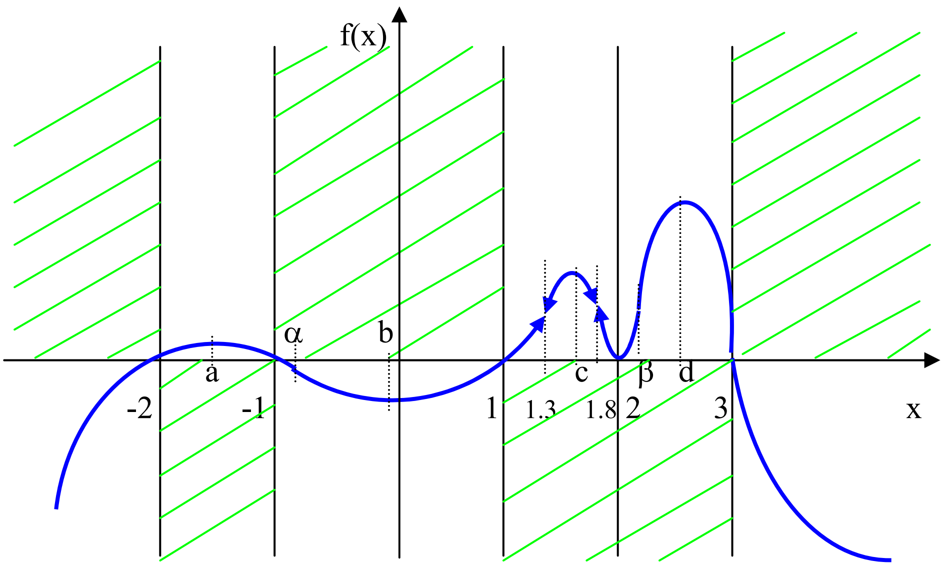
- f presenta un mínimo relativo en x=α, si se cumple que: f ’(α) = 0, el signo de f es negativo a la izquierda de α y positivo a la derecha de α.
- f presenta un máximo relativo en x=α, si se cumple que: f ’(α) = 0, el signo de f es positivo a la izquierda de α y negativo a la derecha de α.

En los dos últimos casos, la tangente a la curva es horizontal (pues su coeficiente angular es nulo).

- f presenta concavidad positiva o convexidad en un intervalo, si f ’’ es positiva en dicho intervalo
- f presenta concavidad negativa en un intervalo si f ’’ es negativa en dicho intervalo

Que una función presenta concavidad positiva en un punto significa que la tangente a la curva en dicho punto se dibuja por debajo del gráfico de la función. Que una función presenta concavidad negativa en un punto significa que la tangente a la curva en dicho punto se dibuja por encima del gráfico de la función.

Ejemplo:




La función del gráfico presenta tres máximos relativos, en los puntos x=a, x=c y x=d, y un mínimo relativo en x=b. La función es monótona creciente en los intervalos: (-∞, a), (b, 1.3), (1.3, c) y (2, d). La función es monótona decreciente en los intervalos: (a, b), (c, 1.8), (1.8, 2) y (d, +∞). De acuerdo con las definiciones dadas, la función presenta un máximo absoluto en x=d y no existe punto de mínimo absoluto. La función tiene concavidad negativa en los intervalos (-∞, α), (1.3, 1.8) y (β, 3) y presenta concavidad positiva o convexidad en los intervalos (α, 1.3), (1.8, β) y (3, +∞). Por tanto, a dicho gráfico le corresponden los siguientes esquemas de signo de f ’ y f ’’.

Sgn f ’    + + 0 - - - - - - 0 + + + ∄ + 0 - - ∄ - - 0 + + 0 - - - -

a   b   1.3   c   1.8   2   d

0   ∄   ∄   0   0

Sgn f ’’    - - - - - - |+ + + + + + + |- - - - - |+ + + +| - - - - |+ + + + + +

$$\alpha \quad 1.3 \quad 1.8 \quad \beta \quad 3$$

¿Por qué puede no existir la derivada de la función en un punto? Por varios motivos, entre los cuales podemos mencionar:

a) Porque el punto no pertenece al dominio de existencia de la función. Como f(a) interviene en la fórmula de f '(a), si no existe f(a) entonces tampoco existe f '(a).
b) Porque a la izquierda o a la derecha del punto no está definida la función. Es el caso, por ejemplo, de f(x) = $\sqrt{x}$, que no está definida a la izquierda de 0 y por tanto no existe f '(0).
c) Porque las derivadas laterales en el punto existen, son finitas, pero son diferentes. Es el caso de la función f(x) = |x| en el punto x = 0.

Ejemplo: Hallar el gráfico de la función f(x) = L(1 + $x^2$).

*Dominio de existencia*

El logaritmo está definido si el argumento es mayor que cero. Y (1 + $x^2$) es mayor que cero para todo x real. Entonces: D(f) = R.

*Ceros*

$L(1 + x^2) = 0 \Leftrightarrow 1 + x^2 = e^0 \Leftrightarrow 1 + x^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0.$

*Signo de f*

$L(1 + x^2) \geq 0 \Leftrightarrow 1 + x^2 \geq 1 \Leftrightarrow x^2 \geq 0$, lo cual se cumple $\forall$ x $\in$ R

0

Sgn f + + + + + + + + + + | + + + + + + +

0

*Límite de la función cuando $x \to \pm\infty$*

$$\lim_{x \to \pm\infty} L(1 + x^2) = +\infty$$

*Monotonía y extremos*

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}.(1+x^2)' = \frac{1}{1+x^2}.(2.x) = \frac{2.x}{1+x^2}$$

Sgn f ' 0

\- - - - - - - - - - - - | + + + + + + + f(0) = L1 = 0

0

f Decrece ↘ ↗ Crece

Mín

No hay máximos relativos ni absolutos. En x = 0 hay un mínimo relativo que es, además, punto de mínimo absoluto. El valor mínimo de la función es f(0) = 0.

*Concavidad*

$$f''(x) = \frac{2.(1+x^2) - 2.x.(2.x)}{(1+x^2)^2} = \frac{-2.(x^2-1)}{(1+x^2)^2}$$

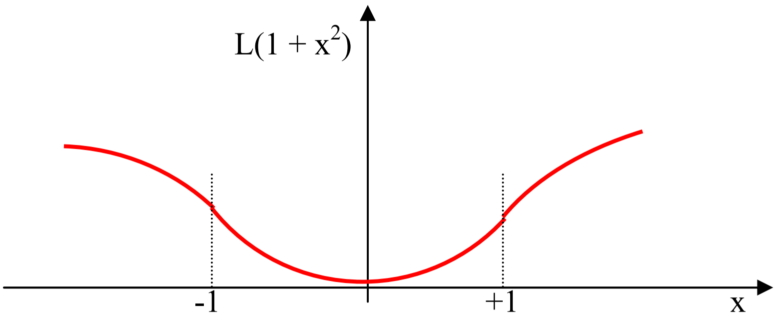
\- - - - - 0 + + + + + 0 - - - - - -

Sgn f '' ——|——|——→ f(1) = f(-1) = L(1 + 1) = L2

-1 +1

Concavidad de f : Negat. Positiva Negat.

Ahora estamos en condiciones de bosquejar el gráfico de f.




***Interpretación económica de la derivada***

Considérese una función de costos, C(q), que representa el *costo total* de producir q unidades de un único producto. El *costo medio* de la producción es $\frac{C(q)}{q}$. ¿Cuál es el incremento del costo al pasar a producir una unidad adicional a partir de q? Este concepto se denomina *incremento de costo* y es igual a C(q + 1) – C(q). Si las unidades de producto son divisibles –por ejemplo, porque el producto se mide en quilos, y es posible producir 2,3 quilos–, entonces se puede pensar en un incremento infinitesimal de la producción. Si dicho incremento se simboliza Δq, entonces se define el *costo marginal en q* como la derivada de la función del costo total en el punto q:

$$\text{Costo marginal en q: } C'(q) = \lim_{\Delta q \to 0} \frac{C(q+\Delta q) - C(q)}{\Delta q}$$

Si $\Delta q \approx 1$, entonces: $C'(q) \approx C(q + 1) - C(q)$ y el costo marginal se puede utilizar como aproximación del incremento de costo. El costo marginal puede interpretarse, entonces, como una aproximación de lo que cuesta producir una unidad más, por encima del nivel de producción q.

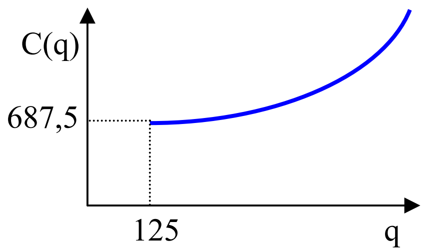
Ejemplo: Sea la función del costo total $C(q) = 1000 - 5.q + 0{,}02.q^2 \quad \forall\, q \geq 125$.

a) ¿Cómo se comporta la función de costos?

$C'(q) = -5 + 0{,}04.q$ Sgn 0 + + + + + (125, q)

$-5 + 0{,}04.q = 0$

El costo es creciente $\forall\, q \geq 125$.




b) Si se están produciendo 200 unidades, ¿cuál es el incremento del costo de producir una unidad más? ¿Cuál es el costo marginal en q = 200?

$C(201) – C(200) = [1000 – 5.(201) + 0{,}02.(201)^2] - [1000 – 5.(200) + 0{,}02.(200)^2] = 3{,}03$ = costo de producir una unidad adicional por encima de 200.

$C'(q) = -5 + 0{,}04.q \Rightarrow C'(200) = 3$, costo aproximado de producir una unidad adicional por encima de 200.

c) Definir la función de costo medio.

$$CM(q) = \frac{C(q)}{q} = \frac{1000 - 5.q + 0{,}02.q^2}{q} = 0{,}02.q - 5 + \frac{1000}{q}$$

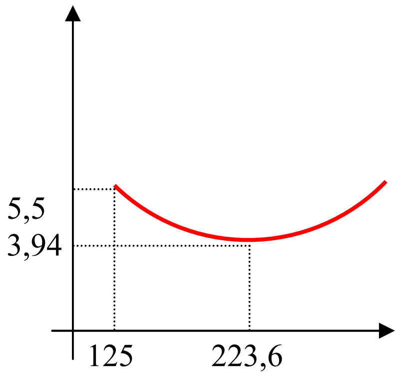
d) ¿Cómo se comporta la función de costo medio?

$CM(125) = 687{,}5/125 = 5{,}5$

$$CM'(q) = 0{,}02 – 1000/q^2 = \frac{q^2 - 50.000}{50.q^2}$$

Sgn CM'(q): entre 125 y 223,6: - - - - - ; en 223,6: 0 ; después de 223,6: + + +

CM(q) en el intervalo: Decrece Crece




$CM(223{,}6) = 3{,}94$

e) Costo medio mínimo

Si las unidades de producto se pueden fraccionar, entonces el mínimo costo medio se obtiene para un nivel de producción $q = 223{,}6$. Si las unidades de producto no se pueden fraccionar, entonces está claro por el gráfico que el mínimo costo medio se obtiene en un número entero próximo a 223, 6.

$$CM(223) = 3{,}94430$$
$$CM(224) = 3{,}94429$$

El costo medio mínimo se obtiene para un nivel de producción de 224 unidades.

Considérese ahora la función B(q) que mide el *beneficio total* de producir q unidades de producto. Entonces el *beneficio medio por unidad de producto* es B(q)/q y la derivada B'(q) es el *beneficio marginal* que mide aproximadamente el beneficio de producir una unidad adicional por encima de q unidades.

En Economía resulta relevante conocer de qué manera se ve afectada una variable por un cambio producido en otra variable relacionada. Si aumenta $1 el precio del kilo de pan, ¿cómo se verá afectada la demanda de pan?

Si la relación entre dos variables puede explicitarse mediante la fórmula y = f(x) donde f es una función derivable, y utilizamos la notación "Δx" para representar el cambio en el valor de la variable independiente, y "Δy" para notar la modificación en la y al pasar de x a x+Δx, entonces:

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$$

A veces la forma funcional de la f es complicada o resulta laborioso evaluar dicha función en el punto x+Δx. En tales casos se obtiene una buena aproximación de Δy mediante la introducción de un nuevo concepto.

<u>Definición</u>: dy = f '(x).Δx = Diferencial de y en el punto x.

Considérese el caso particular en que y = f(x) = x. Resulta f '(x) = 1. Entonces: dy = 1.Δx, pero como es y = x, también es dy = dx y resulta dx = Δx. Como es más usual la notación "dx" para la variación de la variable independiente, escribiremos:

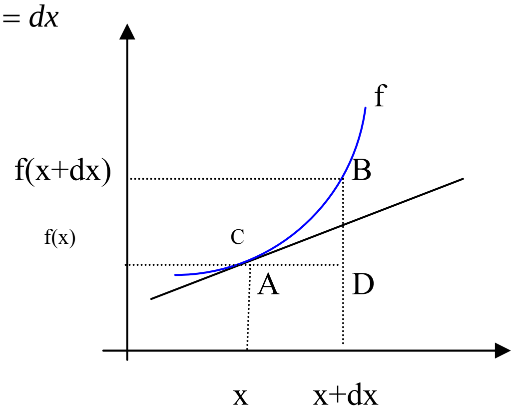
$$dy = f'(x).dx$$

y esta igualdad justifica una de las notaciones usuales de la función derivada:

$$\frac{dy}{dx} = f'(x).$$

*Observaciones*

2) **dy es una función de dos variables, dy = g(x,dx), donde x es la variable independiente de la función y = f(x), y dx es otra variable que indica el cambio producido o deseado en la variable x.**
3) Para hallar el diferencial de una función alcanza con saber derivar.
4) $\overline{BD} = f(x+\Delta x) - f(x) = \Delta y \qquad \overline{AD} = dx$




El cociente CD/AD es el coeficiente angular de la tangente a la curva f en el punto x, y por tanto, es igual a f '(x). Por tanto, CD/dx = f '(x), entonces CD = f '(x).dx y finalmente: CD = dy.

5) ¿Qué ocurre con dy y Δy cuando dx tiende a cero? Si la función f es derivable en el punto x, entonces dy y Δy tienden también a cero, son

infinitésimos. En otras palabras, dy es una aproximación de $\Delta y$ cuando dx tiende a cero. Este es el uso que haremos de dy en los siguientes dos ejemplos.

Ejemplo [1]: Sea $y = f(a) = a^3$

Interpretación geométrica: f es el volumen de un cubo de lado a. Se quiere saber aproximadamente cuánto se incrementa el volumen del cubo cuando el lado pasa de 5 dm a 5,01 dm.

La respuesta exacta es $\Delta y = 5{,}01^3 - 5^3 = 0{,}751501$. Una aproximación de $\Delta y$ puede obtenerse fácilmente con $dy = 3a^2.da = 3.5^2.0{,}01 = 75.0{,}01 = 0{,}75$. Obsérvese que en este caso la aproximación es muy buena (error de 1,5 por mil) y el resultado se obtiene mediante operaciones sencillas.

Ejemplo [2]: La proporción de lamparitas que fallan antes de un cierto tiempo t (en horas) puede estimarse mediante la función P:

$$P(t) = 1 - \left(\frac{100}{100+t}\right)^2 .$$

a) Hallar la proporción de lamparitas que fallan antes de las 100 horas.
b) Hallar aproximadamente la proporción de lamparitas que fallan antes de las 99 horas.

a) El cálculo es elemental: $1 - (1/2)^2 = 0{,}75$.
b) El cálculo exacto se hace engorroso porque se necesita hacer el cociente 100/199. Trabajemos con la aproximación.

$P(99) - P(100) = \Delta P \cong dP = P'(100).dt$, donde $dt=-1$.

$$P'(t) = \frac{20.000}{(100+t)^3} \Rightarrow P'(100) = 0{,}0025$$

$$\Rightarrow P(99) - P(100) = 0{,}0025.(-1) = -0{,}0025$$

$$\Rightarrow P(99) = P(100) - 0{,}0025 = 0{,}7475$$

Calcúlese el valor de P(99) con 5 decimales utilizando la fórmula de P(t) y verifíquese que el error de la aproximación es inferior al 2 por diez mil.

6) La expresión $dy = f'(x).dx$ indica que dy es un infinitésimo cuando dx tiende a cero. Si $f'(x) \neq 0$, entonces dy es un infinitésimo del mismo orden que dx, y $f'(x)$ actúa como una constante de proporcionalidad. Obsérvese que dy no es la variación de la función f cuando x pasa a x+dx, sino la variación que tendría si la función se comportara como lo hace la tangente a la curva en el punto x.

## Repartido Práctico 12.1: Derivadas de Funciones

**Ejercicio 1**

**En cada una de las funciones siguientes calcular la función derivada y el dominio de existencia de la f '(x).**

a) $f(x) = x^5 - \frac{1}{4}.x^4 + 3.x^3 - \frac{1}{2}.x^2 + 5.x + 4$
b) $f(x) = 5^x$
c) $f(x) = x^2 - Lx$
d) $f(x) = x.Lx$
e) $f(x) = e^x - x.e^x$
f) $f(t) = e^{(t^2)}$
g) $f(x) = 4.\sqrt{x}$
h) $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$
i) $f(q) = \dfrac{5}{q+1}$
j) $f(x) = \dfrac{2.x+1}{3.x-2}$
k) $f(p) = \dfrac{p^2 - 1}{p+2}$
l) $f(x) = L(1 + x^2)$

m) $f(x) = e^{2.x+3}$
n) $f(x) = L\sqrt{x^2 - 1}$

**Ejercicio 2**

Hallar las derivadas segundas de las siguientes funciones.

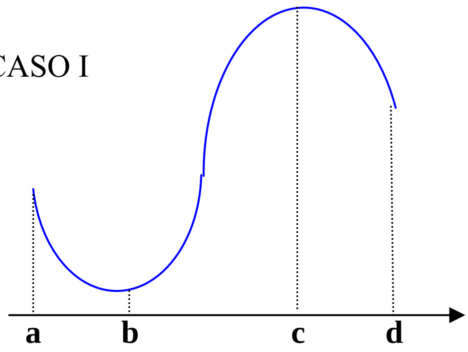
a) $f(x) = x^5 - \frac{1}{4}.x^4 + 3.x^3 - \frac{1}{2}.x^2 + 5.x + 4$
b) $f(x) = 5^x$
c) $f(x) = x^2 - Lx$
d) $f(x) = x.Lx$
e) $f(x) = e^x - x.e^x$
f) $f(t) = e^{(t^2)}$
g) $f(x) = 4.\sqrt{x}$
h) $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$
i) $f(q) = \dfrac{5}{q+1}$
j) $f(x) = \dfrac{2.x+1}{3.x-2}$

# Repartido Práctico 12.2: Aplicación de las derivadas para el estudio de funciones

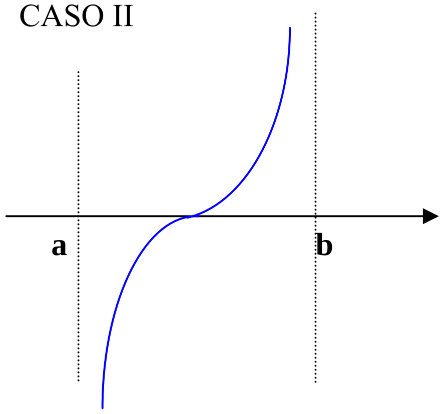
## Ejercicio 1

Indicar en cada caso los intervalos de monotonía de la función y, si existen, los puntos de extremos relativos y absolutos.

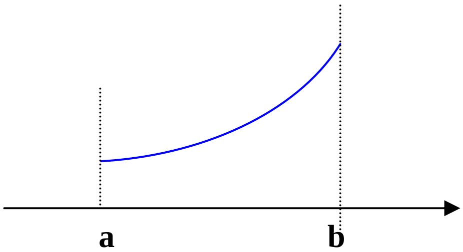
CASO I



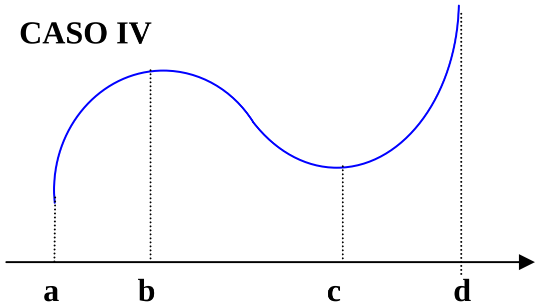

CASO II



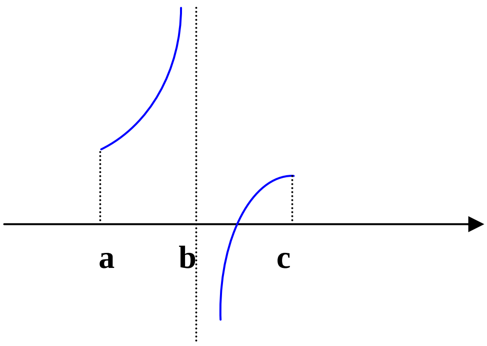

**CASO III**



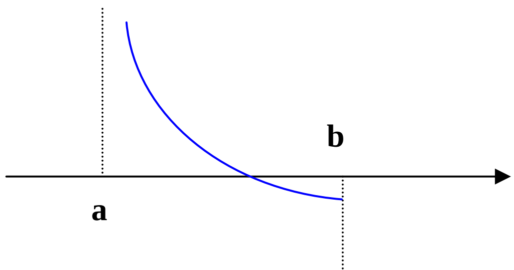

**CASO IV**



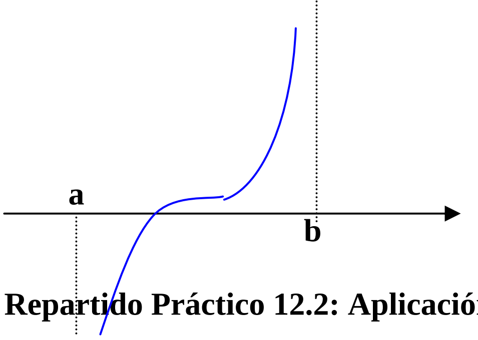

**CASO V**



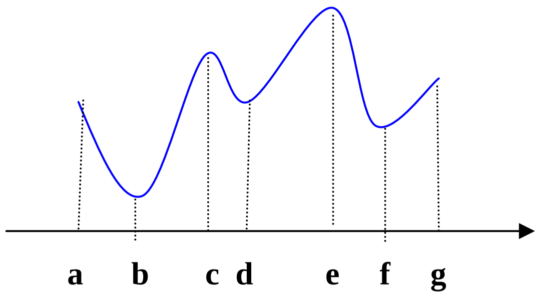

**CASO VI**




**CASO VII**




**CASO VIII**



**Ejercicio 2**

Estudiar y graficar las siguientes funciones.

a) $f(x) = \dfrac{x}{2} - \dfrac{2}{x}$

b) $f(x) = \dfrac{x^2}{x-1}$

c) f(x) = x – Lx

d) f(x) = L|$x^2$ – 1|

**Ejercicio 3**

Se tiene una cuerda de 36 metros para delimitar un rectángulo. Si el rectángulo ha de tener un perímetro de 36 metros, ¿cuál debe ser el largo y el ancho para que el área del rectángulo sea máxima?

**Ejercicio 4**

**Encontrar dos números reales tales que su suma sea 20 y su producto sea máximo.**

**Ejercicio 5**

**En una fábrica el costo total de producir q unidades de producto es:**

CT(q) = 0,05.$q^2$ + 5.q + 500

¿Cuál debe ser el nivel de producción para que el <u>costo medio</u> sea mínimo?

**Ejercicio 6**

La empresa Cable TV tiene actualmente 2000 suscriptores que pagan una cuota mensual de $350. Una encuesta reveló que tendrían 50 suscriptores más por cada $ 5 de disminución en la cuota. ¿Cuál es la cuota de ingreso máximo y cuántos suscriptores se tendría entonces?

**Ejercicio 7**

Un artículo en una revista de Sociología afirma que si ahora se iniciase un programa específico de servicios de salud, en **t** años **n** miles de personas adultas recibirían beneficios directos, donde:

$$n = \frac{t^3}{3} - 6.t^2 + 32.t \qquad 0 \le t \le 12$$

¿Para qué valor de t es máximo el número de beneficiarios?

**Ejercicio 8**

La función de demanda de un mercado monopólico es p = 400 – 2.q, y la función del costo medio es CM(q) = 0,2.q +4 + (400/q).

a) Determinar el nivel de producción que maximiza la utilidad.
b) Determinar el precio al que ocurre la utilidad máxima.
c) Determinar la utilidad máxima.
d) Si como medida regulatoria, el gobierno impone un impuesto de $22 por unidad al monopolista, ¿cuál es el nuevo precio que maximiza la utilidad?

## 13. ELASTICIDAD

Volvamos sobre la demanda como función del precio: q = f(p). La derivada de la función, $\frac{dq}{dp} = f'(p)$, nos permite saber, en cantidades absolutas, cómo variará aproximadamente la demanda ante una variación unitaria en el precio, por cuanto f '($p_0$) es el coeficiente angular de la tangente a la curva f en el punto p=$p_0$. El diferencial dq = f '(p).dp nos permite saber, en cantidades absolutas, cómo variará aproximadamente la demanda ante una variación "dp" en el precio. Pero las variaciones en cantidad proporcionan a veces información poco interesante: un aumento de $1 en el kilo de pan puede incidir en forma importante en la demanda de pan, mientras que el mismo aumento en el precio de una casa es insignificante (no mueve la demanda). Entonces, sería deseable disponer de un instrumento que permita conocer qué tan sensible es la demanda ante variaciones porcentuales de precio.

Definición: Elasticidad puntual de $y$ respecto de $x$: $\varepsilon = \dfrac{dy/dx}{y/x}$.

Si se utiliza la notación y = f(x) entonces la elasticidad también puede definirse así:

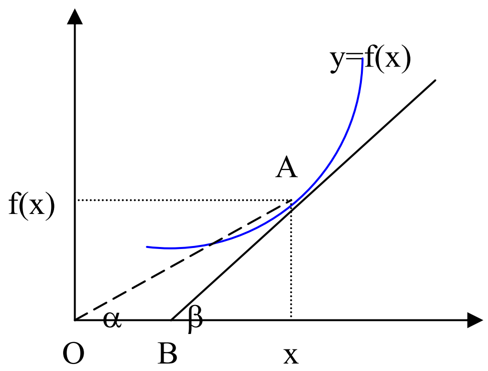
$$\varepsilon = \frac{f'(x)}{\frac{f(x)}{x}}$$

Definición: Se dice que f es *elástica* en el punto x si: |ε |> 1.
Se dice que f es *de elasticidad unitaria* en el punto x si: |ε | = 1.
Se dice que f es *inelástica* en el punto x si: |ε | < 1.

¿Qué significa que una función de demanda es inelástica en el punto p=$p_0$? Significa que en ese punto la variación porcentual de la cantidad demandada es menor, en valor absoluto, que la variación porcentual en el precio a partir de p=$p_0$.

$$q = f(p) \text{ es inelástica} \Rightarrow \left| \frac{\frac{dq}{dp}}{\frac{q}{p}} \right| \prec 1 \Rightarrow \left| \frac{\frac{dq}{q}}{\frac{dp}{p}} \right| \prec 1 \Rightarrow \left| \frac{dq}{q} \right| \prec \left| \frac{dp}{p} \right|$$

La elasticidad tiene una interesante interpretación geométrica.



$$tg\alpha = f'(x)$$

$$tg\beta = \frac{f(x)}{x}$$

$$En\ consecuencia: \varepsilon = \frac{f'(x)}{\frac{f(x)}{x}} = \frac{tg\alpha}{tg\beta}$$

**La elasticidad depende entonces de la relación entre los ángulos que determinan con el eje Ox: la tangente en el punto x a la curva y = f(x) (recta AB) y la cuerda que une el punto A con el origen de coordenadas. Por ejemplo, la elasticidad es unitaria en un punto de la curva donde |tg α|=|tg β|. En el gráfico precedente (donde la curva f es creciente), la igualdad se cumple en un punto x donde la tangente a la curva pasa por el origen de coordenadas. Si la curva f es decreciente, se tiene elasticidad unitaria en un punto donde α + β = 180º.**

# Repartido Práctico 13: Elasticidad

**Ejercicio 1**

Sea la función f: $f(x) = \alpha.x^{\beta}$. Probar que la elasticidad puntual de f es igual a $\beta$ $\forall$ x. (Si la función f es una potencia de x, entonces la elasticidad es igual al exponente).

**Ejercicio 2**

Sea f: $f(x) = C \neq 0$. Calcular la elasticidad puntual de f $\forall$ x. Interpretar el resultado obtenido en el caso que f sea una función de demanda.

**Ejercicio 3**

Sea f: $f(x) = \sqrt{x}$ . Calcular la elasticidad puntual de f $\forall$ $x > 0$.

**Ejercicio 4**

Sea la función de demanda: $q = f(p) = 1000/p^2$

a) Hallar la elasticidad puntual de la demanda.
b) ¿Depende la elasticidad del nivel del precio en este caso?
c) ¿Cuál sería el cambio relativo aproximado en la demanda si el precio p aumenta un 10 %?

**Ejercicio 5**

Sea la función de demanda: $q = f(p) = 500/(p+2)$

a) Hallar la elasticidad puntual de la demanda.
b) ¿Existe algún nivel de precio para el cual la elasticidad es unitaria?
c) ¿Cuál sería el cambio relativo aproximado en la demanda si el precio p aumenta un 10 %?

**Ejercicio 6**

Sea la función de demanda: $q = \sqrt{2.400 - p}$ .

a) ¿Para qué valores del precio la demanda es elástica?
b) ¿Qué pasa con la variación relativa en la demanda si el precio es de 1.600 y se desea incrementarlo un 20%?

**Ejercicio 7**

Si la función de demanda es $q = K/p^n$, demostrar que la elasticidad de la demanda depende sólo de n.

**Ejercicio 8**

Un fabricante de bicicletas puede vender actualmente 500 por mes a un precio de \$ 800 cada una. Si el precio se baja a \$ 750, podrían venderse 50 bicicletas adicionales por mes. Estimar la elasticidad de la demanda para el precio actual.

**Ejercicio 9**

Si q(p) es una función de demanda con relación al precio de un producto, entonces el ingreso del productor al vender q unidades al precio p es: $Y(p) = p.q(p)$. Si denominamos $\varepsilon_q$ a la elasticidad de la demanda con relación al precio, y $\varepsilon_y$ a la elasticidad del ingreso con respecto al precio, probar que se cumple que: $\varepsilon_y = 1 + \varepsilon_q$.

## 14. PRIMITIVAS. INTEGRALES INDEFINIDAS

Ya hemos visto cómo, a partir de las funciones elementales, es posible definir nuevas funciones mediante las operaciones algebraicas, la inversa o la composición de funciones. También mediante la derivación es posible obtener nuevas funciones.

Una propiedad importante de la derivación es que, dada una función, la función derivada, si existe es única.

Nos preguntamos ahora si es posible encontrar nuevas funciones mediante la operación contraria a la derivación, llamada *primitivación*. Por ejemplo, la función derivada de f: $f(x) = x^2$ es $f'(x) = 2.x$. ¿Existe alguna función tal que su derivada es $x^2$? Una respuesta posible es: $F(x) = \frac{x^3}{3}$. Efectivamente, la derivada de esta función es $F'(x) = x^2$. Se dice que $F(x) = \frac{x^3}{3}$ es una *primitiva* de $f(x) = x^2$. Se plantean entonces cuatro preguntas relevantes.

a) Dada una función, ¿siempre existe una primitiva?
b) La primitiva de una función, ¿es única?
c) Supuesto que existe una primitiva de una función, ¿siempre se puede calcular?
d) ¿Existen métodos generales de primitivación?

Respuesta de la primera pregunta: si una función es continua en su dominio, entonces siempre existe primitiva de la función. De las funciones no continuas no puede afirmarse nada en general.

Respuesta de la segunda pregunta: si una función admite una primitiva, entonces tiene infinitas primitivas. En otras palabras, no se puede hablar de "la" primitiva, porque ésta no es única. En el ejemplo precedente, $\frac{x^3}{3}$, $(\frac{x^3}{3} + 2)$ y $(\frac{x^3}{3} - 8)$ son tres primitivas distintas de la función $x^2$.

Si una función admite infinitas primitivas, ¿existe alguna relación entre todas ellas? La respuesta es afirmativa y viene dada por el siguiente teorema.

<u>Teorema</u>: Si dos funciones son primitivas de una misma función, entonces son iguales o difieren en una constante.

$$\left.\begin{array}{l} Si \;\; F'(x) = f(x) \\ y \;\; G'(x) = f(x) \end{array}\right\} \Rightarrow F(x) = G(x) + C$$

En otras palabras, las infinitas primitivas de una función se obtienen a partir de una de ellas, sumándole una constante cualquiera.

<u>Definición</u>: Se llama *integral indefinida de la función f* (notación: $\int f(x)dx$) al conjunto de primitivas de la función f.

$$\int f(x)dx = \{F(x) + C: F'(x) = f(x) \text{ y } C \in R\}$$

El símbolo $\int$ se utiliza para indicar una integral, la función f se denomina *integrando*, y el símbolo dx se utiliza para indicar cuál es la variable de primitivación (esto es especialmente importante cuando se trabaja con varias variables).

Ejemplo: Hallar $\int \left(2.x - e^x + \frac{1}{x}\right)dx$

$$\int \left(2.x - e^x + \frac{1}{x}\right)dx = \{x^2 - e^x + L|x| + C,\ C \in R\}$$

Respuesta de la tercera pregunta: no siempre es posible calcular primitivas en forma explícita. Por ejemplo: $e^{x^2}$ admite una primitiva (porque es una función continua) pero no es posible expresarla mediante un número finito de funciones elementales.

Respuesta de la cuarta pregunta: existen métodos generales de primitivación. Además de la primitivación "inmediata" (que consiste en mirar una tabla de derivadas "al revés"), y de observar que para primitivar una suma alcanza con obtener primitivas de los sumandos, los métodos más conocidos son: integración por partes, integración por sustitución y descomposición en fracciones simples. En aplicación de estos métodos se obtienen unos cuántos resultados interesantes que se presentan en las conocidas *tablas de integrales*.

Supongamos que las funciones que aparecen en el integrando, en los siguientes casos, son funciones derivables (y por tanto, continuas).

*Método de integración por partes*

$$\boxed{\int f(x).g'(x)dx = f(x).g(x) - \int f'(x).g(x)dx}$$

El método es útil cuando hallar una primitiva de f '(x).g(x) es más sencillo que hallar una primitiva de f(x).g'(x).

Ejemplo: $\int x.e^x dx = x.e^x - \int 1.e^x dx = x.e^x - (e^x + C)$
En este caso hemos tomado f(x) = x y g'(x) = $e^x$.

*Integración por sustitución*

$$\boxed{\int f[u(x)]u'(x)dx = \int f(u)du}$$

Ejemplo: $\int (x^3+1)^6.(3.x^2)dx = \left]\begin{matrix} u(x) = x^3+1 \\ u'(x) = 3.x^2 \end{matrix}\right[ = \int u^6 du = \frac{u^7}{7} + C = \frac{(x^3+1)^7}{7} + C$

En el primer paso se hace el cambio de variable u = u(x), y en el último paso se "deshace" el cambio de variable.

*Descomposición en fracciones simples*

Sea f una fracción algebraica que sólo tiene raíces reales en el denominador (el resultado, con variantes, es también aplicable cuando las raíces del denominador son complejas). Entonces, la fracción algebraica se puede descomponer en la suma algebraica de fracciones de la forma $\frac{A}{(x-\alpha)^m}$ donde m es un número natural mayor o igual que 1 y α es una de las raíces del denominador. Como una primitiva de una suma se puede obtener sumando primitivas de los sumandos, hallar la integral indefinida de una fracción algebraica (con raíces reales en el denominador) se resuelve hallando primitivas de fracciones de la forma $\frac{A}{(x-\alpha)^m}$. Sólo dos casos son interesantes:

- Si m = 1: $\int \frac{A}{x-\alpha}dx = A.L|x-\alpha| + C$

- Si m > 1: $\int \frac{A}{(x-\alpha)^m} = \int A.(x-\alpha)^{-m}\,dx = \frac{A}{m-1}.\frac{1}{(x-\alpha)^{m-1}} + C$

El método de descomposición en fracciones simples permite calcular los coeficientes "A", como en el ejemplo que sigue.

Ejemplo: Hallar $\int \frac{x}{x^2-1}dx$.

$$\int \frac{x}{x^2-1}dx = \int\left(\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}\right)dx = \int\left(\frac{1/2}{x-1}+\frac{1/2}{x+1}\right)dx = \frac{1}{2}.L|x-1| + \frac{1}{2}.L|x+1| + C$$

¿De dónde surge que A = B = 1/2? De resolver la identidad de fracciones algebraicas:

$$\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1} = \frac{x}{x^2-1}$$

$$\frac{A.(x+1)+B.(x-1)}{x^2-1} = \frac{x}{x^2-1}$$

$$\frac{(A+B).x+(A-B)}{x^2-1} = \frac{x}{x^2-1}$$

$$\begin{cases} A+B=1 \\ A-B=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 1/2 \\ B = 1/2 \end{cases}$$

Las tablas de integrales indefinidas proporcionan muchos más ejemplos de aplicación de los métodos precedentes. Incluso la tabla de derivadas puede ser utilizada para calcular integrales leyéndola "al revés", esto es, buscando en la columna de la derecha la función que se quiere primitivar.

Ejemplo: Hallar $\int \frac{dx}{\sqrt{x}}$.

Mirando la columna de la derecha de la tabla de derivadas se encuentra la función $\frac{1}{2.\sqrt{x}}$, que es la derivada de $\sqrt{x}$. Digamos que nos está "sobrando" el factor 2 en el denominador. Entonces, $2.\sqrt{x}$ es una primitiva de $\frac{1}{\sqrt{x}}$.

$$\Rightarrow \int \frac{dx}{\sqrt{x}} = \left\{2.\sqrt{x} + C\right\}$$

# Repartido Práctico 14: Integrales Indefinidas

## Ejercicio 1

**Calcular las siguientes integrales.**

$a)\int 3dx \qquad b)\int 2xdx \qquad c)\int (3x-2)dx \qquad d)\int (4y^2-3y+2)dy \qquad e)\int (2q^4-3q^{-2})dq$

$f)\int \sqrt[3]{x}dx \qquad g)\int \frac{dx}{x^2} \qquad h)\int (x+2)^3 dx \qquad i)\int 3x^2(x^3+2)dx \qquad j)\int \frac{4dy}{y}$

$k)\int x.e^{x^2} dx \qquad l)\int \frac{dp}{p+2} \qquad m)\int (e^x - e^{-2x})dx \qquad n)\int |x|dx \qquad o)\int (\sqrt{t}-\frac{1}{\sqrt{t}})dt$

## Ejercicio 2

Calcular las siguientes integrales.

$a)\int x^2.e^{2.x}dx$

$b)\int x.Lx\ dx$

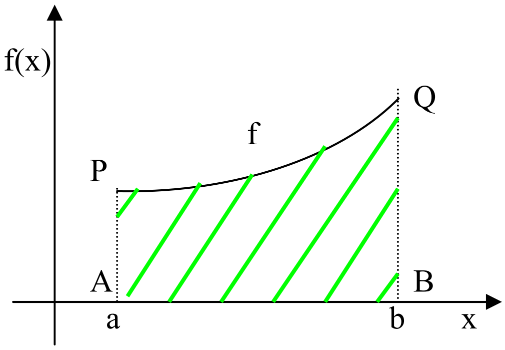
$c)\int 2.x.e^{x^2} dx$

$d)\int x^4.(x^5-1)^6 dx$

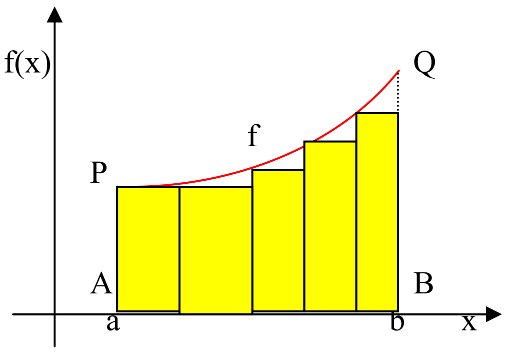
$e)\int \frac{2}{x^2-4}dx$

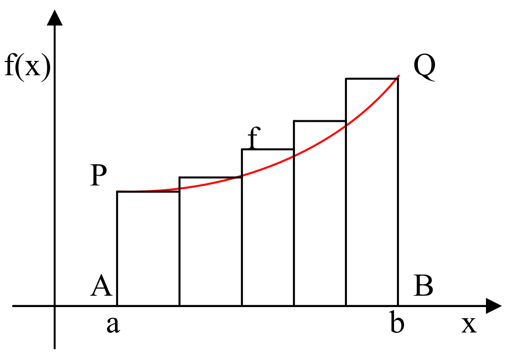
## 15. INTEGRALES DEFINIDAS. INTEGRALES IMPROPIAS

Vamos a introducir el concepto de *integral definida en un intervalo* (notación: $\int_a^b f(x)dx$) a partir de su interpretación geométrica. Sea f una función continua en el intervalo [a, b]. Para facilitar la interpretación, supongamos que f(x) ≥ 0 en dicho intervalo.




Consideremos la figura del plano ABQP delimitada por las rectas y = 0, x = a, x = b y la función f. Dicha figura se denomina *trapezoide*. Si la función f fuera una recta, entonces el trapezoide sería un trapecio birrectángulo. Nos interesa calcular el área del trapezoide. Se obtienen dos aproximaciones de este número si partimos el intervalo [a, b] en subintervalos, calculamos en cada uno de ellos el mínimo y el máximo de la función f [19], y luego calculamos la suma de las áreas de los rectángulos inferiores por un lado, y de los rectángulos superiores, por otro lado.




[19] La existencia del mínimo y el máximo en cada subintervalo queda asegurada por el teorema de Weierstrass.

Es claro que una aproximación es por defecto (suma de rectángulos inferiores) y otra por exceso (suma de rectángulos superiores). Si denominamos $a = x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n = b$ a los puntos en que se ha dividido al intervalo [a, b], entonces $x_i - x_{i-1}$ representa la base del i-ésimo rectángulo. Si denominamos $m_i$ y $M_i$ al mínimo y máximo de la función f en el i-ésimo intervalo, entonces las aproximaciones por defecto y por exceso del área del trapezoide se pueden formular así:

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} m_i.(x_i - x_{i-1}) \qquad S_n = \sum_{i=1}^{n} M_i.(x_i - x_{i-1})$$

denominadas *sumas inferiores y sumas superiores* respectivamente.

¿Cómo se pueden obtener buenas aproximaciones? Parece bastante evidente que se obtienen mejores aproximaciones cuando aumenta el número de subintervalos.

¿Qué ocurre si el número de subintervalos (n) tiende a infinito? Se puede demostrar en ciertas condiciones que:

$$\text{lím } s_n = \text{lím } S_n = \text{Área del trapezoide}$$

Dicho límite se denomina *integral definida de la función en el intervalo* [a, b] y se simboliza $\int_a^b f(x)dx$, donde:

- f es el integrando
- a es el límite inferior de integración
- b es el límite superior de integración
- dx indica cuál es la variable de integración

El cálculo de $\int_a^b f(x)dx$ mediante el paso al límite de $s_n$ o de $S_n$ resulta bastante engorroso. Necesitamos una herramienta más sencilla para el cálculo de integrales definidas. Dichas herramientas las proporcionan los conceptos y teoremas que siguen a continuación.

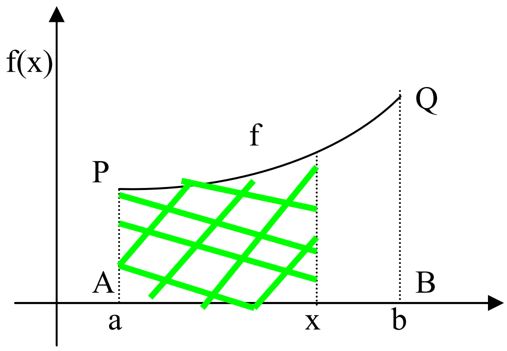
*Observaciones*

1. ¿Qué diferencias hay entre $\int f(x)dx$ y $\int_a^b f(x)dx$? El primer símbolo representa el conjunto de primitivas de la función f, es decir, es un conjunto de funciones. El segundo símbolo corresponde a un número, que tiene una interpretación geométrica en términos del área de un trapezoide si a < b y f es no negativa.
2. ¿Qué diferencias hay entre $\int_a^b f(x)dx$ y $\int_a^b f(t)dt$? No hay ninguna diferencia, ambas expresiones representan el mismo número, que es el área del trapezoide. Esto es válido, por ahora, si a < b y f ≥ 0. Pero como veremos más adelante, también es válido para a, b y f cualesquiera. Como el valor de la integral no depende de la variable de integración, se dice que ésta es "muda".

3. Si hacemos variar el límite superior de integración, en el intervalo donde el integrando es una función continua, podemos definir una nueva función, denominada *función integral*:

$$F:\ x \to F(x) = \int_a^x f(t)dt \qquad \text{con dominio en } [a, b]$$

Desde el punto de vista geométrico, ¿quiénes son F(x), F(a) y F(b)? F(b) es el área del trapezoide, F(a) = 0 y F(x) proporciona el área del trapezoide en el intervalo [a, x].




Teorema Fundamental

H) f continua en [a, b]

$F(x) = \int_a^x f(t)dt$

T) $F'(x) = f(x) \ \ \forall\, x \in [a, b]$

¿Qué es lo que afirma el teorema? Que si el integrando es una función continua en [a, b], entonces la función integral F es una primitiva del integrando, pues F'(x) = f(x).

Entonces, el Teorema Fundamental proporciona un método para calcular áreas en forma exacta. Si podemos encontrar F, el área del trapezoide viene dada por F(b).

F es una primitiva muy especial: la que hace que F(a) = 0. Nos preguntamos si para calcular $\int_a^b f(x)dx$ se puede utilizar una primitiva cualquiera de f. La respuesta es afirmativa.

Regla de Barrow (teorema)

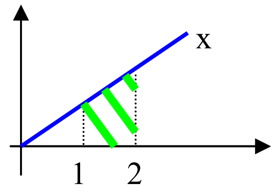
H) f continua en [a, b]

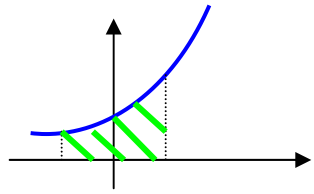
G es una primitiva cualquiera de f

T) $\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a) = G(x)\Big|_a^b$.

Este teorema resuelve el problema del cálculo del área del trapezoide en forma exacta. Para ello, alcanza con encontrar una primitiva cualquiera de f, evaluarla en x = a y x = b, y restar ambos valores: $G(x)\Big|_a^b = G(b) - G(a)$.

Ejemplo: $\int_1^2 x\, dx = \frac{x^2}{2}\Big|_1^2 = \frac{4}{2} - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

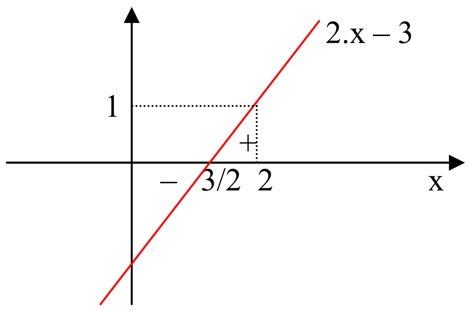


Ejemplo: $\int_{-1}^{1} e^x\, dx = e^x\Big|_{-1}^{1} = e^1 - e^{-1} \cong 2{,}35$

Ejemplo: $\int_0^2 (2.x-3)dx = \left[x^2 - 3.x\right]_0^2 = 4 - 6 = -2$

¿Es posible que el área de un trapezoide sea negativa? No, no es posible. Porque por definición, el área de una figura es mayor o igual que cero. Entonces, ¿por qué $\int_0^2 (2.x-3)dx$ tiene resultado negativo? Porque el integrando no es una función positiva, y en consecuencia, la interpretación geométrica de la integral no es el área de un trapezoide. En el intervalo [0, 3/2] la función f(x) = 2.x – 3 es negativa y el área del trapezoide en [0, 3/2] es $\frac{3x\,^3\!/_2}{2} = \frac{9}{4}$ (porque el trapezoide es un triángulo). En el intervalo [3/2, 2] la función f(x) = 2.x – 3 es positiva y el área del trapezoide (también un triángulo) en dicho intervalo es $\frac{^1\!/_2\, x1}{2} = \frac{1}{4}$. El área del trapezoide en [0, 2] es 10/4. ¿Qué interpretación puede darse al resultado $\int_0^2 (2.x-3)dx$ = - 2? Si se admite poner signo positivo o negativo al área del trapezoide, según que la función f se dibuje por encima o por debajo del eje Ox, entonces el área del trapezoide del ejemplo sería ¼ - 9/4 = - 2.

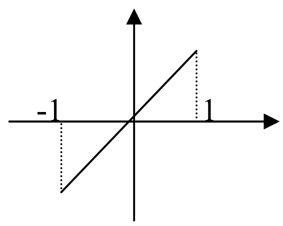


*Observaciones*

1. $\int_a^b f(x)dx$ es un número que representa el área de un trapezoide si a < b y f(x) ≥ 0.

2. $\int_a^b f(x)dx$ se puede definir para a, b y f cualesquiera, pero si a > b, entonces no hay una interpretación geométrica interesante. Si a < b y f(x) ≤ 0 en [a, b], entonces $-\int_a^b f(x)dx$ proporciona el área del trapezoide que se dibuja por debajo del eje Ox. Finalmente, si a < b y la función cambia de signo (una o más veces) en el intervalo [a, b] entonces $\int_a^b f(x)dx$ es un número que representa la resta de áreas de trapezoides definidos en subintervalos del [a, b], con signo positivo cuando f(x) ≥ 0 en el subintervalo y con signo negativo cuando f(x) ≤ 0. Por este motivo, $\int_a^b f(x)dx$ puede tomar valores negativos o incluso anularse aunque f(x) no sea la función nula.

Ejemplo: $\int_{-1}^{3}(x-1)dx = \left[\frac{x^2}{2} - x\right]_{-1}^{3} = \left[\frac{9}{2} - 3\right] - \left[\frac{1}{2} - (-1)\right] = 0$




*Propiedades de la integral definida*

1. $\int_a^b 0\, dx = 0$

2. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

3. Si f es continua en [α, β] y a, b, c ∈ [α, β] $\Rightarrow \int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$

   Si f ≥ 0 y a < c < b, entonces esta propiedad tiene una fácil interpretación geométrica: cada una de las integrales representa el área de un trapezoide, las dos últimas como resultado de partir el intervalo [a, b] en los subintervalos [a, c] y [c, b]. Sin embargo, la propiedad es más general: se cumple no importa el signo de f y no importa la posición relativa de a, b y c.

4. $\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g$

5. $\int_a^b K.f = K.\int_a^b f$

La propiedad 3 se conoce como Teorema de Chasles y las 4 y 5 se conocen como propiedades de linealidad.

Para calcular integrales definidas en un intervalo se utilizan los métodos de integración indefinida. Porque de acuerdo con la Regla de Barrow alcanza con hallar una primitiva del integrando para resolver el problema. A continuación se presentan algunos ejemplos de aplicación de los métodos de integración indefinida: primitivación inmediata (tabla de integrales o tabla de derivadas), integración por sustitución, integración por partes, descomposición en fracciones simples.

*Ejemplos*

a) $\int_{-1}^{1} 2.x^2 dx = 2.\frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{1} = \frac{2}{3} - \left(\frac{-2}{3}\right) = \frac{4}{3}$

b) $\int_{1}^{3} \frac{5}{x^3}\, dx = \int_{1}^{3} 5.x^{-3} dx = 5.\frac{x^{-2}}{-2}\Big|_{1}^{3} = \frac{-5}{2.x^2}\Big|_{1}^{3} = \frac{-5}{18} - \left(\frac{-5}{2}\right) = \frac{20}{9}$

c) $\int_{0}^{1} \frac{2.x}{4+x^2} dx = \left]\begin{array}{c} 4+x^2 = u \\ 2.x.dx = du \\ x=0 \Rightarrow u=4 \\ x=1 \Rightarrow u=5 \end{array}\right[ = \int_{4}^{5} \frac{du}{u} = Lu\Big|_{4}^{5} = L5 - L4 = L\frac{5}{4}$

Obsérvese que para calcular una integral definida utilizando integración por sustitución, no es necesario "deshacer" el cambio de variable.

d)

$$\int_{0}^{1/\sqrt{2}} x.\sqrt{1-x^2}\; dx = \left]\begin{array}{c} 1-x^2 = u \\ -2.x.dx = du \\ x.dx = -\frac{du}{2} \\ x=0 \Rightarrow u=1 \\ x = 1/\sqrt{2} \Rightarrow u = \frac{1}{2} \end{array}\right[ = \int_{1}^{1/2} \sqrt{u}.(-\frac{du}{2}) = -\frac{1}{2}.\int_{1}^{1/2} u^{1/2} du = \frac{1}{2}.\frac{u^{3/2}}{3/2}\Big|_{1/2}^{1} \cong 0{,}215$$

e)

$$\int_{0}^{2} x^2.e^{2.x} dx = x^2.\frac{e^{2.x}}{2}\Big|_{0}^{2} - \int_{0}^{2} (x^2)'.\frac{e^{2.x}}{2} dx = 2.e^4 - \int_{0}^{2} x.e^{2.x} dx = 2.e^4 - \left[x.\frac{e^{2.x}}{2}\Big|_{0}^{2} - \int_{0}^{2} \frac{e^{2.x}}{2} dx\right] =$$

$$= \frac{5}{4}.e^4 - \frac{1}{4}$$

f) $\int_{0}^{1} \frac{dx}{(x-2).(x-3)} = \int_{0}^{1}\left(\frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3}\right)dx = \int_{0}^{1}\left(\frac{-1}{x-2} + \frac{1}{x-3}\right)dx = -L|x-2| + L|x-3|\Big|_{0}^{1} =$

= -L1 + L2 – (-L2 + L3) = 2.L2 – L3 = L4 – L3 = L(4/3) ≈ 0,288.

***Cálculo de áreas comprendidas entre dos curvas***

Se quiere calcular el área comprendida entre dos funciones en el intervalo [a, b], como en la figura A.

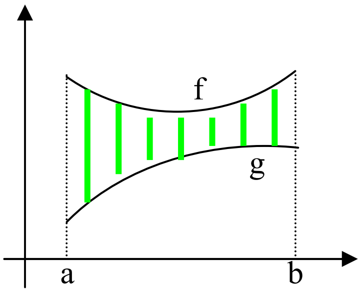



FIGURA A

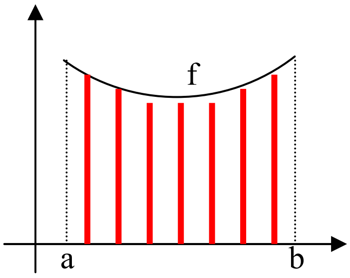



FIGURA B

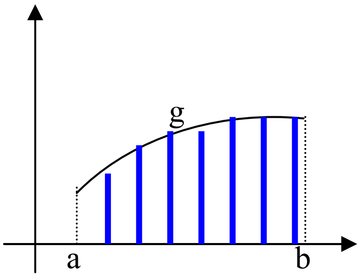
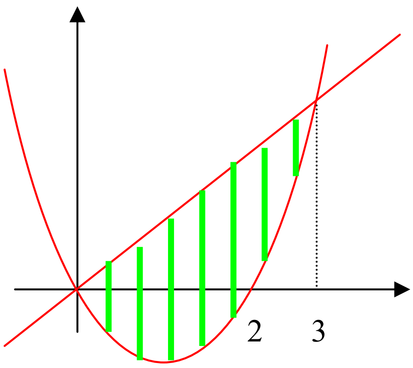



FIGURA C

El área de la figura A se puede calcular como diferencia de las áreas de los trapezoides de las figuras B y C, las cuales pueden calcularse mediante $\int_a^b f \quad y \quad \int_a^b g$ respectivamente. Entonces, el área de la figura A es: $\int_a^b f - \int_a^b g = \int_a^b (f - g)$.

Ejemplo: Hallar el área comprendida entre la parábola de ecuación $y = x^2 - 2.x$, y la recta $y = x$.




Las abcisas de los puntos de corte de ambas curvas se obtienen resolviendo la ecuación: $x^2 - 2.x = x$. Dichas abcisas son $x = 0$ y $x = 3$. Entonces, el área comprendida entre ambas curvas es:

$$\int_0^3 \left[x - \left(x^2 - 2.x\right)\right] dx = \left[-\frac{x^3}{3} + 3.\frac{x^2}{2}\right]_0^3 = \frac{9}{2}$$

***Aplicación de las integrales a problemas de Economía***

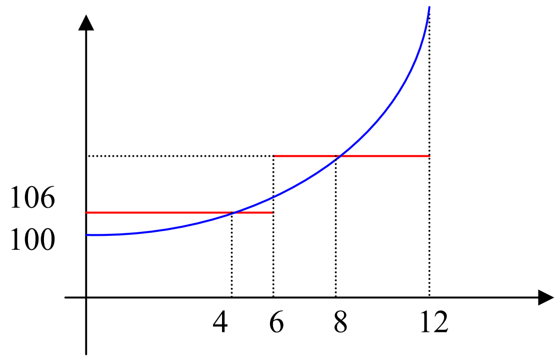
***A) Ganancia o pérdida de salario real***

Supongamos que en el año 2003 los salarios promedio se incrementaron un 5% al inicio de cada semestre, permaneciendo constantes en los restantes meses del año, mientras que los precios del consumo crecieron continuamente a una tasa instantánea del 1,4567227% mensual. El salario promedio de diciembre de 2002 permitía comprar exactamente una canasta de consumo (valor 100). ¿Cuál fue la ganancia o pérdida de salario real den 2003?

Tanto precios como salarios varían a lo largo del tiempo. Tomamos el tiempo (t) como variable independiente. Entonces, la evolución temporal de precios ($P_t$) y salarios ($S_t$) se puede modelar mediante las siguientes expresiones:

$$S_t = \begin{cases} 100 \;\; en \;\; diciembre \;\; de \;\; 2002 \\ 106 \;\; si \;\; t \in [0, 6) \\ 112{,}36 \;\; si \;\; t \in [6, 12) \end{cases}$$

$$P_t = 100.e^{0{,}014567227.t} \quad si \;\; t \in [0, 12]$$



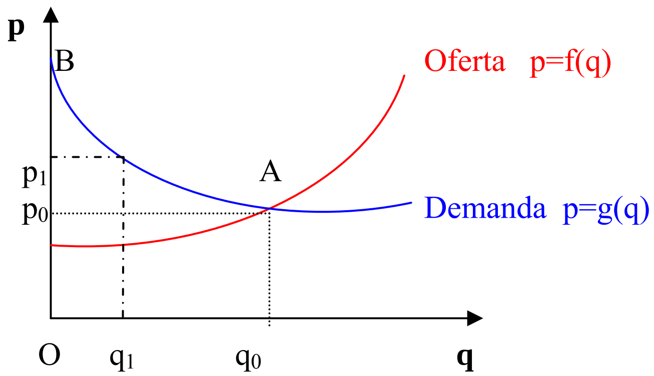

El gráfico de los salarios se denomina *dientes de sierra* porque los salarios crecen a saltos. El gráfico de los precios al consumo se modelan mediante una curva exponencial. Los puntos de corte de ambos gráficos se obtienen como solución de las ecuaciones: $106 = 100.e^{0{,}014567227.t}$ y $112{,}36 = 100.e^{0{,}014567227.t}$. Las abcisas de estos puntos de corte son $t = 4$ y $t = 8$. Se observa que en el intervalo [0, 4] los salarios se mantienen por encima del costo de la canasta de consumo, por lo que en ese período se verifica una "ganancia" del salario real. La situación se invierte en el período [4, 6], pues los precios superan a los salarios. En este intervalo se produce una "pérdida" de salario real. La situación se reproduce en el semestre siguiente en los intervalos [6, 8] y [8, 12]. La ganancia o pérdida de salario real se mide por el área comprendida entre las curvas de salarios y precios. Pero lo interesante es que la ganancia puede identificarse con la integral definida en el intervalo en que los salarios superan a los precios y la pérdida con la integral definida en el intervalo donde los precios superan a los salarios.

Si interesa calcular la ganancia o pérdida en cada intervalo, entonces la solución consiste en calcular las integrales: $\int_0^4 (S_t - P_t)dt, \int_4^6 (P_t - S_t)dt, \int_6^8 (S_t - P_t)dt \; y \int_8^{12} (P_t - S_t)dt.$ Pero si lo que interesa calcular es la ganancia o pérdida en el año 2003, entonces el problema es más sencillo y se resuelve sumando las áreas "positivas" y "negativas" que determinan ambas curvas al restar $S_t - P_t$. El signo indicará si en el año hubo ganancia o pérdida de salario real:

$$\int_0^{12} (S_t - P_t)\, dt = \int_0^6 \left(106 - 100.e^{0{,}014567227.t}\right) dt + \int_6^{12} \left(112{,}36 - 100.e^{0{,}014567227.t}\right) dt = \ldots = -1{,}1\,.$$

El resultado obtenido se interpreta así: en el año 2003 los asalariados perdieron poder de compra por un equivalente del 1,1% del salario mensual (en promedio perdieron un 0,09% por mes).

### *B) Excedente de productores y consumidores*




El gráfico precedente muestra las curvas de oferta y demanda, explicitando el precio **p** de un producto en función de la cantidad **q** (a suministrar o a comprar, respectivamente). La curva de oferta indica el precio al que el fabricante está dispuesto a vender **q** unidades de producto. La curva de demanda muestra el precio al que los consumidores comprarán **q** unidades. El punto A de intersección de ambas curvas se llama *punto de equilibrio* e indica el precio a cual los consumidores comprarán la misma cantidad de producto que los fabricantes desean vender a dicho precio. Hay consumidores que estarían dispuestos a pagar un precio más alto, $p_1 > p_0$, pero demandarían menos unidades ($q_1$). Estos consumidores se benefician de un precio de equilibrio menor que $p_1$. Para estos consumidores el beneficio es $(p_1 - p_0).q_1$. Pero este razonamiento es válido para cualquier valor de p en el intervalo $[B, p_0)$, para cualquier valor de q entre O y $q_0$. Si los valores de q fueran numerables, entonces el beneficio total de los consumidores sería $\sum_{q=0}^{q_0}(p-p_0).q$. Si q es una variable continua, entonces:

**Excedente de los consumidores =** $\int_0^{q_0}[f(q)-p_0]dq$

que no es otra cosa que el área delimitada por el eje Op, la curva de demanda y la recta $p = p_0$.

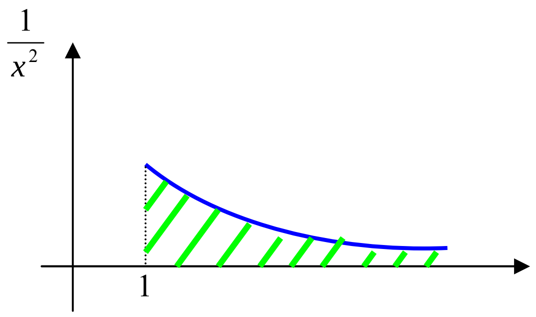
Mediante un razonamiento análogo se obtiene:

**Excedente de los productores =** $\int_0^{q_0}[p_0-g(q)]dq$

que representa el área delimitada por el eje Op, la curva de oferta y la recta $p = p_0$.

***Integrales impropias de primera especie***

Nos planteamos ahora si será posible hallar el área de una figura infinita del plano, similar al trapezoide. Se trata de calcular el área de la figura comprendida entre el eje Ox, la recta x = 1 y la función f: f(x) = $\frac{1}{x^2}$, o sea, el área del trapezoide en el intervalo [1, +∞].




Podría pensarse que el área de una figura infinita debería ser también infinita. Sin embargo, a veces, ocurre que el área es finita. El método que vamos a utilizar para calcular $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ consiste en definir la función integral $F(t)=\int_a^t f(x)dx$ y luego calcular el límite de F(t) cuando $t \to +\infty$.

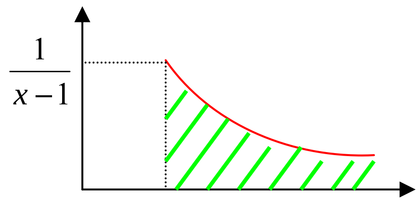
Ejemplo 1: Calcular $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}dx$

$$F(t) = \int_1^t \frac{1}{x^2}dx = -\frac{1}{x}\Big|_1^t = 1-\frac{1}{t} \Rightarrow \underset{t\to+\infty}{Lím}\, F(t)=1 \Rightarrow \int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2}=1$$

Ejemplo 2: Calcular $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x-1}$

$$F(t) = \int_2^t \frac{dx}{x-1} = L|x-1|\Big|_2^t = L|t-1| - L1 = L|t-1| = L(t-1) \quad pues\ \ t\geq 2$$

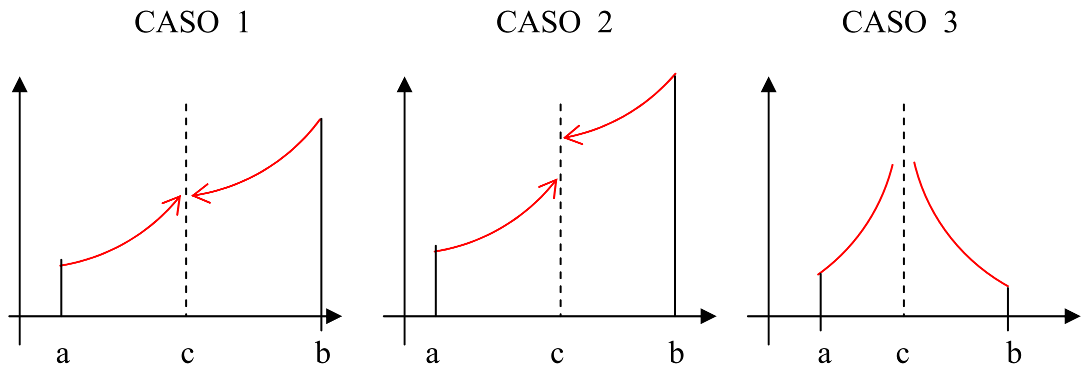
$$\underset{t\to+\infty}{Lím}\, F(t) = \underset{t\to+\infty}{Lím}\, L(t-1) = +\infty$$




En este caso el área del trapezoide tiende a infinito, y ello se debe a que el infinitésimo $\frac{1}{x-1}$ tiende muy lentamente a cero.

Cuando el Lím F(t), con $t \to +\infty$, tiende a un número finito, se dice que la integral impropia *converge*. Cuando dicho límite es infinito, se dice que la integral *diverge* o que *no converge*.

***Integrales definidas de funciones no continuas***




Cuando en un punto $x = c$ del intervalo $[a, b]$ se tiene una discontinuidad de la función $f$, evitable o con salto finito, entonces la integral $\int_a^b f$ se puede plantear como una suma, $\int_a^c f + \int_c^b f$, y el resultado se obtiene haciendo $\lim\limits_{t\to c^-} \int_a^t f$ y $\lim\limits_{t\to c^+} \int_t^b f$. Si ambos límites existen y son finitos, entonces $\int_a^b f$ *converge* a la suma de ambos límites. Si uno al menos de los límites tiende a infinito, entonces se dice que la integral *no converge*. Si existen ambos límites y la suma tiende a $+\infty$ o a $-\infty$, se dice que la integral *diverge*.

Ejemplo: Calcular $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2}$. Observar que la función presenta una discontinuidad en el punto $x = 0$. Entonces hay que estudiar las integrales $\int_{-1}^{0} \frac{dx}{x^2}$ y $\int_{0}^{1} \frac{dx}{x^2}$.

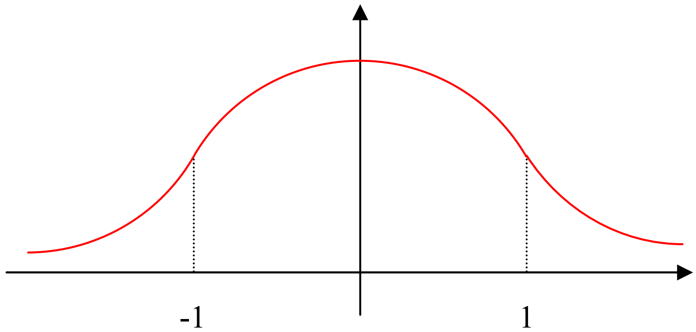
$$\lim_{t\to 0^-} \int_{-1}^{t} \frac{dx}{x^2} = \lim_{t\to 0^-} -\frac{1}{x}\Big|_{-1}^{t} = \lim_{t\to 0^-} (-1 - \frac{1}{t}) = +\infty$$

Con el mismo argumento se prueba que la integral $\int_{0}^{1} \frac{dx}{x^2}$ diverge a $+\infty$. En consecuencia, $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2}$ también diverge a $+\infty$.

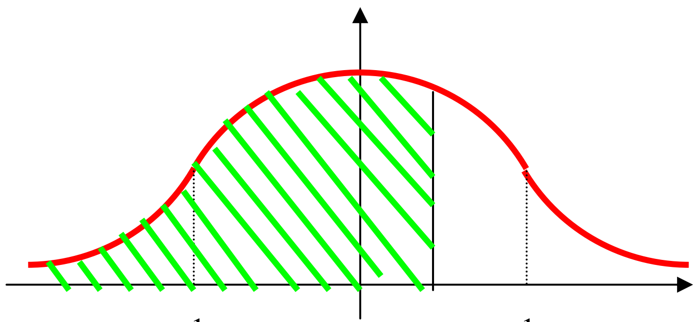
En Econometría, en Modelos Lineales, un supuesto bastante frecuente es que los residuos del modelo se distribuyen normales. Sin entrar en mayores detalles sobre el significado del concepto estadístico de “distribución”, presentamos a continuación la *función de densidad normal estándar*:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Esta función tiene un gráfico con forma de campana, y se conoce en la literatura estadística como *campana de Gauss*.




Se define la *función de distribución normal estándar* mediante la fórmula: $\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.e^{-\frac{t^2}{2}}dt$, que para cada valor de x proporciona el área del trapezoide limitado por el eje Ox, la curva f y la recta paralela al eje Oy en la abcisa x.




El problema es que no es posible calcular una primitiva de la función f. Por ello, para calcular Φ(x) se utiliza una tabla que proporciona una aproximación con 4 decimales del área acumulada en el intervalo (-∞, x). La tabla proporciona una aproximación para cada valor centesimal de x en el intervalo [-3,5; +3,5], pues a la izquierda de -3,5 y a la derecha de +3,5 la curva normal prácticamente se pega al eje Ox.

Algunos valores usuales de la tabla:

| | |
|---|---|
| Φ(-1,96) = 0,025 | Φ(1,96) = 0,975 |
| Φ(-1,645) = 0,05 | Φ(2,326) = 0,99 |
| Φ(0) = 0,50 | Φ(2,576) = 0,995 |
| Φ(1,28) = 0,90 | Φ(3,090) = 0,999 |
| Φ(1,645) = 0,95 | Φ(3,291) = 0,9995 |

# Repartido Práctico 15: Integrales Definidas e Integrales Impropias

**Ejercicio 1**

**Calcular las siguientes integrales. En la Práctica 14 ya se calcularon primitivas.**

$a)\int_0^3 3dx \quad b)\int_{-1}^2 2xdx \quad c)\int_0^4 (3x-2)dx \quad d)\int_1^3 (4y^2-3y+2)dy \quad e)\int_{-2}^{-1} (2q^4-3q^{-2})dq$

$f)\int_{-1}^1 \sqrt[3]{x}dx \quad g)\int_{1/4}^{1/3} \frac{dx}{x^2} \quad h)\int_{-1}^1 (x+2)^3 dx \quad i)\int_0^1 3x^2(x^3+2)dx \quad j)\int_5^9 \frac{4dy}{y}$

$k)\int_1^2 x.e^{x^2} dx \quad l)\int_0^4 \frac{dp}{p+2} \quad m)\int_0^1 (e^x - e^{-2x})dx \quad n)\int_{-1}^2 |x|dx \quad o)\int_0^x (\sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}})dt$

**Ejercicio 2**

Hallar el área del trapezoide formado por:

a) El eje Ox, las rectas x=1, x=3, y la función f(x) = 2.x.
b) El eje Ox, las rectas x=0, x=2, y la función f(x) = $x^2$.
c) El eje Ox, las rectas x=-1, x=1, y la función f(x) = x.

**Ejercicio 3**

Hallar el área comprendida entre el eje Ox y las curvas f(x)=$e^x$ y g(x)=$e^{-x}$.

**Ejercicio 4**

**Dibujar las funciones integrando, calcular las integrales impropias e interpretar geométricamente.**

$a)\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$

$b)\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$

$c)\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^4}$

**Ejercicio 5**

Calcular las integrales impropias.

$$a)\int_{0}^{+\infty}\frac{2xdx}{1+x^2}$$

$$b)\int_{0}^{+\infty}\frac{x^2dx}{x^3+2}$$

## Repartido Práctico 15: Integrales Definidas e Integrales Impropias

**Ejercicio 6**

**Sea la función de costo marginal de la producción C ’(q) = 0,2.q + 2. Actualmente se producen 80 unidades por día.**

a) ¿Cuánto más costará producir 90 unidades por día?
b) Si el costo fijo diario de producción es 50 unidades monetarias, explicitar la función de producción C(q).

**Ejercicio 7**

En el primer semestre del año 2002 la inflación en una ciudad evolucionó de acuerdo con la función: $I(t) = e^{0,02.t}$, donde t se mide en meses. En el mismo semestre el salario S(t) permaneció constante durante los tres primeros meses y en el mes 4 se produjo un incremento del 11%, único del semestre.

a) Explicitar la función que muestra la evolución de los salarios en el semestre, partiendo de la condición S(0) = 1.
b) Hallar los puntos de intersección de I(t) y S(t) en el intervalo [0, 6].
c) Los asalariados, ¿ganaron o perdieron salario real en el primer semestre de 2002?

**Ejercicio 8**

Las siguientes funciones corresponden a la demanda y la oferta de un producto, ambas expresadas como funciones de q:

Demanda: $p = (1/6).(12 - q)^2$
Oferta: $p = q^2/6$

a) Dibujar ambas curvas en un mismo gráfico.
b) Encontrar el punto de equilibrio: $(q_0, p_0)$.
c) Calcular el excedente de los consumidores.
d) Calcular el excedente de los productores.

**Ejercicio 9**

**Sea una población de preceptores de ingresos, ordenados en forma creciente, por su nivel de ingresos. Sea la variable** p **que mide la proporción de preceptores, $0 \le p \le 1$, y sea Y(p) la proporción de ingresos acumulados hasta el punto p: $0 \le Y(p) \le 1$.**

**a) Demostrar que: $Y(p) \le p$, $\forall p$.**

**b) Se define el Índice Sintético de Gini como: G = 2.** $\int_{0}^{1}\left[p - Y(p)\right]dp$ .

**c) Dibujar Y(p) =** $\frac{8}{9}p^2 + \frac{p}{9}$ **y calcular G.**

# FACULTAD DE CIENCIAS SOCIALES
# DEPARTAMENTO DE ECONOMÍA

## DIPLOMA EN ECONOMÍA PARA NO ECONOMISTAS

## ASIGNATURA: MATEMÁTICA APLICADA A LA ECONOMÍA

### MATERIAL DE CONSULTA Y CASOS PRÁCTICOS

### CURSO 2004
### PARTE VII

**Profesor: David Glejberman**

## 16. FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

El ahorro mensual de una familia (A) es una función de dos variables: el ingreso mensual (Y) y el gasto mensual (G). Además, se conoce la forma funcional, la forma en que se relacionan estas variables:

$$A = f(Y, G) = Y - G$$

La demanda de un bien depende del precio del bien en el mercado, del nivel de ingreso de los consumidores, de las preferencias de los consumidores, de los precios de los bienes sustitutivos (aceite de oliva y aceite de girasol) y de los precios de los bienes complementarios (automóvil y combustible), entre otras variables.

Diferentes teorías económicas hacen depender el nivel de desempleo (D) de variables como el salario real (S), el nivel de actividad (Y), el tamaño de la población (P), la edad en que la gente empieza a buscar empleo (E), el comportamiento de la migración (M) y una tasa de desempleo friccional ($D_F$), entre otras variables. Entonces, el nivel de desempleo puede expresarse así:

$$D = f(S, Y, P, E, M, D_F)$$

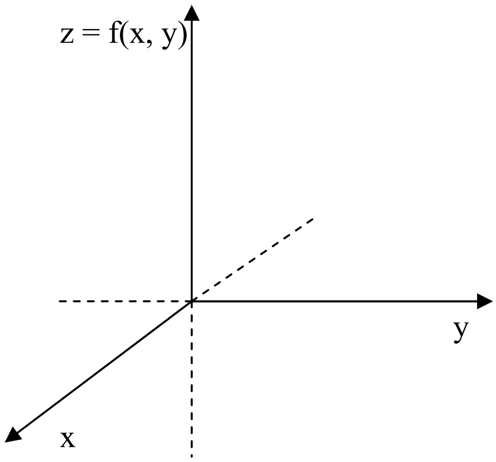
Sin embargo, la forma en que se relacionan estas variables para explicar el nivel de desempleo –el *modelo explicativo*– depende de la teoría económica que se elija.

En Economía interesa conocer la forma en que se relacionan diferentes variables y el efecto o la repercusión que tiene un cambio (un incremento, una variación) en una variable sobre otra u otras. Por ejemplo, podría esperarse que un aumento en el nivel de actividad generara una reducción en el nivel de desempleo. ¿Cuánto debería aumentar el nivel de actividad para que el desempleo se redujera un 1%?

En Economía es muy difícil encontrar que el comportamiento de una variable se explique exclusivamente por una sola variable. Es decir, las relaciones del tipo $y = f(x)$ son muy poco frecuentes. ¿Acaso el gasto de los hogares no puede explicarse exclusivamente por el ingreso familiar? La respuesta es claramente negativa: el gasto se explica por el ingreso actual, por la propensión a ahorrar, por el stock de capital acumulado y por los ingresos esperados (las expectativas de ingresos futuros), entre otras variables. En consecuencia, se hace imprescindible el estudio de las relaciones del tipo $y = f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_k)$.

La mayor parte de las complicaciones para el estudio de funciones de varias variables se generan al pasar de una a dos, es decir, al pasar de las relaciones del tipo $y = f(x)$ a las del tipo $z = f(x, y)$. Entonces, los principales resultados se presentarán para el caso de dos variables, y por excepción, se hará referencia al caso más general. En particular, cuando se trabaja con funciones que dependen sólo de dos variables, es posible imaginar una representación gráfica en tres dimensiones, mientras que no hay representación gráfica posible cuando la relación incluye más de dos variables.

En la representación gráfica de tres dimensiones, los planos xy, xz, zy, forman un “triedro” con 8 “octantes”, en uno de los cuales se cumple a la vez que $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$.




Definición: Una función f en las variables $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_k$ con dominio D(f) es una correspondencia que a cada punto $(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_k) \in D(f)$ le asigna un número real que simbolizamos $f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_k)$.

En el caso de dos variables, usaremos la notación $z = f(x, y)$, donde z es el valor de la función f en el punto (x, y).

Ejemplo[1]: El interés I generado por un capital C colocado por t períodos a la tasa de interés compuesto i es una función de las tres variables: $I = f(C, t, i) = C.(1+i)^t - C$. El dominio de f, D(f), está dado por los valores lógicos de las tres variables: $C > 0$, $t > 0$, $i > 0$.

Ejemplo[2]: En una Institución de Asistencia Médica los médicos de Medicina General son observados si el número medio de medicamentos por consulta supera el 20% del promedio de los k médicos de la especialidad. Si $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_k$ son las cantidades de medicamentos recetados en un mes por los k médicos, y $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_k$ son las cantidades de pacientes atendidos en el mes, ¿cómo se puede plantear la regla que obliga a observar un médico en función de las 2.k variables?

Número medio de medicamentos por consulta del médico i: $\frac{x_i}{y_i}$.

Promedio general: $f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_k, y_1, y_2, y_3, \ldots, y_k) = \frac{\sum_1^k x_i}{\sum_1^k y_i}$

Regla: El médico i debe observarse si $\frac{x_i}{y_i} > 1{,}2 * \frac{\sum_1^k x_i}{\sum_1^k y_i}$.

Ejemplo[3]: Sea la función $f(x, y, z) = L(1 + x) + 2.L(1 + y) + 3.\ L(1 + z)$ la cual mide la utilidad que un consumidor de cultura asigna al consumo mensual de "x" películas de video, "y" películas de cine y "z" obras de teatro al mes. ¿Qué vector de consumo produce más utilidad al consumidor: (0, 3, 1) ó (3, 3, 0)?

f(0, 3, 1) = L1 + 2.L4 + 3.L2 = L128
f(3, 3, 0) = L4 + 3.L4 + 3.L1 = L256

Como L256 > L128, la combinación (3, 3, 0) produce más utilidad.

***Gráfico***

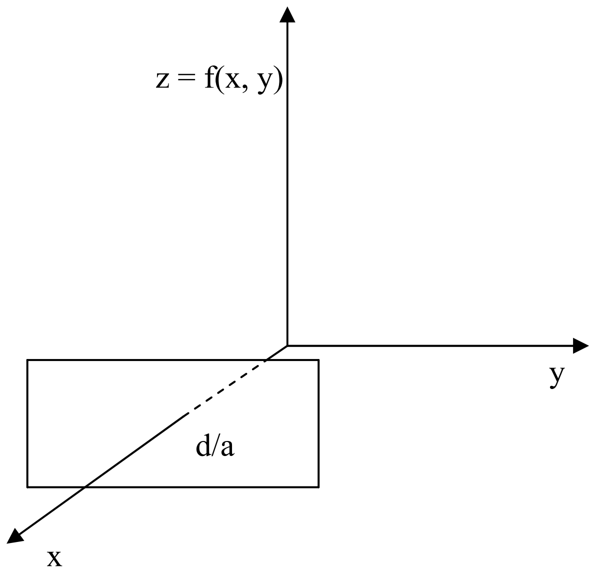
¿Cómo es el gráfico de una función de dos variables en el espacio tridimensional? Consideremos una función del tipo $z = f(x, y)$. El gráfico de esta relación es una *superficie* en el espacio. Un caso particular se tiene cuando $f$ es una función lineal:

$$z = a.x + b.y + c$$

En estos casos el gráfico es un plano. Para representar mediante una sola fórmula todos los planos del espacio de tres dimensiones, la fórmula es:

$$a.x + b.y + c.z = d$$

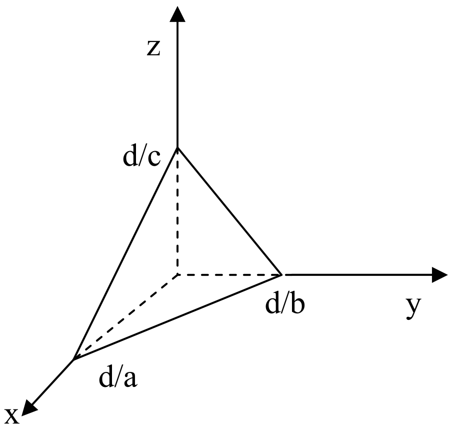
pues permite considerar también el caso $c = 0$. Si por ejemplo es $a \neq 0$ y $b = c = 0$, entonces la relación anterior es de la forma $x = d/a$. ¿Qué puntos del espacio de tres dimensiones satisfacen esta relación? Todos los puntos de coordenadas (d/a, y, z), es decir, todos los puntos de un plano paralelo al plano zy que corta al eje Ox en (d/a, 0, 0).




Con el mismo razonamiento, $y = d/b$ es un plano paralelo al plano xz que corta al eje Oy en (0, d/b, 0), mientras que la relación $z = d/c$ es un plano paralelo al plano xy que corta al eje Oz en (0, 0, d/c).

El caso más general, $a.x + b.y + c.z = d$, tiene una interesante interpretación económica. Si $x, y, z$ son las cantidades a consumir de tres tipos de productos y $a, b, c$ son los precios a los que se pueden adquirir en el mercado, entonces $(a.x + b.y + c.z)$ es el costo de la canasta de consumo conformada por los tres productos. Si $d$ es el gasto que el consumidor está dispuesto a realizar para comprar la canasta, entonces $a.x + b.y + c.z = d$

es una ecuación que establece una *restricción* para el consumidor. Si a, b, c, d son dados (números fijos), entonces pueden existir muchos puntos (x, y, z) que satisfacen la restricción, pero de todos ellos interesan solamente los que cumplen adicionalmente las condiciones: $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$. Entonces, aunque $a.x + b.y + c.z = d$ representa un plano en el espacio tridimensional, desde el punto de vista económico, entendida como una restricción presupuestaria, interesa sólo la parte de ese plano que se encuentra en el primer octante.




Los puntos de corte del plano $a.x + b.y + c.z = d$ con cada eje coordenado se obtienen haciendo cero alternativamente cada par de variables. Incluso, si los productos no son perfectamente divisibles, sólo interesan algunos de los puntos de la intersección del plano con el octante: aquellos que tienen coordenadas enteras.

Ejemplo: La entrada al teatro cuesta \$100, la entrada de cine cuesta \$75 y el alquiler de una película de video cuesta \$50. Encontrar todas las combinaciones posibles de una canasta formada por "x" entradas de teatro, "y" entradas de cine y "z" películas de video, si el consumidor tiene decidido gastar exactamente \$300[20].

Solución:

| x | y | z |
|---|---|---|
| 3 | 0 | 0 |
| 2 | 0 | 2 |
| 1 | 2 | 1 |
| 1 | 0 | 4 |
| 0 | 4 | 0 |
| 0 | 2 | 3 |
| 0 | 0 | 6 |

Cuando abandonamos las funciones lineales para introducir formas funcionales más complejas (polinomios de cualquier grado, fracciones algebraicas, exponenciales, logaritmos, radicales), la interpretación geométrica de funciones de dos variables se vuelve más difícil. Una excepción es el caso de la *superficie esférica* dada por la ecuación

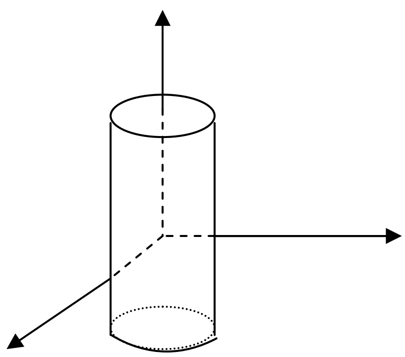
$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \quad (\text{con } r > 0)$$

[20] Esta restricción puede parecer un tanto artificial, sería más razonable plantear la restricción de forma que el consumidor decida gastar "a lo sumo" \$300. Veremos más adelante cómo tratar también estos casos.

Esta ecuación también se puede escribir así: $\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2+(z-0)^2}=r$ que recuerda la fórmula de la distancia entre dos puntos, (x, y, z) y (0, 0, 0). Si hacemos variar (x, y, z) de forma que la distancia al centro de coordenadas (r) se mantenga constante, entonces los puntos (x, y, z) son los que equidistan del centro de coordenadas, y por tanto, definen una superficie esférica con centro en (0, 0, 0) y radio r. Si en la ecuación se cambia el signo de igual por el de menor o igual que, entonces el conjunto de puntos de la relación $x^2 + y^2 + z^2 \le r^2$ es la esfera de centro (0, 0, 0) y radio r.

Está claro que la relación $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ no define unívocamente una función de la forma z = f(x, y). Por ejemplo, al par (x, y) = $\left(\frac{r}{\sqrt{3}}, \frac{r}{\sqrt{3}}\right)$ corresponden dos valores de z: $\pm\frac{r}{\sqrt{3}}$.

¿Cómo es el gráfico de la relación $x^2 + y^2 = 3$? En el plano xy es una circunferencia con centro en (0, 0) y radio $\sqrt{3}$. Al variar z esta forma queda incambiada y, por tanto, el gráfico de la relación es la superficie de un cilindro con eje en el eje Oz y radio $\sqrt{3}$.



***Límites***

La definición de límite en un punto en funciones de dos variables es una simple extensión de la definición para funciones con una sola variable. El entorno de la variable independiente se transforma ahora en un rectángulo en el plano xy.

Definición: $\lim_{\substack{x \to a \\ y \to b}} f(x, y) = c \Leftrightarrow$ Dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $|x - a| < \delta$, $|y - b| < \delta$, $(x, y) \neq (a, b)$, se cumple que: $|f(x, y) - c| < \varepsilon$.

En el punto (a, b) la función f(x, y) tiene límite c si en las proximidades del punto (en un rectángulo formado por los puntos que cumplen a la vez: $a - \delta < x < a + \delta$, $b - \delta < y < b + \delta$), excluido el punto, la función f toma valores tan cercanos a c como se desee. Las técnicas para el cálculo de límites son similares a las utilizadas en el caso de funciones de una sola variable.

Ejemplo:

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ y\to 2}} \frac{(x-1).(x+y-3)}{(e^x-e)\left[(x+y)^2-9\right]} = \lim \frac{(x-1).(x+y-3)}{(e^x-e)(x+y-3).(x+y+3)} = \lim \frac{(x-1)}{e.(e^{x-1}-1).(x+y+3)} =$$

Si ahora se hace el cambio de variable u = x -1 resulta:

$$\lim_{\substack{u\to 0\\ y\to 2}} \frac{u}{e.(e^u-1).(u+y+4)} = \frac{1}{6.e}$$

Habiéndose utilizado el límite tipo: $\lim \frac{e^u-1}{u} = 1$ cuando u → 0.

Así como hemos definido el lím f(x, y) en el punto (a, b), es posible extender la definición para los casos en que las variables → ± ∞. Valen, para dos o más variables, las propiedades relacionadas con órdenes de infinitud y de infinitésimos.

***Continuidad***

Definición: f: f(x, y) es una función continua en el punto (a, b) si se cumple que lím f(x, y) = f(a, b) cuando x → a, y → b.

La definición es análoga a la de continuidad en un punto de funciones de una sola variable. También es análoga la definición de continuidad en un dominio cualquiera: f es continua en D(f) si lo es en cada punto del D(f).

No hay problema en generalizar la definición de continuidad en un punto o en un dominio cualquiera para más de dos variables.

Definición: f: $f(x_1, x_2, \dots, x_k)$ es continua en el punto $(a_1, a_2, \dots, a_k)$ si se cumple que lím $f(x_1, x_2, \dots, x_k) = f(a_1, a_2, \dots, a_k)$ cuando todas las $x_i \to a_i$.

¿Cuál es la interpretación geométrica de una función continua en dos variables? Una función continua con dos variables tiene un gráfico que puede dibujarse como una *sábana* sin agujeros en su dominio. Una función continua en dos o más variables tiene la propiedad que pequeñas variaciones en cualesquiera de las variables independientes ocasionan pequeños cambios en el valor de la función. Si f es continua, entonces, cuando $\Delta x_1 \cong 0$, $\Delta x_2 \cong 0$, ….., $\Delta x_k \cong 0$, resulta que:

$$f(x_1+\Delta x_1, x_2+\Delta x_2, \dots, x_k+\Delta x_k) \cong f(x_1, x_2, \dots, x_k)$$

La suma, la resta, la multiplicación, la división y la composición de funciones continuas, en varias variables, originan funciones que también son continuas, allí donde la suma, resta, multiplicación, división o función compuesta están definidas.

***Funciones homogéneas de grado k***

Definición: La función f: f(x, y) es *homogénea de grado k* en su dominio D(f) si se cumple que $f(t.x, t.y) = t^k.f(x, y)$ $\forall$ (x, y)$\in$ D(f) y $\forall$ t > 0.

Ejemplo: La forma cuadrática f(x, y) = $(x, y).\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ es una función homogénea de grado 2. Efectivamente, $f(x, y) = a.x^2 + 2.b.x.y + c.y^2$. Entonces:

$$f(t.x, t.y) = a.(t.x)^2 + 2.b.(t.x).(t.y) + c.(t.y)^2 = t^2.f(x, y)$$

## Repartido Práctico 16: Funciones de Varias Variables

**Ejercicio 1**

**En los siguientes casos, hallar el valor de la función en los puntos indicados.**

| *Función* | Punto | Valor |
|---|---|---|
| a) $f(x,y) = 3x - 4y^2 + 5$ | (2, -1) | f(2,-1) |
| b) $g(x,y,z)=(2x+3y).e^z$ | (1,2,0) | g(1,2,0) |
| c) $h(t,u) = e^{2t} - e^{-u}$ | (1/2,-2) | h(1/2,-2) |
| d) $j(x,y,z)=\dfrac{x^2-y^2}{xy-z^3}$ | (-1,1,-2) | j(-1,1,-2) |
| e) $k(p_A,p_B)=p_A-1/p_B+\sqrt{p_A \cdot p_B}$ | (10,20) | k(10,20) |
| f) $f(x,y) = 3x - 4y^2 + 5$ | $(x_0+h, y_0)$ | $f(x_0+h, y_0)$ |

**Ejercicio 2**

Se seleccionan R peces de un lago y se marcan convenientemente. Un día después se capturan nuevamente P peces, de los cuales M están marcados. Una estimación de la población total de peces del lago, N, se obtiene mediante la fórmula: N = f(R,P,M) = (R.P)/M. Hallar f(1000, 500, 160) e interpretar el resultado obtenido.

**Ejercicio 3**

**Si una pareja, ambos de ojos marrones, tiene exactamente k hijos, la probabilidad P(x,k) de que x hijos tengan ojos celestes está dada por la fórmula:**

$$P(x,k) = \frac{k!}{x!(k-x)!}.\frac{3^{k-x}}{4^k}$$

**a) Hallar la probabilidad que si la pareja tiene tres hijos, los tres tengan ojos celestes.**

b) Hallar la probabilidad que si la pareja tiene 4 hijos, exactamente 2 de ellos tengan ojos celestes.

**Ejercicio 4**

**Visualizar gráficamente (en el espacio de tres dimensiones), las superficies dadas por las siguientes ecuaciones.**

a) $x = 1$
b) $x - y = 0$
c) $x^2 + y^2 + z^2 = 1$
d) $y = x^2$

**Ejercicio 5**

Indicar cuáles de las siguientes funciones son homogéneas y su grado, si corresponde.

a) $f(x,y) = 3x^2 - 5xy + 4y^2$
b) $g(x,y) = 5x^3y - 8y^4 + 3$

c) $h(x,y) = xy - \dfrac{3x^3}{y} + 2y^2$

## 17. DERIVADAS PARCIALES, DIFERENCIACIÓN, VECTOR GRADIENTE.

***Derivadas parciales***

Definición: Función derivada parcial respecto de x

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = f_x(x,y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h,y) - f(x,y)}{h}$$

Función derivada parcial respecto de y

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = f_y(x,y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x,y+h) - f(x,y)}{h}$$

Función derivada parcial respecto de x en el punto $(x_0, y_0)$

$$\left.\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right|_{\substack{(x=x_0)\\(y=y_0)}} = f_x(x_0,y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h,y_0) - f(x_0,y_0)}{h}$$

Función derivada parcial respecto de y en el punto $(x_0, y_0)$

$$\left.\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right|_{\substack{(x=x_0)\\(y=y_0)}} = f_y(x_0,y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0,y_0+h) - f(x_0,y_0)}{h}$$

Las derivadas parciales en el punto, si existen, son números. Las funciones derivadas parciales son en general funciones que dependen de ambas variables.

¿Qué mide $f_x(x, y)$? Mide el cambio que se opera en f ante un cambio infinitesimal en x, manteniéndose constante la y. Obsérvese que según la definición, el cambio en x es h, y el cambio en f es la diferencia entre $f(x+h, y)$ y $f(x, y)$. Análogamente para $f_y(x, y)$: mide el cambio que se opera en f ante un cambio infinitesimal en y, manteniéndose constante la x.

Esta interpretación de la derivada parcial proporciona una regla sencilla para su cálculo: para hallar $f_x(x, y)$ alcanza con derivar la f respecto de una sola variable, la "x", pues la "y" opera como una constante. Lo mismo vale para $f_y(x, y)$.

Ejemplo: Sea f: $f(x, y) = x^2.y^3 + x^2 - y$. Calcular las derivadas parciales primeras.

$f_x(x, y) = 2.x.y^3 + 2.x$
$f_y(x, y) = 3.y^2.x^2 - 1$

¿Cuánto valen las derivadas parciales en el punto (1, 2)?

$f_x(1, 2) = 20$
$f_y(1, 2) = 13$

***Interpretación geométrica de las derivadas parciales en un punto***

$f_x(x_0, y_0)$ mide la tasa de variación de f(x, y) en la dirección del eje Ox a partir del punto $(x_0, y_0)$. $f_y(x_0, y_0)$ mide la tasa de variación de f(x, y) en la dirección del eje Oy a partir del punto $(x_0, y_0)$.

***Interpretación económica de las derivadas parciales en un punto***

*Productividad, Utilidad y Costo marginales*

1) Sea Z = f(x,y). Entonces $\frac{\partial Z}{\partial x}$ es la *razón de cambio* de Z con respecto a **x** cuando **y** se mantiene constante. Análogamente: $\frac{\partial Z}{\partial y}$ es la *razón de cambio* de Z con respecto a **y** cuando **x** se mantiene constante.

2) Sea C = f(x,y) una función del costo conjunto de producir "x" unidades de un producto y "y" unidades de otro producto. Entonces $\frac{\partial C}{\partial x}$ se llama el ***costo marginal con respecto a x,*** y se interpreta como la *razón de cambio* de C con respecto a **x** cuando **y** se mantiene fija. El costo marginal $\frac{\partial C}{\partial x}$ expresa cómo varía aproximadamente el costo total al aumentar la producción de x en una unidad manteniendo constante la producción de y. En forma análoga, $\frac{\partial C}{\partial y}$ es el ***costo marginal con respecto a y***.

   Ejemplo: $C(x, y) = 100 + 5.x + 10.y + 0,01.(x - 1)^2.(y - 2)$. Hallar el costo marginal de producir una unidad adicional de X si actualmente se produce x=10 y y=20.

   $C_x(x, y) = 5 + 0,01.2.(x - 1).(y - 2)$
   $C_x(10, 20) = 5 + 0,02.9.18 = 8,24$

   ¿Cuál es el incremento del costo al pasar de la combinación (10, 20) a producir (11, 20)?

   C(11, 20) – C(10, 20) = 8,42. Entonces la derivada parcial respecto de x, en el punto, es una buena aproximación del incremento del costo de producción.

3) Sea Q = f(t,k) una función que expresa el nivel de la producción dependiendo de las cantidades a utilizar de dos factores: trabajo (t) y capital (k). Entonces $\frac{\partial Q}{\partial k}$ se llama la ***productividad marginal con respecto a k***, es la razón de cambio de Q con respecto a k cuando "t" permanece constante, y expresa aproximadamente cómo varía el nivel de la producción al aumentar la dotación de capital en una unidad manteniendo constante el factor "t". En forma similar se define la ***productividad marginal con respecto a t*** *(productividad marginal del trabajo).*

4) Una *función de utilidad* indica un valor (utilidad) que el consumidor asigna al consumo de ciertas cantidades de una canasta de productos. Sea $U = f(x,y)$ una función de utilidad, donde $x$ e $y$ son las cantidades a consumir de dos productos X e Y. Se denomina ***utilidad marginal de X*** a $\frac{\partial U}{\partial x}$, y representa aproximadamente el cambio en la función de utilidad que resulta de aumentar en una unidad el consumo de X, manteniendo constante el consumo de Y.

Si el consumidor dispone de un presupuesto C para gastar en ambos productos y los precios de X e Y son $p_x$ y $p_y$, entonces un problema interesante consiste en maximizar la función de utilidad sujeta a la restricción presupuestaria: $x.p_x+y.p_y = C$.

*Productos competitivos y complementarios*

**Dos productos pueden estar relacionados de forma que los cambios en el precio de uno de ellos tengan influencia en la demanda del otro producto y viceversa. Tal puede ser el caso del precio del gas-oil y la demanda de autos gasoleros. Supongamos que las funciones de demanda de los dos productos, A y B, dependen, ambas, de los precios de A y B.**

**Función de demanda de A: $q_A = f(p_A, p_B)$**

**Función de demanda de B: $q_B = g(p_A, p_B)$**

**A y B son *productos competitivos* cuando para ambos un aumento en el precio de uno de ellos hace aumentar la demanda del otro, si el precio del otro no cambia.**

$$\boxed{\text{A y B son competitivos } \Leftrightarrow \frac{\partial q_A}{\partial p_B} \succ 0 \quad y \quad \frac{\partial q_B}{\partial p_A} \succ 0}$$

A y B son *productos complementarios* cuando para ambos un aumento en el precio de uno de ellos hace disminuir la demanda del otro, si el precio del otro no cambia.

$$\boxed{\text{A y B son complementarios } \Leftrightarrow \frac{\partial q_A}{\partial p_B} \prec 0 \quad y \quad \frac{\partial q_B}{\partial p_A} \prec 0}$$

**Ejemplos: El gas-oil y los autos con ese combustible son productos complementarios. El aceite de oliva y el aceite de girasol son productos competitivos.**

*Regla de la cadena*

**Esta regla se utiliza para hallar las derivadas parciales de funciones compuestas.**

**Supongamos que las siguientes funciones son derivables en sus respectivos dominios.**

$$z = f(x, y)$$
$$x = g(t, w)$$
$$y = h(t, w)$$

¿Cuál es la derivada parcial de z con respecto a t? La regla de la cadena para derivación de funciones compuestas expresa que si $z = f[g(t, w), h(t, w)]$, entonces:

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial g}.\frac{\partial g}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial h}.\frac{\partial h}{\partial t} = f_g.g_t + f_h.h_t$$

De la misma forma, la derivada parcial de z con respecto a w es:

$$\frac{\partial z}{\partial w} = \frac{\partial f}{\partial g}.\frac{\partial g}{\partial w} + \frac{\partial f}{\partial h}.\frac{\partial h}{\partial w} = f_g.g_w + f_h.h_w$$

Ejemplo: Sea f: $f(x, y) = x^2 + 2.x.y$ donde $x = e^t.w$, $y = t^2 + w$. Para hallar $f_t$ se podría expresar f como función de t y w, $f(t, w) = (e^t.w)^2 + 2.(e^t.w).(t^2 + w)$, y luego derivar con respecto a t, o bien aplicar la regla de la cadena, así:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial(x^2 + 2.x.y)}{\partial x}.\frac{\partial(e^t.w)}{\partial t} + \frac{\partial(x^2 + 2.x.y)}{\partial y}.\frac{\partial(t^2 + w)}{\partial t} = (2x + 2y).e^t.w + (2x).(2y)$$

resultado que puede expresarse, si se desea, exclusivamente como función de t y w:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = 2.e^t.w.(e^t.w + t^2 + w) + 4.e^t.w.t$$

***Derivadas de orden superior***

Las derivadas parciales que hemos definido en relación a la función f(x, y), se denominan *derivadas parciales de primer orden*, y son dos: $f_x(x, y)$ y $f_y(x, y)$. A continuación se definen las *derivadas parciales de segundo orden*. La derivada segunda respecto de x de la función f(x, y) se obtiene derivando respecto de x la función $f_x(x, y)$. Notación:

$$f_{xx}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = [f_x(x,y)]'_x$$

Análogamente:

$$f_{yy}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = [f_y(x,y)]'_y$$

$$f_{xy}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = [f_x(x,y)]'_y$$

$$f_{yx}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = [f_y(x,y)]'_x$$

En condiciones muy generales se cumple que $f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y)$. Una condición suficiente para que se cumpla la igualdad es que ambas derivadas segundas sean funciones continuas.

La derivada tercera de f(x, y) respecto de x se obtiene derivando respecto de x la función $f_{xx}(x, y)$. Otras derivadas terceras se obtienen con definiciones similares.

Ejemplo: Sea f: f(x, y) una función definida como forma cuadrática.

f(x, y) = $(x, y).\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Queremos conocer las derivadas parciales primeras y segundas de la forma. f(x, y) también se puede escribir así: f(x, y) = $a.x^2 + 2.b.x.y + c.y^2$. Entonces:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2.a.x + 2.b.y \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 2.b.x + 2.c.y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2.a \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2.c$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2.b \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 2.b$$

A partir de las derivadas de segundo orden se puede definir una matriz cuadrada denominada *matriz hessiana*, concepto sobre el que volveremos al tratar los problemas relacionados con la determinación de los extremos de la función. La matriz hessiana para el caso de dos variables es:

$$\text{H(x, y)} = \begin{pmatrix} f_{xx}(x, y) & f_{xy}(x, y) \\ f_{yx}(x, y) & f_{yy}(x, y) \end{pmatrix}$$

y su correspondiente determinante es:

$$|H(x, y)| = \begin{vmatrix} f_{xx}(x, y) & f_{xy}(x, y) \\ f_{yx}(x, y) & f_{yy}(x, y) \end{vmatrix}$$

***Diferenciación***

El diferencial de una función, cuando se trabaja en una variables, es una función de dos variables: x y dx.

$$y = f(x)$$
$$dy = f\,'(x).dx$$

Cuando se trabaja con dos variables, z = f(x, y), el diferencial es una función de cuatro variables: x, y, dx, dy.

<u>Definición</u>: Si z = f(x, y), entonces: dz = $f_x$(x, y).dx + $f_y$(x, y).dy

Condición suficiente de diferenciabilidad: f es diferenciable si $f_x$ y $f_y$ son funciones continuas.

El diferencial dz mide *aproximadamente* el cambio que se origina en la función z como consecuencia de las variaciones dx y dy en las variables independientes.

Ejemplo: Una empresa produce dos productos, X e Y, mediante un proceso de producción que tiene la siguiente función de costos:

$$C = 1000 + 5.x + 6.y + 0{,}2.x.y$$

El diferencial de C es: $dC = (5 + 0.2.y).dx + (6 + 0.2.y).dy$, para todo (x,y). Si actualmente se producen 10 ton. de X y 12 ton. de Y, ¿Cómo incide aproximadamente en el costo total un incremento de la producción a 10,5 y 12,2 respectivamente?

$dx = 0{,}5 \qquad f_x(10,12) = 7{,}4$
$dy = 0{,}2 \qquad f_y(10,12) = 8$

$dC = 7{,}4 \times 0{,}5 + 8 \times 0{,}2 = 5{,}3$

¿Cuál es el incremento verdadero de C? $\Delta C = C(10{,}5;\ 12{,}2) - C(10,\ 12) = 5{,}32$.

<u>Teorema</u>: H) $z = f(x, y)$ diferenciable $\qquad$ T) $dz = f_t.dt + f_w.dw$
$x = g(t, w)$ diferenciable
$y = h(t, w)$ diferenciable

Por definición es $dz = f_x(x, y).dx + f_y(x, y).dy$. El teorema prueba que si x e y son a su vez funciones de otras dos variables, entonces el dz puede expresarse con la misma fórmula de la definición, pero en función de las variables últimas: t, w. Esta propiedad se conoce con el nombre de *invariancia del diferencial* y expresa que el dz tiene la misma forma tanto si x e y son variables independientes o si a su vez son funciones de otras variables.

Ejemplo: Sea f: $f(x, y) = x^2 + 2.x.y$ donde $x = e^t.w$, $y = t^2 + w$. Anteriormente calculamos la derivada parcial respecto de t. Para calcular dz necesitamos conocer también la derivada parcial respecto de w.

$$\frac{\partial f}{\partial t} = 2.e^t.w.(e^t.w + t^2 + w) + 4.e^t.w.t$$

$$\frac{\partial f}{\partial w} = 2.(2.e^t.w + t^2 + w)$$

Entonces: $dz = \left[2.e^t.w.(e^t.w + t^2 + w) + 4.e^t.w.t\right]dt + 2.(2.e^t.w + t^2 + w).dw$

***Derivación parcial implícita***

La relación $z^2 = x^2 + y^2$ permite despejar la z como función de las otras dos variables: $z = f(x, y)$[21]. Pero en muchos otros ejemplos el "despeje" es bastante difícil o imposible. En condiciones muy generales se pueden calcular las derivadas parciales de f sin necesidad de hacer explícita la relación funcional. El método consiste en derivar ambos miembros de la relación asumiendo que z es una función (derivable) de las otras dos variables. Para hallar $z_x$ en el ejemplo, se procede como sigue.

---

[21] En rigor, la relación planteada da origen a dos funciones, $f_1(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ y $f_2(x, y) = -\sqrt{x^2 + y^2}$.

$$\frac{\partial(z^2)}{\partial x} = \frac{\partial(x^2+y^2)}{\partial x}$$
$$2.z.z_x = 2.x$$
$$z_x = \frac{2.x}{2.z} = \frac{x}{z}$$

Análogamente se obtiene: $z_y = \dfrac{y}{z}$. Ambas derivadas parciales quedaron expresadas como funciones de z. En muchos problemas esto no presenta dificultad, pues se sabe, por ejemplo, que z debe ser positiva, y lo que interesa es conocer el signo de las derivadas parciales.

Ejemplo: Sea C una función del costo conjunto de producción de x unidades del producto X y y unidades del producto Y, definida implícitamente por la ecuación:

$$C^2 + C = (10 + x^2).y^2 + 40.y.\sqrt{21+x^2} + 400$$

a) ¿Cuál es el costo total de producir 10 unidades de X y 8 unidades de Y?

$C^2(10, 8) + C(10, 8) = (10 + 10^2).8^2 + 40.8.\sqrt{21+10^2} + 400 = 10.960$

$C^2 + C = 10.960$

$C^2 + C - 10.960 = 0$

$C(10, 8) = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1+4.10960}}{2} = \dfrac{-1 \pm 209{,}4}{2}$

La única raíz positiva es $C(10, 8) = 104{,}2$.

b) Hallar los costos marginales respecto de X e Y cuando $x = 10$, $y = 8$.

Se trata de hallar $C_x(10, 8)$ y $C_y(10, 8)$. Para ello calculamos las funciones derivadas parciales, y luego las evaluamos en el punto.

$$\left.(C^2 + C)\right|'_x = y^2.2.x + 40.y.\frac{2.x}{2.\sqrt{21+x^2}}$$
$$2.C.C_x + C_x = y^2.2.x + 40.y.\frac{2.x}{2.\sqrt{21+x^2}}$$
$$(2.C+1).C_x = y^2.2.x + 40.y.\frac{2.x}{2.\sqrt{21+x^2}}$$
$$C_x = \frac{y^2.2.x + 40.y.\dfrac{2.x}{2.\sqrt{21+x^2}}}{2.C+1}$$

Al evaluar en el punto (10, 8) se obtiene: $C_x(10, 8) = 4{,}54$. Con el mismo procedimiento se calcula la función $C_y(x,y)$ y al evaluar en el punto se obtiene $C_y(10, 8) = 6, 36$. Interpretación: \$4,54 es aproximadamente el costo incremental al pasar de 10 unidades de X y 8 unidades de Y a producir 11 unidades de X y 8 unidades de Y. \$6,36 es aproximadamente el costo incremental de producir una unidad adicional de Y dejando constante la cantidad de X.

***Derivada total***

En algunos problemas de Economía, las variables no son independientes, es decir, x e y están relacionadas de alguna manera.

Sea la función $z = f(x, y)$ donde a su vez $y = g(x)$. Se trata de calcular la tasa de cambio de $z$ teniendo en cuenta que las variables no son independientes sino que están relacionadas a través de la función g. Para calcular la derivada de $z$ respecto de $x$ se aplica la regla de la cadena.

$$z'_x = f'_x..x'_x + f'_y.y'_x = f'_x + f'_y.g'(x)$$

Ejemplo: La función de demanda del producto A es función del precio del producto A y del precio de un sustituto B, mediante la relación:

$$z = q_A = \frac{1}{p_A}.(p_B - 2)^2$$

donde a su vez los precios de ambos productos se relacionan así: $p_B = 2.(1 - e^{-p_A})$. Se quiere calcular la derivada de la función de demanda con relación al precio del producto A.

$$z'_{p_A} = \left[\frac{1}{p_A}(p_B - 2)^2\right]'_{p_A} + \left[\frac{1}{p_A}(p_B - 2)^2\right]'_{p_B}.\left[2(1 - e^{-p_A})\right]'_{p_A} = \frac{-(p_B - 2)^2}{p_A^2} + \frac{2(p_B - 2)}{p_A}.2.e^{-p_A}$$

Luego, si el precio actual del producto A es 2, ¿cuál es aproximadamente la incidencia en la demanda del producto A de un incremento del 10% en su precio?

$p_A = 2$. Entonces, $p_B = 2.(1-e^{-2}) = 1{,}73$.

$$dz = dq_A = z'_{p_A}.dp_A = \left[\frac{-(1{,}73 - 2)^2}{2^2} + \frac{2.(1{,}73 - 2)}{2}.2.e^{-2}\right].0{,}20 = -0{,}018$$

La incidencia de un incremento en el precio de A del 10% es aproximadamente una disminución de la demanda del 1,8%.

***Vector gradiente***

Dada una función de n variables, diferenciable respecto de todas sus variables, se llama vector gradiente de f al vector que tiene por componentes, en forma ordenada, las funciones derivadas respecto de cada una de las variables.

$$z = f(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n) \qquad Vector\ gradiente: \nabla f = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_2} \\ \ldots\ldots \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

En el caso particular de funciones de dos variables, f: f(x, y), el vector gradiente es:

$$\nabla f = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix}$$

# Repartido Práctico 17.1: Derivadas Parciales

**Ejercicio 1**

En cada uno de los siguientes casos calcular las funciones derivadas parciales respecto de todas las variables.

a) $f(x,y) = 3x^2 - 4y^4 + 5y - 8$
b) $g(x,y,z) = 6xy - y^2 + 2yz$
c) $h(z,t) = 5tz - 4z + 1$
d) $j(w,v) = e^w - e^{-w} + (1/2)v$
e) $k(p,q) = \sqrt{p.q}$
f) $r(l,k) = 5.l^{0,2}.k^{0,8}$
g) $s(x,y) = e^{2(x+y)}$
h) $m(u,v) = L(u^2+v^3)$

**Ejercicio 2**

Calcular las derivadas parciales en los puntos que se indican a continuación, en relación con las funciones del **Ejercicio 1**.

a) $f_x(1,1)$
b) $f_y(-1,-1)$
c) $g_z(2,2,-2)$
d) $h_t(5,6)$
e) $j_w(2,0)$
f) $j_v(2,0)$
g) $k_q(10,100)$
h) $r_k(50,40)$
i) $s_y(-3,-3)$
j) $m_v(1,1)$

**Ejercicio 3**

Demostrar que si $z = x.e^{x-y} - y.e^{y-x}$, entonces: $\dfrac{\partial z}{\partial x} + \dfrac{\partial z}{\partial y} = e^{x-y} - e^{y-x}$

**Ejercicio 4**

Sea el polinomio $P(x,y) = 3x^2 + 4xy - 5y^2$.

a) Demostrar que $P(\lambda x,\lambda y) = \lambda^2.P(x,y)$.
b) Hallar las dos derivadas parciales de P.
c) Hallar las cuatro derivadas segundas, y verificar que dos de ellas son iguales.
d) Calcular todas las derivadas terceras de P, y verificar que son todas iguales.

**Ejercicio 5**

En los siguientes problemas $C(x,y)$ es una función del costo de producción y “x” e “y” son las cantidades a producir de dos artículos. Hallar la función del costo marginal para cada uno de los artículos.

a) $C(x,y) = 4x + 0,3y^2 + 2y + 500$
b) $C(x,y) = x\sqrt{x+y} + 1000$
c) $C(x,y) = 0,03(x+y)^3 - 0,6(x+y)^2 + 4,5(x+y) + 7700$

**Ejercicio 6**

Sea $f(x,y) = 3x^2 - 6xy - 4y^3 + 5x^2y - 4$.

a) Calcular $f_{xx}(1,2)$.
b) Calcular $f_{xyy}(1,2)$.

# Repartido Práctico 17.1: Derivadas Parciales

**Ejercicio 7**

**Sea la función del costo de producción de dos productos A y B:**

$$C(q_A,q_B) = \sqrt{3.q_A^2 + 4.q_B^2 + 500}$$

Hallar $\dfrac{\partial^2 C}{\partial q_A \partial q_B}$ cuando $q_A=10$ y $q_B=15$.

**Ejercicio 8**

Sea $f(x,y) = L(x^2 + y^2)$. Demostrar que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$.

**Ejercicio 9 (Teorema de Euler)**

Probar que si f de dos variables, admite derivadas parciales continuas y es homogénea de grado k, entonces se cumple que $x.\dfrac{\partial f}{\partial x} + y.\dfrac{\partial f}{\partial y} = k.f(x,y)$.

**Ejercicio 10**

En cada caso, hallar las derivadas que se indican.

| Función original | Relaciones entre variables | Derivadas a calcular |
|---|---|---|
| a) $f(x,y) = x^3 + 2xy - 3y^2$ | $x=t^2-2u$ $y=5u^2$ | $f_t$, $f_u$ |
| b) $f(x,y) = e^{x+y}$ | $x=t^2+3$ $y=t^{3/2}$ | $f_t$ |
| c) $f(x,y,z) = L(x^2+y^2+z^2)$ | $x=2-3t$ $y= t^2+3$ $z=4-t$ | $f_t$ |
| d) $f(x,y) = \sqrt{5x+2y}$ | $x=4t+7$ $y= t^2-3t+4$ | $f_t$ cuando $t=1$ |

**Ejercicio 2**

La siguiente información corresponde a dos productos relacionados, A y B.

Función de costos: $C(q_A,q_B) = (3q_A^2 + q_B^2 + 4)^{1/3}$

Funciones de demanda: $\begin{cases} q_A = 10 - p_A + p_B^2 \\ q_B = 20 + p_A - 11p_B \end{cases}$

Calcular, usando la regla de la cadena, las derivadas parciales de la función de costos respecto de los precios, en el punto ($p_A=25$, $p_B=4$).

**Ejercicio 3**

Sean $Z = f(x,y)$, con $x=g(t)$ y $y=h(t)$.

a) Hallar, usando la regla de la cadena, $Z_t$'.
b) Hallar $Z_t$' en el caso particular $h(t)=t$.

# Repartido Práctico 17.2: Productos Competitivos y Complementarios

**Ejercicio 1**

Hallar el costo marginal del artículo “y” para el nivel de producción dado en cada uno de los casos siguientes casos.

| Función del costo de producción | Nivel de la producción |
|---|---|
| a) $C(x,y) = 4x + 0{,}3y^2 + 2y + 500$ | x=20, y=30 |
| b) $C(x,y) = x\sqrt{x+y} + 1000$ | x=40, y =60 |
| c) $C(x,y) = 0{,}03(x+y)^3 – 0{,}6(x+y)^2 + 4{,}5(x+y) + 7700$ | x=50, y=50 |

**Ejercicio 2**

**En los siguientes casos P(t,k) es una función de producción, y “t” y “k” son los factores de la producción (t= trabajo y k=capital). Hallar las funciones de producción marginales respecto de los factores.**

a) $P(t,k) = 20.t.k – 2.t^2 – 4.k^2 + 800$
b) $P(t,k) = 10.t^{0,2}.k^{0,8}$

**Ejercicio 3 (Función de producción de Cobb-Douglas)**

En Economía, una función de producción Cobb-Douglas tiene la forma:

$$P(t,k) = a.t^b.k^c$$

**donde a, b y c son constantes, a>0 y b+c=1. Para una función de producción de esta forma demostrar las siguientes proposiciones.**

a) $\dfrac{\partial P}{\partial t} = \dfrac{b.P}{t}$

b) $\dfrac{\partial P}{\partial k} = \dfrac{c.P}{k}$

c) P es una función homogénea de grado 1.

c) $t.\dfrac{\partial P}{\partial t} + k.\dfrac{\partial P}{\partial k} = P.$ Esta proposición demuestra que en una función Cobb-Douglas de producción, al sumar las productividades marginales de cada factor multiplicadas por la cantidad de ese factor se obtiene la producción total.

**Ejercicio 4**

En los siguientes problemas $q_A$ y $q_B$ son las funciones de demanda para los productos A y B, donde $p_A$ y $p_B$ son los respectivos precios. Hallar las derivadas parciales y determinar si A y B son “competitivos”, “complementarios” o ninguno de los dos.

a) $q_A = 1000 – 50p_A + 2p_B$
$q_B = 500 + 4p_A – 20p_B$

b) $q_A = 20 – p_A – 2p_B$
$q_B = 50 – 2p_A – 3p_B$

c) $q_A = \dfrac{100}{p_A\sqrt{p_B}}$; $q_B = \dfrac{500}{p_B\sqrt[3]{p_A}}$

## Repartido Práctico 17.2: Productos Competitivos y Complementarios

**Ejercicio 5**

Sea la función de producción $P(t,k) = \dfrac{k.t}{k+t}$.

a) Hallar las funciones de productividad marginal.
b) Demostrar que cuando $t = k$, la suma de las productividades marginales es constante.

**Ejercicio 6**

**Los ingresos anuales de los egresados universitarios, diez años después de recibidos, puede modelarse actualmente por la ecuación:**

$Y = 10.000 + 800.t + 600.u$

**donde t y u son los años de experiencia en el trabajo antes y después de recibir el título universitario. Hallar las derivadas parciales de Y e interpretar los resultados obtenidos.**

Ejercicio 7

**Las siguientes son las funciones de demanda de dos productos relacionados A y B.**

$$q_A = e^{-p_A/p_B} \qquad q_B = \frac{16}{p_A \cdot p_B^2}$$

**a) Estudiar si A y B son competitivos o complementarios.**
**b) Si los precios de A y B son \$1 y \$2 respectivamente, estimar el cambio en la demanda de A cuando el precio de B disminuye \$0,04 y el precio de A se mantiene constante.**

Ejercicio 8

**La siguiente es la función del costo de producción de dos productos A y B.**

$$C(q_A, q_B) = \frac{q_A^2 \cdot \sqrt{q_B^3 + q_A}}{17} + q_A \cdot \sqrt[3]{q_B} + 600$$

**a) Encontrar las funciones de costos marginal respecto de las cantidades a producir.**
**b) Calcular el costo marginal respecto de $q_A$ cuando $q_A$=17 y $q_B$=8.**
**c) Estimar el cambio en el costo si la producción del producto A disminuye de 17 a 16 unidades, mientras que la producción del producto B se mantiene en 8.**

## 18. ELASTICIDAD PARCIAL

Definición: Sea $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_k)$. Se denomina *elasticidad parcial* de $z$ con respecto a $x_i$ a la elasticidad de $z$ con respecto a $x_i$ cuando las otras variables se consideran constantes.

$$\varepsilon_{x_i} = \frac{\dfrac{\partial f}{\partial x_i}}{\dfrac{f(x_1, x_2, \ldots, x_k)}{x_i}}$$

$\varepsilon(x_i)$ es aproximadamente la variación porcentual de $f$ como consecuencia de un incremento del 1% en $x_i$, manteniéndose constantes las demás variables.

Ejemplo: Sea $f$: $f(x, y) = \alpha.x^{\beta}.y^{\gamma}$. Calcular la elasticidad de $f$ con respecto a $x$ e $y$.

$f_x(x, y) = \alpha.\beta x^{\beta-1}.y^{\gamma}$. Entonces: $\varepsilon_x = \dfrac{\alpha.\beta.x^{\beta-1}.y^{\gamma}}{\dfrac{\alpha.x^{\beta}.y^{\gamma}}{x}} = \beta$ . Análogamente resulta $\varepsilon_y = \gamma$ .

Sea una función de demanda para un producto A, $q_A = f(p_A, p_B)$, donde $q_A$ es la cantidad demandada de A cuando su precio por unidad es $p_A$ y el precio por unidad de otro producto relacionado B es $p_B$. La *elasticidad parcial de la demanda de A con respecto a* $p_A$ se define así:

$$\varepsilon_{p_A} = \frac{\dfrac{\partial q_A}{\partial p_A}}{\dfrac{q_A}{p_A}}$$

La *elasticidad parcial de la demanda de A con respecto a* $p_B$ se define análogamente así:

$$\varepsilon_{p_B} = \frac{\dfrac{\partial q_A}{\partial p_B}}{\dfrac{q_A}{p_B}}$$

En términos generales, $\varepsilon(p_A)$ es la razón de cambio (porcentual) en la cantidad demandada de A, frente a un cambio porcentual en el precio de A cuando el precio de B está fijo. En forma similar, $\varepsilon(p_B)$ puede interpretarse como la razón de cambio porcentual en la cantidad demandada de A frente a un cambio porcentual en el precio de B cuando el precio de A está fijo.

# Repartido Práctico 18: Elasticidad Parcial

**Ejercicio 1**

Sea f: $f(x_1, x_2, \ldots, x_k) = A.x_1^{\alpha_1}.x_2^{\alpha_2}.....x_k^{\alpha_k}$. Calcular $\varepsilon(x_i)$.

**Ejercicio 2**

En los siguientes tres casos encontrar $\varepsilon(p_A)$ y $\varepsilon(p_B)$ para los valores dados de $p_A$ y $p_B$.

Caso 1: $q_A = 1000 - 50.p_A + 2.p_B$, con $p_A = 2$ y $p_B = 10$.

Caso 2: $q_A = 20 - p_A - 2.p_B$, con $p_A = 2$ y $p_B = 2$.

Caso 3: $q_A = 100/(p_A.p_B^{0,5})$, con $p_A = 1$ y $p_B = 4$.

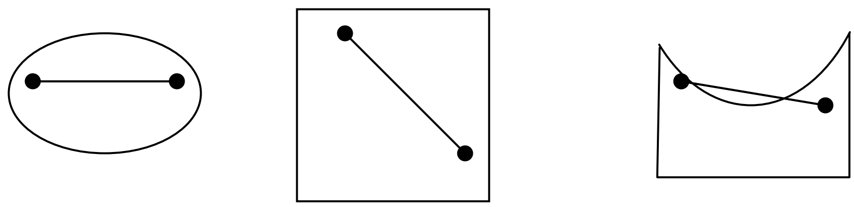
**Ejercicio 3**

**Sea la función de demanda del producto A, $q_A = e^{-p_A/p_B}$. Calcular $\varepsilon(p_A)$ y $\varepsilon(p_B)$.**

## 19. CONJUNTOS CONVEXOS Y FUNCIONES CONVEXAS

***Conjunto convexo***

Definición: Un conjunto es ***convexo*** si el segmento que une dos puntos cualesquiera del conjunto, también pertenece al conjunto.

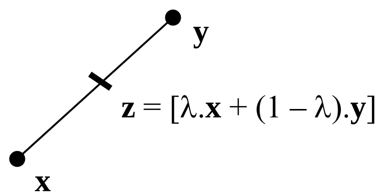


**Convexo** **Convexo** **No es convexo**

Aunque los gráficos corresponden a conjuntos definidos en el plano, la definición es válida para puntos con cualquier número de coordenadas. Ejemplos de conjuntos convexos: una semirrecta, un intervalo abierto, un intervalo cerrado, un cuadrado, un círculo, una esfera. Si **x** e **y** son dos puntos cualesquiera del conjunto, entonces la expresión:

$$\mathbf{z} = [\lambda.\mathbf{x} + (1-\lambda).\mathbf{y}] \quad \text{con } \lambda \in [0,1]$$

representa el conjunto de puntos del segmento **xy**. En particular, cuando $\lambda = 1$ resulta $\mathbf{z} = \mathbf{x}$, y cuando $\lambda = 0$ resulta $\mathbf{z} = \mathbf{y}$.




*Observaciones*

1. Los espacios vectoriales son conjuntos convexos (pues toda combinación lineal de dos vectores es un vector del espacio).
2. Como casos particulares en $R^2$, $R^3$ y $R^n$: son conjuntos convexos las rectas, los planos, los hiperplanos, las semirrectas, los semiplanos y los semiespacios.
3. Propiedad: La intersección de dos conjuntos convexos también es un conjunto convexo.

***Convexidad y concavidad***

Definición: Una función f con *dominio convexo* es una ***función convexa*** si para todo par de puntos del dominio, **x** e **y**, se cumple que:

$$f[\lambda.\mathbf{x} + (1-\lambda).\mathbf{y}] \leq f(\lambda.\mathbf{x}) + (1-\lambda).f(\mathbf{y}) \quad \forall \lambda \in [0,1]$$

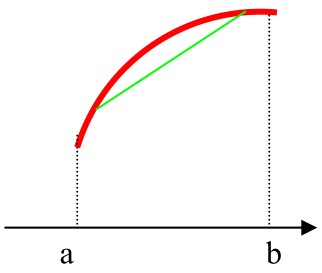
Una función f con *dominio convexo* es una ***función cóncava*** si para todo par de puntos del dominio, **x** e **y**, se cumple que:

$$f[\lambda.\mathbf{x} + (1 - \lambda).\mathbf{y}] \geq f(\lambda.\mathbf{x}) + (1 - \lambda).f(\mathbf{y}) \quad \forall\ \lambda \in [0,1]$$

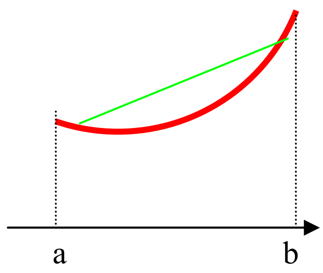
La interpretación geométrica que se realiza a continuación también es válida para superficies (dos variables) o hiper superficies (tres o más variables).

Sea una función $y = f(x)$ definida en el intervalo [a, b]. Se dice que *f es convexa en [a, b]* (o con concavidad positiva o cóncava “hacia arriba”) cuando para todo par de puntos del intervalo, la cuerda (el segmento de recta) que determinan se dibuja por encima de la gráfica de f.

Se dice que *f es cóncava en [a, b]* (o con concavidad negativa o cóncava “hacia abajo”) cuando para todo par de puntos del intervalo, la cuerda (el segmento de recta) que determinan se dibuja por debajo de la gráfica de f.




La función es cóncava




La función es convexa

Propiedades

*Para funciones de una sola variable*

1. Si f: f(x) con D(f) = R y con derivada segunda, entonces f es convexa si $f''(x) > 0$ $\forall\ x \in R$.

2. Si f: f(x) con D(f) = [a,b] y con derivada segunda, entonces f es convexa si $f''(x) > 0$ $\forall\ x \in [a,b]$.

*Para funciones de una, dos o más variables*

1. Si f es cóncava, entonces (-f) es convexa, y viceversa.

2. Si f y g son cóncavas (convexas), entonces (f+g) es cóncava (convexa).

3. Si $f(x_1,x_2,\ldots\ldots,x_n)$ está definida en un dominio convexo, entonces es una función convexa si todos los valores propios de la matriz hessiana $H_f$ son $\geq 0$. (Si f es una

función de varias variables, entonces, el elemento genérico de la matriz H es $h_{ij} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i . \partial x_j}$).

4. Si f(x,y) está definida en un dominio convexo, entonces es una función convexa si se cumplen a la vez las dos condiciones siguientes:

$$\begin{cases} \left|H_f\right| \geq 0, \forall (x,y) \in D(f) \\ Traza(H_f) \geq 0, \forall (x,y) \in D(f) \end{cases}$$

5. Toda función lineal es convexa.

6. Si $f(x_1,x_2,.....,x_n)$ es una función convexa, entonces el conjunto formado por los puntos $(x_1,x_2,.....,x_n)$ que verifican $f(x_1,x_2,.....,x_n) \leq 0$ es un conjunto convexo.

La existencia de la derivada segunda no es una condición necesaria para el estudio de la concavidad / convexidad de una función. Los siguientes ejemplos ilustran la manera de estudiar esta propiedad de las funciones, en dos casos bien sencillos.

Ejemplo 1: Estudiar la concavidad / convexidad de la función f: $f(x) = x^2$ en todo su dominio.

Aplicando la definición, probaremos que se trata de una función convexa.

$$f[\lambda.x + (1-\lambda).y] = [\lambda.x + (1-\lambda).y]^2 \leq \lambda.x^2 + (1-\lambda).y^2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \lambda^2.x^2 + 2.\lambda.(1-\lambda).x.y + (1-\lambda)^2.y^2 \leq \lambda.x^2 + (1-\lambda).y^2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \lambda.(1-\lambda).(-x^2 + 2.x.y - y^2) \leq 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow - \lambda.(1-\lambda).(x-y)^2 \leq 0$$

lo cual es cierto para todo x e y reales, $\lambda \in [0, 1]$.

Ejemplo 2: Estudiar la concavidad / convexidad de la función f: f(x) = 2.x en todo su dominio.

$$f[\lambda.x + (1-\lambda).y] = 2.[\lambda.x + (1-\lambda).y] = .\ \lambda.(2.x) + (1-\lambda).(2.y)$$

En este caso se cumple la igualdad, y por tanto valen las dos definiciones, f(x) = 2.x es a la vez cóncava y convexa. La convexidad de una función lineal estaba expresada previamente en la propiedad 5.

***Cuasiconcavidad y cuasiconvexidad***

Se supone a continuación que el dominio de la función f es un conjunto convexo (por ejemplo, un intervalo en funciones de una variable, un rectángulo en el caso de funciones de dos variables).

<u>Definición</u>: Una función es **cuasicóncava** si para todo par de valores del dominio de f, **x** e **y**, tales que f(y) ≥ f(x), resulta $f[\lambda.x + (1-\lambda).y] \geq f(x)$, con $\lambda \in [0,1]$.

Definición: Una función es **cuasiconvexa** si para todo par de valores del dominio de f, **x** e **y**, tales que f(y) ≥ f(x), resulta $f[\lambda.x + (1 - \lambda).y] \leq f(y)$, con $\lambda \in [0,1]$. También se puede definir una función f como **cuasiconvexa** si se cumple que -f es cuasicóncava.

Definición: Una función es **cuasicóncava en sentido estricto** si para todo par de valores del dominio de f, **x** e **y**, tales que f(y) ≥ f(x), resulta $f[\lambda.x + (1 - \lambda).y] > f(x)$, con $\lambda \in [0,1]$.

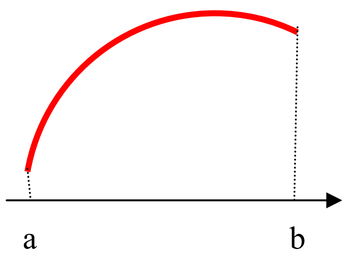
Definición: Una función es **cuasiconvexa en sentido estricto** si para todo par de valores del dominio de f, **x** e **y**, tales que f(y) ≥ f(x), resulta $f[\lambda.x + (1 - \lambda).y] < f(y)$, con $\lambda \in [0,1]$.

Propiedades

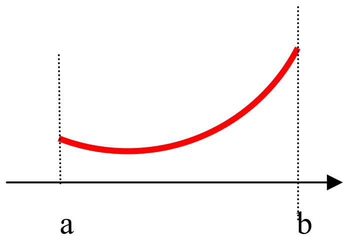
1. Si f es cóncava ⇒ f es cuasicóncava. El recíproco es falso.
2. Si f es convexa ⇒ f es cuasiconvexa. El recíproco es falso.

   Observación: Según estas propiedades, las condiciones de cuasiconcavidad y de cuasiconvexidad son más débiles que las condiciones de concavidad y convexidad respectivamente.
3. Si f es cuasicóncava (cuasiconvexa) y F es estrictamente creciente ⇒ La función compuesta, F[f(**x**)] es cuasicóncava (cuasiconvexa).
4. Sea $z = \alpha.x^{\beta}.y^{\gamma}$ con α, β y γ> 0 (función de Cobb-Douglas). Se cumple que:
   a) z es cuasicóncava
   b) z es cóncava si $\beta + \gamma \leq 1$
   c) z es estrictamente cóncava si $\beta + \gamma < 1$.

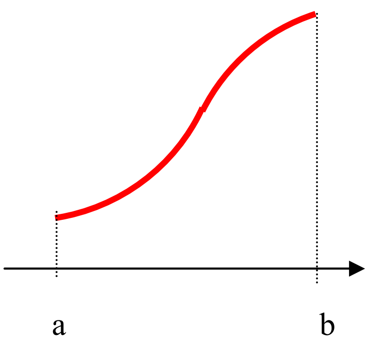
Ejemplos de funciones en el intervalo [a, b]:



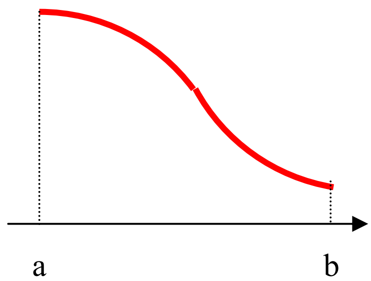

Cóncava
Cuasicóncava
Cuasicóncava en sentido estricto




Convexa
Cuasiconvexa
Cuasiconvexa en sentido estricto




No es cóncava

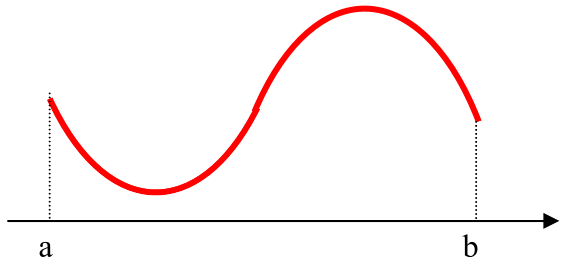



No es convexa

No es convexa
Es cuasicóncava
Es cuasiconvexa

No es cóncava
Es cuasiconvexa
Es cuasicóncava

No es cóncava
No es convexa
No es cuasicóncava
No es cuasiconvexa



# Repartido Práctico 19: Conjuntos y funciones convexas

**Ejercicio 1**

Indicar cuáles de los siguientes conjuntos definidos en R son convexos.

a) [a,b]
b) (a,b)
c) $\{x : x \geq a\}$
d) Entorno de centro a y radio r
e) Entorno reducido de centro a y radio r.

**Ejercicio 2**

Indicar cuáles de los siguientes conjuntos definidos en $R^2$ son convexos.

a) $\{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 4\}$
b) $\{(x,y) : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$
c) $\{(x,y) : x^2 + y^2 \geq 4\}$
d) $\{(x,y) : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d \}$
e) $R^2$
f) $\{(x,y) : y \leq e^x\}$

**Ejercicio 3**

Indicar cuáles de las siguientes funciones son convexas en los dominios respectivos.

| | |
|---|---|
| a) $f(x) = 2 + 3x$ | $D(f) = R$ |
| b) $f(x,y) = 5 + 3x - y$ | $D(f) = R^2$ |
| c) $f(x,y) = 5 + 2x + 4y$ | $D(f) = \{(x,y) : x.y > 0\}$ |
| d) $f(x,y) = e^{x+y}$ | $D(f) = R^2$ |
| e) $f(x,y) = x + y - L(x+y)$ | $D(f) = \{(x,y) : x \geq 1, y \geq 1\}$ |
| f) $f(x,y) = \dfrac{1}{x+y}$ | $D(f) = \{(x,y) : x \geq 1, y \geq 1\}$ |
| g) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - x - y - z + 1$ | $D(f) = R^3$ |
| h) $f(x,y) = e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}$ | $D(f) = R^2$ |

**Ejercicio 4**

Probar que si $f(x_1,x_2,.....,x_n)$ es una función lineal y tiene por dominio $R^n$, entonces f es convexa.

## 20. EXTREMOS EN FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

**Los comentarios que siguen refieren a funciones de dos variables, aunque pueden generalizarse a funciones de tres o más variables. Cuando éste no sea el caso, se hará mención expresa del enunciado correspondiente para más de dos variables.**

*Definiciones de puntos extremos*

$z = f(x,y)$ presenta un ***mínimo relativo*** en el punto $(x_0,y_0)$ si para todo punto $(x,y)$ de la intersección del D(f) con un entorno centrado en $(x_0,y_0)$ se cumple que: $f(x,y) \geq f(x_0,y_0)$.

$z = f(x,y)$ presenta un ***máximo relativo*** en el punto $(x_0,y_0)$ si para todo punto $(x,y)$ de la intersección del D(f) con un entorno centrado en $(x_0,y_0)$ se cumple que: $f(x,y) \leq f(x_0,y_0)$.

Si la función $z = f(x,y)$ presenta un mínimo o máximo relativos en el punto $(x_0,y_0)$, entonces se dice que $(x_0,y_0)$ es un ***punto de extremo relativo***.

$z = f(x,y)$ presenta un ***mínimo absoluto*** en el punto $(x_0,y_0)$ si para todo punto $(x,y)$ del dominio de la función f, D(f), se cumple que: $f(x,y) \geq f(x_0,y_0)$.

$z = f(x,y)$ presenta un ***máximo absoluto*** en el punto $(x_0,y_0)$ si para todo punto $(x,y)$ del dominio de la función f, D(f), se cumple que: $f(x,y) \leq f(x_0,y_0)$.

Si la función $z = f(x,y)$ presenta un mínimo o máximo absolutos en el punto $(x_0,y_0)$, entonces se dice que $(x_0,y_0)$ es un ***punto de extremo absoluto***.

Las definiciones precedentes corresponden a puntos extremos ***en sentido amplio***. Si en las mismas se cambian los signos "≤" y "≥" por "<" y ">", entonces se tienen extremos ***en sentido estricto***.

*Conjuntos abiertos y cerrados*

Sea C un conjunto de puntos del plano, $C \in R^2$. Un punto de C es ***interior*** del conjunto, si existe un entorno del punto totalmente incluido en C.

El conjunto C es ***abierto*** si todos sus puntos son interiores.

Un punto es ***frontera*** del conjunto C si todo entorno centrado en el punto contiene elementos de C y elementos que no son de C.

Un conjunto C es ***cerrado*** si contiene todos sus puntos frontera.

Un conjunto del plano es ***acotado*** si existe un círculo (de radio finito) que lo contiene.

Se llama ***interior*** de C al conjunto de sus puntos interiores. Se llama ***frontera*** de C al conjunto de sus puntos frontera.

*Observaciones*

Los puntos frontera no necesariamente deben pertenecer al conjunto. Existen conjuntos que contienen sólo una parte de sus puntos frontera. Estos conjuntos no son abiertos ni cerrados. De acuerdo con las definiciones presentadas, un conjunto es cerrado si su complemento respecto de $R^2$ es abierto. Vale también el recíproco. Todo triángulo, rectángulo, círculo o circunferencia del plano son conjuntos acotados. El primer cuadrante del plano no es un conjunto acotado. Todas las definiciones y resultados precedentes son válidos si $C \in R^n$.

*Teorema de Weierstrass*

H) Sea f: f(x, y) continua en su dominio, con D(f) cerrado y acotado.

T) Existen mínimo y máximo absolutos de f en su dominio.

Este resultado puede extenderse sin ninguna dificultad a funciones con dominio en $R^n$. El teorema afirma que, en ciertos casos (función continua en un dominio cerrado y acotado) existen mínimo y máximo absoluto. En primer lugar las condiciones no son necesarias sino suficientes para asegurar la existencia de los extremos. En segundo lugar, el teorema sólo hace afirmaciones sobre la existencia de extremos, pero no proporciona un método para hallarlos.

*Algunas cuestiones básicas*

**1. ¿Todas las funciones presentan extremos relativos y/o absolutos?**

**Tal como ocurre con las funciones de una variable, en las de dos o más variables, no todas las funciones presentan extremos relativos. Ejemplo: z = x + y, cuyo gráfico es un plano en el espacio de tres dimensiones, no tiene extremos relativos. Tal como ocurre con las funciones de una variable, una función de varias variables puede presentar extremos relativos y no presentar extremos absolutos, y viceversa. La función z = 3 representa un plano paralelo al plano Oxy, a distancia 3 en el sentido positivo de la cota. Todos los puntos (x,y) cumplen con las definiciones de extremos relativos y absolutos en sentido amplio. Dicha función no presenta extremos en sentido estricto.**

**2. ¿Cómo pueden obtenerse los puntos de extremos relativos?**

**El problema es bastante complicado si no existe alguna de las derivadas parciales de la función. Supongamos que z = f(x,y) es derivable ∀(x,y) ∈ D(f). Entonces, puede haber puntos de extremos relativos en los puntos interiores de D(f) que son solución del sistema:**

$$\begin{cases} f_x(x,y) = 0 \\ f_y(x,y) = 0 \end{cases} \qquad \textbf{(A)}$$

**Los puntos que satisfacen las condiciones (A) se llaman** *puntos estacionarios*. **Si en un punto una de las derivadas parciales no existe y las restantes derivadas se anulan, entonces dicho punto se denomina** *punto crítico.* **Aunque no analizaremos estos problemas en el curso (funciones con puntos críticos), la detección de estos puntos es relevante porque también son candidatos a ser puntos extremos (relativos o absolutos).**

**Obsérvese que –si existen $f_x$ y $f_y$– las condiciones (A) en los puntos interiores de D(f) son necesarias, pero no suficientes para la existencia de extremos relativos. En otras palabras, para encontrar los extremos relativos, estos se pueden encontrar resolviendo el sistema (A), pero no todas las raíces del sistema son de puntos extremos.**

3. **¿Cómo se puede saber si los puntos que satisfacen (A) son o no puntos de extremos relativos, y en caso afirmativo, si son mínimos o máximos? Para responder a esta pregunta vamos a hacer un nuevo supuesto (que si no se cumple, entonces el problema se complica). Supuesto: z = f(x,y) admite derivadas segundas continuas $\forall(x,y) \in D(f)$. Entonces se definen la** matriz *hessiana* **y su correspondiente determinante:**

$$|H(x,y)| = \begin{vmatrix} f_{xx}(x,y) & f_{xy}(x,y) \\ f_{yx}(x,y) & f_{yy}(x,y) \end{vmatrix}$$

y se sigue la siguiente regla general para cada punto $(x_0,y_0)$ que satisface (A):

- Si $|H(x_0,y_0)| > 0$ y $f_{xx}(x_0,y_0) > 0 \Rightarrow$ f presenta un mínimo relativo en $(x_0,y_0)$.
- Si $|H(x_0,y_0)| > 0$ y $f_{xx}(x_0,y_0) < 0 \Rightarrow$ f presenta un máximo relativo en $(x_0,y_0)$.
- Si $|H(x_0,y_0)| < 0 \Rightarrow$ f no tiene extremos relativos en $(x_0,y_0)$.
- Si $|H(x_0,y_0)| = 0 \Rightarrow$ no se puede saber qué ocurre en $(x_0,y_0)$ por aplicación de esta regla, y se necesitan otros instrumentos para seguir analizando.

Si la función es de más de dos variables, entonces la regla del ***hessiano*** se generaliza así:

H) $f(x_1,x_2,.....,x_n)$

**p** es un punto estacionario de la función

**H** es la matriz hessiana, donde $h_{ij} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i . \partial x_j}$

$\boldsymbol{\lambda_i}$ son los valores propios de **H**

T) Si $\boldsymbol{\lambda_i} > 0$ para todo i, entonces f tiene un mínimo relativo en **p**

Si $\boldsymbol{\lambda_i} < 0$ para todo i, entonces f tiene un máximo relativo en **p**

Si algún $\boldsymbol{\lambda_i} > 0$ y otro $\boldsymbol{\lambda_j} < 0$ , entonces f tiene un punto de silla en **p**

Si algún $\boldsymbol{\lambda_i} = 0$ y los restantes valores propios son de igual signo, entonces no se sabe qué ocurre en **p** y se necesitan otros instrumentos de análisis.

4. Hasta aquí hemos visto cómo encontrar extremos relativos. Ahora, ¿cómo se pueden obtener los puntos de extremos absolutos de la función? Supuesto: z = f(x,y) admite derivadas primeras y segundas continuas $\forall(x,y) \in D(f)$. Entonces, para obtener extremos absolutos se pueden seguir las siguientes reglas.

**Regla 1: Dominio cualquiera**

z = f(x,y) presenta en $(x_0,y_0)$ un único mínimo relativo y f es convexa en D(f). Entonces, en $(x_0,y_0)$ f presenta un mínimo absoluto.

z = f(x,y) presenta en $(x_0,y_0)$ un único máximo relativo y (-f) es convexa en D(f). Entonces, en $(x_0,y_0)$ f presenta un máximo absoluto.

**Regla 2: Dominio cerrado**

- Se estudia la existencia de extremos relativos en el interior del dominio.
- Se estudia el comportamiento de f en la frontera del dominio, para encontrar candidatos a mínimo o máximo absolutos.
- Se encuentran los extremos absolutos comparando los extremos relativos del interior con los candidatos de la frontera.

**Regla 3: Dominio restringido con restricciones de igualdad**

- Se aplica el método de los Multiplicadores de Lagrange para encontrar puntos de extremos relativos.
- Se estudia la concavidad / convexidad de la f o algún método alternativo (como por ejemplo el signo de la función en un entorno de los puntos que proporciona el método) para determinar si los extremos relativos son también absolutos.

**Regla 4: Dominio restringido con restricciones de desigualdad**

- Se aplica el Teorema de Kuhn-Tucker para obtener puntos de extremos relativos.
- Si f y las funciones que definen las restricciones son convexas y diferenciables, entonces Kuhn-Tucker proporciona los puntos de extremos absolutos.

Veremos a continuación algunos ejemplos de aplicación de las Reglas 1 y 2. En la Sección 21 se estudian los métodos de Lagrange y Kuhn-Tucker.

**Ejemplo 1**: Sea f: $f(x, y) = x^2 - x.y + y^2$ con $D(f) = R^2$. Se trata de hallar mínimos y máximos relativos y absolutos. En primer lugar observamos que el dominio de f es convexo. En segundo lugar, observamos que la función f es diferenciable por tratarse de una función polinómica. En consecuencia, si existen extremos relativos, los mismos se encuentran en los puntos estacionarios. ¿Cuántos puntos estacionarios hay?

$$\begin{cases} f_x(x,y) = 0 \\ f_y(x,y) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2.x - 1 = 0 \\ 2.y - 1 = 0 \end{cases}$$

Hay un único punto estacionario: (½, ½). Probaremos, mediante la regla del hessiano, que se trata de un punto de mínimo relativo.

$|H(x,y)| = \begin{vmatrix} f_{xx}(x,y) & f_{xy}(x,y) \\ f_{yx}(x,y) & f_{yy}(x,y) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 > 0 \quad \forall \ (x, y) \in R^2$. En particular, el determinante hessiano es mayor que cero en el punto (½, ½). Como además, en dicho punto la derivada de segundo orden con respecto a x es positiva, $f_{xx}(½, ½) = 2$, entonces la función f presenta en dicho punto un mínimo relativo. Además, no existen máximos relativos, porque si los hubiera, deberían estar en los puntos estacionarios.

Finalmente, el punto de mínimo relativo, ¿es también de mínimo absoluto? De acuerdo con la **Regla 1**, alcanzaría con verificar que f es una función convexa. Y efectivamente, f es convexa porque se cumple que el determinante hessiano es ≥ 0 y también la Traza($H_f$) es ≥ 0. Entonces el punto (½, ½) es de mínimo absoluto, y el valor mínimo de la función es: f(½, ½) = ¼.

**Ejemplo 2**: Sea f: f(x, y) = $x^2 - y^2$ con D(f) = $R^2$. Se trata de hallar mínimos y máximos relativos y absolutos, si existen.

Es fácil advertir que la función no está acotada. Por ejemplo, si y = 0, f(x, 0) = $x^2$ toma valores tan grandes como se desee, y si x = 0 entonces f(0, y) = - $y^2$ toma valores tan grandes como se desee, pero con signo negativo. Entonces, si f no está acotada, no tiene ni máximo ni mínimo absolutos. Pero podría tener extremos relativos. Para hallarlos, calculamos los puntos estacionarios (no hay puntos críticos, por tratarse de una función polinómica).

$$\begin{cases} f_x(x,y)=0 \\ f_y(x,y)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2.x=0 \\ -2.y=0 \end{cases}$$

Entonces, el único punto estacionario es (0, 0). Se cumple que f(0, 0) = 0. ¿Se trata de un punto de extremo relativo? Si aplicamos la regla del hessiano resulta:

$\left|H(x,y)\right| = \begin{vmatrix} f_{xx}(x,y) & f_{xy}(x,y) \\ f_{yx}(x,y) & f_{yy}(x,y) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -4 < 0$, y de acuerdo con dicha regla, en (0, 0) no hay puntos extremos.

¿Qué es lo que ocurre con la función en (0, 0)? Ocurre que en cualquier *bola*[22] centrada en (0, 0) hay puntos donde la función es mayor que f(0, 0) y también hay puntos donde la función es menor que f(0, 0). Como en (0, 0) la función se anula, alcanza con observar que en todo círculo centrado en (0, 0) hay puntos donde la función toma valores positivos y negativos. Si (x, y) ≠ (0, 0) y x = 0, entonces f(0, y) = - $y^2$, que toma siempre valores negativos. Si (x, y) ≠ (0, 0) y y = 0, entonces f(x, 0) = $x^2$, que toma siempre valores positivos. Entonces en (0, 0) no hay extremos relativos.

Cuando un punto estacionario no es de extremo relativo, se dice que es un ***punto de silla***.

**Ejemplo 3**: Sea f: f(x, y) = $x^2 - x.y + y^2$ con D(f) = {(x, y): 0 ≤ x ≤ 1, 0 ≤ y ≤ 1}. Se trata de hallar mínimos y máximos relativos y absolutos. Como vimos en el Ejemplo 1 la función tiene un único punto estacionario, (½, ½), que corresponde a un mínimo relativo, y que cae dentro del dominio de esta nueva función. Como además, la función es convexa (en un dominio convexo), (½, ½) es también un punto de mínimo absoluto. Por el Teorema de Weierstrass sabemos, además, que la función tiene máximo absoluto porque f es una función continua en un dominio cerrado y acotado (el dominio de f es un cuadrado de lado 1). Como no existen otros puntos estacionarios, el punto de máximo absoluto debe estar sobre la frontera del dominio. En este caso la frontera está formada por cuatro segmentos:

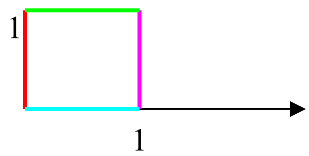
I) 0 ≤ x ≤ 1, y = 0

[22] Se denomina así al interior de un círculo, de una esfera o, en más de tres variables, para referirse al conjunto de puntos que dista menos de una cierta distancia de un punto que se toma como centro.

II) $0 \leq x \leq 1, y = 1$

III) $0 \leq y \leq 1, x = 0$

IV) $0 \leq y \leq 1, x = 1$




Analicemos el comportamiento de la función f en los puntos de la frontera.

I) $0 \leq x \leq 1$, $y = 0 \Rightarrow f(x, y) = f(x, 0) = x^2$, que tiene su máximo en $x = 1$. Entonces, candidato a punto de máximo absoluto: (1, 0). Es $f(1, 0) = 1$.

II) $0 \leq x \leq 1$, $y = 1 \Rightarrow f(x, y) = f(x, 1) = x^2 – x + 1$. Su derivada se anula en ½, donde de acuerdo con el signo presenta un mínimo. El signo de la derivada de la función con respecto a x es negativo entre 0 y ½, y positivo entre ½ y 1. La función es decreciente entre 0 y ½, y creciente entre ½ y 1. En consecuencia, los candidatos a punto de máximo están en $x = 0$ y en $x = 1$. Resultan: $f(0, 1) = f(1, 1) = 1$

III) $0 \leq y \leq 1$, $x = 0$; se prueba que (0, 1) es candidato a máximo y resulta $f(0, 1) = 1$.

IV) $0 \leq y \leq 1$, $x = 1$; se prueba que los candidatos son (1, 0) y (0, 1), donde la función toma el valor 1.

En resumen, la frontera agrega tres puntos candidatos a máximo absoluto, en los cuales la función toma el mismo valor: $f(0, 1) = f(1, 0) = f(1, 1) = 1$. Por tanto, el máximo absoluto de la función es 1, y dicho máximo se alcanza en tres puntos, que son tres de los cuatro vértices del cuadrado que define el dominio.

## Repartido Práctico 20: Extremos en Funciones de Varias Variables

**Ejercicio 1**

**Hallar, si existen, los extremos relativos de las siguientes funciones. Mediante la regla de la derivada segunda decidir si se trata de máximos o mínimos relativos.**

a) $f(x,y) = x^2 + 4y^2 - 6x + 4y$
b) $f(x,y) = x.y - \frac{1}{x} - \frac{1}{y}$
c) $f(x,y) = y - y^2 - 3x - 6x^2$
d) $f(x,y) = x^2 + y^2 + xy - 9x + 1$
e) $f(x,y) = x^2 + y^2 - xy + x^3$
f) $f(t,k) = -3.t.k + t^3 + k^3$
g) $f(x,y) = (y^2 - 4).(e^x - 1)$

**Ejercicio 2**

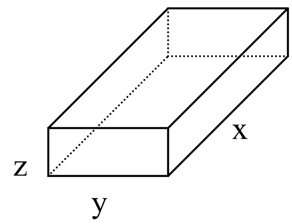
**Una fábrica de calzado produce pares de zapatos (Z) y botas (B), con costos medios de producción constantes iguales a \$60 y \$70 respectivamente. Las funciones de demanda de los productos dependen de los precios de venta de ambos:**

$$q_Z = 5.p_B - 5.p_Z \qquad\qquad q_B = 5.p_Z - 10.p_B + 500$$

Hallar los precios de venta de ambos productos que maximizan la ganancia de la fábrica

**Ejercicio 3**

Una piscina rectangular debe tener un volumen de 40 $m^3$. El costo del $m^2$ del material para el fondo de la piscina es \$80. El costo del $m^2$ del material del frente y la parte de atrás es \$64 y el costo del $m^2$ del material para las paredes laterales es \$27. Hallar las dimensiones de la piscina (x=largo, y=frente, z=profundidad) de costo mínimo.




**Ejercicio 4**

A y B son las únicas dos empresas en un mercado que producen el mismo producto (A y B forman un *duopolio*). Las empresas deciden ponerse de acuerdo en un precio único y en los niveles de producción (en este caso se dice que entran en *colusión*). La función de demanda del producto es $p = 92 - q_A - q_B$. Las funciones de costo para A y B son respectivamente: $C_A = 10q_A$ y $C_B = q_B^2/2$.

a) Demostrar que la función de utilidad del duopolio es: $U = p.q_A - C_A + p.q_B - C_B$.
b) Determinar cómo debe distribuirse la producción entre A y B para maximizar la utilidad del duopolio.

# FACULTAD DE CIENCIAS SOCIALES
# DEPARTAMENTO DE ECONOMÍA

## DIPLOMA EN ECONOMÍA PARA NO ECONOMISTAS

### ASIGNATURA: MATEMÁTICA APLICADA A LA ECONOMÍA

### MATERIAL DE CONSULTA Y CASOS PRÁCTICOS

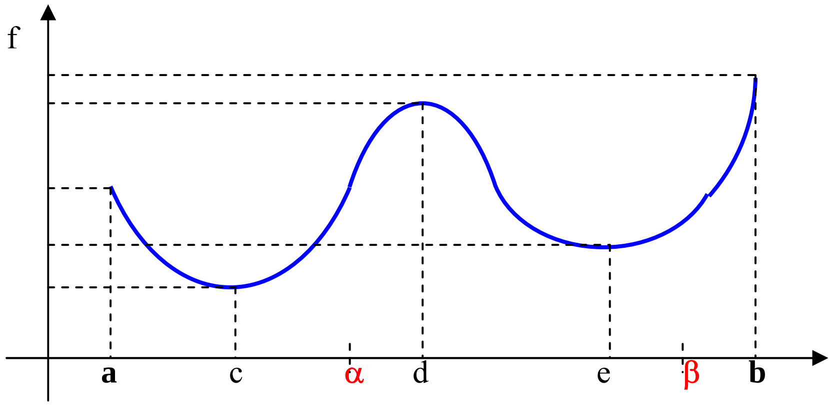
**CURSO 2004**
**PARTE VIII**

**Profesor: David Glejberman**

## 21. OPTIMIZACIÓN CON RESTRICCIONES: LAGRANGE, KUHN-TUCKER

### *Restricciones con igualdades*

Los precios y las cantidades no pueden tomar valores cualesquiera. Los precios no pueden ser negativos y las cantidades, además de la condición de no negatividad, suelen estar acotadas por la capacidad máxima de producción. El presupuesto implica una restricción adicional al nivel de la producción, conocida como *restricción presupuestaria*. Estos son sólo algunos ejemplos de las restricciones que pueden aparecer en los problemas de optimización.




En el gráfico precedente la función depende de una sola variable. En el intervalo [a, b] el máximo absoluto de la función f se encuentra en $x = b$, $f_{MAX} = f(b)$; mientras que el mínimo absoluto de la función en el mismo intervalo se encuentra en $x = c$, siendo el valor del mínimo, $f_{MIN} = f(c)$. Pero si el dominio de la función se restringe al intervalo $[\alpha, \beta]$, el máximo y el mínimo de la función cambian, y se encuentran ahora en los puntos de abcisas $x = d$ y $x = e$ respectivamente. Cuando se restringe el dominio, como en este caso, se encuentra que:

$$\text{MAX de f en } [a, b] \geq \text{MAX de f en } [\alpha, \beta]$$
$$\text{MIN de f en } [a, b] \leq \text{MIN de f en } [\alpha, \beta]$$

En los problemas de optimización que se presentaron en la sección anterior, el supuesto implícito era que las variables de la función a optimizar eran independientes. Ahora nos ocuparemos de problemas de optimización donde eventualmente las variables del problema están relacionadas entre sí, como en el ejemplo que sigue.

Supongamos que una canasta de consumo está formada por k artículos. Un consumidor puede decidir cuántas unidades de cada artículo, $x_i$, habrá de adquirir en un período de tiempo. Los precios por unidad son $p_i$ y el presupuesto para consumo es C. Supongamos que existe una función de utilidad que a cada combinación posible de cantidades de artículos, a cada vector $(x_1, x_2, \ldots , x_k)$, le asigna un valor. El problema consiste en elegir el vector $(x_1, x_2, \ldots , x_k)$ que maximiza la función de utilidad, sujeto a la restricción presupuestaria:

$$\text{MAX } U(x_1, x_2, \ldots , x_k)$$
$$\text{Restricción: } \sum_{i=1}^{k} p_i . x_i = C$$

La restricción con el signo de desigualdad, $\sum_{i=1}^{k} p_i.x_i \leq C$, podría ser más apropiada en éste y otros problemas en que las cantidades a adquirir no son perfectamente divisibles. Las restricciones con desigualdades aparecen naturalmente al tomar en cuenta que las cantidades a adquirir no pueden ser negativas. En este problema habría que introducir k restricciones de la forma $x_i$. Por el momento postergaremos el tratamiento de los problemas de optimización con restricciones de desigualdad.

Un problema de optimización con restricciones de igualdad se conoce como un *problema lagrangiano*[23] . Los problemas lagrangianos más generales son del tipo que sigue.

$$\left.\begin{matrix} MAXIMIZAR \\ MINIMIZAR \end{matrix}\right\} f(x_1, x_2, \ldots.., x_k) \;\; sujeto \;\; a \;\; las \;\; condiciones \begin{cases} g_1(x_1, x_2, \ldots.., x_k) = C_1 \\ g_2(x_1, x_2, \ldots.., x_k) = C_2 \\ ------------ \\ g_r(x_1, x_2, \ldots.., x_k) = C_r \end{cases}$$

Para resolver el problema de optimización Lagrange plantea introducir nuevas variables, $\lambda_j$, una por cada restricción, de manera que el problema de encontrar un vector de k variables que optimice la función f se transforma en un problema de optimización con (k + r) variables: $x_1, x_2, \ldots.. , x_k, \lambda_1, \lambda_2, \ldots.. , \lambda_r$. Las variables $\lambda_j$ se conocen con el nombre de *multiplicadores de Lagrange*, y se introducen para definir una nueva función, llamada *función lagrangiana*:

$$F(x_1, x_2, \ldots.. , x_k, \lambda_1, \lambda_2, \ldots.. , \lambda_r) = f(x_1, x_2, \ldots.. , x_k) + \sum_{j=1}^{r} \lambda_j.\left[C_j - g_j(x_1, x_2, \ldots.., x_r\right]$$

Se demuestra que si $\left(x_1^*, x_2^*, \ldots.., x_k^*\right)$ es un punto estacionario de f, es decir, se verifica que $\nabla f = 0$, entonces $\exists\ \lambda_1, \lambda_2, \ldots.. , \lambda_r$ tales que $\left(x_1^*, x_2^*, \ldots.., x_k^*, \lambda_1, \lambda_2, \ldots.., \lambda_r\right)$ es un punto estacionario de F (es decir, $\nabla F = 0$). Aunque parezca paradójico, al introducir r variables adicionales, muchas veces resolver el sistema $\nabla F = 0$ es más sencillo que resolver $\nabla f = 0$.

*Observaciones*

1. La aplicación del método lagrangiano exige que la función f y las funciones $g_j$ sean diferenciables (que admitan derivadas parciales de primer orden continuas respecto de $x_1, x_2, \ldots.. , x_k$.
2. El problema lagrangiano más sencillo consta de sólo dos variables y una restricción. El mismo puede formularse así:
$$\left.\begin{matrix} MAXIMIZAR \\ MINIMIZAR \end{matrix}\right\} f(x, y) \;\; sujeto \;\; a \;\; la \;\; condición \;\; g(x, y) = C.$$
3. Algunos autores prefieren escribir la función lagrangiana como función sólo de las variables $x_i$, por cuanto las $\lambda_j$ pueden verse como parámetros más que como variables o bien porque se trata de variables de una naturaleza diferente. Algunos

[23] José Luis Lagrange (1736-1813) notable matemático francés, conocido principalmente como geómetra.

autores prefieren escribir dentro del paréntesis recto la expresión con signo cambiado: $g_j(x_1, x_2, \ldots, x_r)$ - $C_j$. La opción que hemos hecho quedará plenamente justificada más adelante con la interpretación económica. En el caso de restricciones con desigualdades se plantearán variantes.

El método lagrangiano consiste en:

1º) Hallar las derivadas parciales de primer orden de la función lagrangiana respecto de las variables $x_1$, $x_2$, ….. , $x_k$ e igualarlas a cero: $\dfrac{\partial F}{\partial x_i} = 0$.

2º) Resolver el sistema formado por las k ecuaciones $\dfrac{\partial F}{\partial x_i} = 0$ y las r restricciones $g_j(x_1, x_2, \ldots, x_k) = C_j$. Se tiene un sistema de (k + r) ecuaciones con (k + r) incógnitas.

3º) Si $(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_k^*, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r)$ es una raíz del sistema, entonces el vector $(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_k^*)$ es un candidato para resolver el problema de optimizar f sujeto a las restricciones.

*Observaciones*

1. El sistema puede no tener raíces.
2. Si existen raíces del sistema, puede ser difícil encontrarlas (las ecuaciones podrían contener expresiones complicadas como fracciones algebraicas, radicales, exponenciales o polinomios de grados altos).
3. Si existen raíces del sistema, $(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_k^*, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r)$, puede que el vector $(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_k^*)$ no resuelva el problema de optimización. Por ejemplo, el vector podría resolver un problema de minimización cuando el objetivo es maximizar f.

La siguiente proposición levanta, en algunos casos particulares, la limitación que se plantea en la tercera observación.

*Condición suficiente para la existencia del óptimo*

<table>
<tr><td colspan="2" align="center">$(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_k^*, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r)$ es raíz del sistema con (k + r) incógnitas</td></tr>
<tr><td align="center">F es cóncava<br>$\Downarrow$<br>$(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_k^*)$ resuelve el problema de maximización.</td><td align="center">F es convexa<br>$\Downarrow$<br>$(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_k^*)$ resuelve el problema de minimización.</td></tr>
</table>

Ejemplo 1: Un consumidor debe decidir cómo distribuye un presupuesto semestral de \$1.750 entre entradas de cine (x) y entradas de teatro (y), las cuales cuestan \$50 y \$100 respectivamente. Se conoce la función de utilidad del consumidor, U(x,y). Es $U(x, y) = 150 – 0{,}1.x^2 – y – 0{,}25.y^2$. Hallar la combinación de entradas de cine y de teatro que maximiza la función de utilidad sujeta a la restricción presupuestaria.

Por razones de simplicidad, vamos a transformar el problema de maximización en un problema de mínimo. Obsérvese que MAX U(x, y) = MIN – U(x, y).

$$\text{MIN} - U(x, y) = \text{MIN}\ [- 150 + 0{,}1.x^2 + y + 0{,}25.y^2]$$

$$\text{Restricción: } 50.x + 100.y = 1.750$$

$$F(x, y, \lambda) = - 150 + 0{,}1.x^2 + y + 0{,}25.y^2 + \lambda.[1.750 - 50.x - 100.y]$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} = 0{,}2.x - 50.\lambda \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} = 1 + 0{,}5.y - 100.\lambda \\ 50.x + 100.y = 1750 \end{cases} \Rightarrow \text{Punto estacionario } (x_0, y_0) = (15, 10) \text{ con } \lambda = 3.$$

¿F es convexa? $\lambda.[1.750 - 50.x - 100.y]$ es convexa por ser una función lineal. Entonces, para que F sea convexa, alcanza con probar que –U lo es (pues suma de funciones convexas es convexa). La matriz hessiana de –U(x, y) es $\begin{pmatrix} 0{,}2 & 0 \\ 0 & 0{,}5 \end{pmatrix}$ con todos sus valores propios positivos, por tanto –U(x, y) es una función convexa, y también lo es F. Entonces, (15, 10) minimiza –U(x, y). Entonces, (15, 10) maximiza U(x, y). ¿Cuál es el máximo de la función de utilidad? U(15, 10) = 92,5.

Ejemplo 2: Una empresa industrial tiene tres establecimientos para la producción de un único producto. Sean x, y, z las cantidades mensuales que producen los tres establecimientos. El costo de producción en cada establecimiento es:

$$C(x) = 100 + 0{,}025.x^2$$
$$C(y) = 100 + 0{,}5\ y + 0{,}01.y^2$$
$$C(z) = 100 + z^2$$

Se trata de minimizar el costo total mensual de producción, C(x, y, z) = C(x) + C(y) + C(z) sabiendo que en el mes se necesita producir 1.385 unidades de producto.

$$\text{MIN } C(x, y, z) = 300 + 0{,}025.x^2 + 0{,}5\ y + 0{,}01.y^2 + z^2$$
$$\text{Restricción: } x + y + z = 1.385$$

Definimos $F(x, y, \lambda) = 300 + 0{,}025.x^2 + 0{,}5\ y + 0{,}01.y^2 + z^2 + \lambda.[1.385 - (x + y + z)]$, calculamos las derivadas parciales y seguimos los pasos del método lagrangiano.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} = 0{,}05.x - \lambda = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} = 0{,}5 + 0{,}02.y - \lambda = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial z} = 2.z - \lambda = 0 \\ x + y + z = 1.385 \end{cases} \Rightarrow \text{Punto estacionario } (400, 975, 10) \text{ con } \lambda = 20.$$

Como la matriz hessiana de C es $\begin{pmatrix} 0{,}05 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}02 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, sus valores propios son todos positivos (son los valores de la diagonal principal) y por tanto la función C es convexa. Entonces, en el punto (400, 975, 10) la función C presenta un mínimo absoluto. El costo mínimo de producción es: C(400, 975, 10) = 13.593,75.

Ejemplo 3: Se trata de MINIMIZAR $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ sujeto a las condiciones: $x + y + z = 1$; $2.x - y - z = 5$.

Definimos $F(x, y, z, \lambda, \rho) = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda.[1 - x - y - z] + \rho.[5 - 2.x + y + z]$.

$$\begin{cases} F_x = 2.x - \lambda - 2.\rho = 0 \\ F_y = 2.y - \lambda + \rho = 0 \\ F_z = 2.z - \lambda + \rho = 0 \\ x + y + z = 1 \\ 2.x - y - z = 5 \end{cases} \Rightarrow \text{Punto estacionario } (2, -1/2, -1/2) \text{ con } \lambda = 2/3 \text{ y } \rho = 5/3.$$

Sabemos que (2, -1/2, -1/2) es un punto estacionario, pero por la convexidad de F, podemos asegurar que se trata de un punto de mínimo absoluto. El mínimo de la función F es: F(2, -1/2, -1/2) = 9/2. ¿Cuál habría sido el mínimo de F si no hubiera restricciones? El mínimo de $(x^2 + y^2 + z^2)$ se da en el punto (0, 0, 0) y es F(0, 0, 0) = 0.

*Interpretaciones económicas de los multiplicadores de Lagrange*

A) Consideremos el problema MAX f(x, y) sujeto a la restricción g(x, y) = C. Supongamos que el vector $(x_0, y_0)$ resuelve el problema. ¿Qué pasa si cambia el valor de C? En general, también cambia la solución. Entonces las coordenadas del vector $(x_0, y_0)$ dependen del valor de C. Supongamos que $x_0(C)$ y $y_0(C)$ son funciones diferenciables de C. Entonces, el máximo de la función f, $f[x_0(C), y_0(C)]$ es una función de C. Pero al aplicar el método de Lagrange ocurre que, en general, también la variable $\lambda$ depende de C. La propiedad relevante, que se cumple en condiciones muy generales, es que:

$$\frac{\partial f\left[x_0(C), y_0(C)\right]}{\partial C} = \lambda(C)$$

Por tanto, el multiplicador de Lagrange, $\lambda$, es la tasa de variación del valor óptimo de f cuando varía la constante de la restricción. Si simbolizamos una pequeña variación de C con la expresión dC, entonces:

$$f[x_0(C+dC), y_0(C+dC)] - f[x_0(C), y_0(C)] \cong \lambda(C).dC$$

Si f es una función de utilidad o de ganancias y C es una restricción presupuestaria entonces, un incremento de los recursos en dC origina un aumento aproximado de $\lambda(C).dC$ en la utilidad o beneficio.

En el Ejemplo 1 teníamos un presupuesto de $1.750 para gastar en cine y teatro. El óptimo se obtenía para 15 entradas de cine y 10 de teatro, con $\lambda = 3$. La utilidad máxima era 92,5. Si las cantidades de producto fueran perfectamente divisibles (obsérvese que no es éste el caso), entonces un aumento de \$1 (dC) en el presupuesto generaría un incremento de la utilidad del consumidor de aproximadamente 3 unidades (en las que se mide la utilidad): $\lambda(C).dC = 3.1 = 3$.

En Economía, cuando el problema es de recursos, $\lambda$ se denomina el *precio sombra* de una unidad del recurso C.

B) Supongamos que en el mismo problema MAX f(x, y) sujeto a la restricción g(x, y) = C, la función f es una función de utilidad, que x e y son las cantidades de una canasta de consumo de dos artículos, y $g(x, y) = p_1.x + p_2.y$ es la restricción presupuestaria, donde $p_1$ y $p_2$ son los precios de los respectivos artículos de la canasta.

La función lagrangiana es: $F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda[C - p_1.x - p_2.y]$. El método lagrangiano conduce al sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} f_x(x,y) - \lambda.p_1 = 0 \\ f_y(x,y) - \lambda.p_2 = 0 \\ p_1.x + p_2.y = C \end{cases}$$

El punto $(x_0, y_0)$ que resuelve el problema verifica las tres ecuaciones. Trabajando con las dos primeras se deduce:

$$\lambda = \frac{f_x(x_0, y_0)}{p_1} = \frac{f_y(x_0, y_0)}{p_2}$$

Como ya hemos visto, $f_x(x_0, y_0)$ y $f_y(x_0, y_0)$ proporcionan la utilidad marginal de un incremento en el consumo de una unidad adicional de uno de los artículos (permaneciendo el consumo del otro constante) a partir del vector de consumo $(x_0, y_0)$. Entonces se deduce que si $(x_0, y_0)$ maximiza la utilidad del consumidor sujeto a la restricción presupuestaria, entonces el cociente entre la utilidad marginal de un artículo y su precio unitario tiene que ser el mismo para los dos artículos de la canasta (para todos los artículos de la canasta, si hay más de dos). En el problema de optimizar la función de utilidad del consumidor, la cantidad demandada de un producto compite con la demanda por otros productos por disponerse de un presupuesto restringido. En consecuencia, la cantidad demandada de un producto depende de:

- el precio del producto
- el presupuesto
- el precio de otros productos
- las utilidades marginales del producto y de los otros que integran la canasta.

Obsérvese que el multiplicador de Lagrange es justamente la constante que resulta de dividir la utilidad marginal de un producto (en el óptimo) sobre su precio unitario. Cuando la canasta de consumo tiene k productos:

$$\lambda = \frac{\dfrac{\partial f(x_1, x_2, ....., x_k)}{\partial x_i}}{p_i} \qquad i = 1,2,.....,k$$

***Restricciones con desigualdades***

Cuando se trata de optimizar una función de utilidad del consumidor sujeta a la restricción presupuestaria, la condición $\sum_{i=1}^{k} p_i . x_i = C$ parece poco realista por cuanto el consumidor muchas veces no piensa en gastar una cantidad <u>C exacta</u> sino que está dispuesto a gastar <u>hasta C</u>, de manera que una formulación más apropiada para la restricción sería $\sum_{i=1}^{k} p_i . x_i \leq C$. Las restricciones del tipo $x_i \geq 0$ para las cantidades también deberían ser incluidas en las condiciones del problema. En esta sección abordaremos este tipo de cuestiones.

El problema más general de optimización sujeto a restricciones con desigualdades es como sigue.

*Teorema de Kuhn-Tucker (Caso general)*

(P) $\left.\begin{matrix} MAXIMIZAR \\ MINIMIZAR \end{matrix}\right\} f(x_1, x_2, ....., x_k) \;\; sujeto \;\; a \;\; las \;\; condiciones \begin{cases} g_1(x_1, x_2, ....., x_k) \leq C_1 \\ g_2(x_1, x_2, ....., x_k) \leq C_2 \\ -------------- \\ g_r(x_1, x_2, ....., x_k) \leq C_r \end{cases}$

H) Se define

$F(x_1, x_2, \ldots, x_k, \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_r) = f(x_1, x_2, \ldots, x_k) + \sum_{j=1}^{r} \lambda_j . \left[ g_j(x_1, x_2, ....., x_r) - C_j \right]$

Se cumple:

$$(C) \begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x_i} = 0 & i = 1,2,.....,k \\ \lambda_j . \left[ g_j(x_1, x_2, ..., x_k) - C_j \right] = 0 & j = 1,2,.....,r \\ g_j(x_1, x_2, ..., x_k) \leq C_j & \\ \lambda_j \geq 0 & j = 1,2,.....,r \end{cases}$$

T) Si existen puntos $\left(x_1^*, x_2^*, ....., x_k^*\right)$ que satisfacen todas las condiciones (C) y el problema tiene solución, entonces alguno de los puntos $\left(x_1^*, x_2^*, ....., x_k^*\right)$ resuelve el problema de optimización.

*Observaciones*

1. El conjunto de puntos que verifican todas las restricciones se denomina ***conjunto admisible o conjunto factible***. El conjunto factible no es otra cosa que un dominio restringido para f donde interesa hallar el máximo absoluto y/o el mínimo absoluto de la función.

2. Alguna o algunas de las restricciones g pueden ser tan sencillas como $x_i \geq 0$ que expresa la condición de no negatividad de la variable $x_i$.
3. Alguna de las restricciones podría tener la forma $g(x_1, x_2, \ldots, x_k) \geq C$ (con la desigualdad "mayor o igual que"). Para tener un problema en la forma (P) esta restricción se modificará multiplicando la desigualdad por (-1) así:

   $$- g(x_1, x_2, \ldots, x_k) \leq - C$$
4. Alguna de las restricciones podría tener la forma $g(x_1, x_2, \ldots, x_k) = C$. Para llevar el problema a la forma (P), dicha restricción se ha de sustituir por las dos desigualdades $g(x_1, x_2, \ldots, x_k) \geq C$ y $-g(x_1, x_2, \ldots, x_k) \leq -C$. Esta equivalencia de las restricciones con desigualdad con las restricciones con igualdad permite llevar cualquier problema lagrangiano a un problema de optimización con restricciones con desigualdades del tipo (P).
5. Cuando el vector que resuelve el problema de optimización verifica la condición $g(x_1, x_2, \ldots, x_k) < C$ (con el signo de menor estricto), se dice que la restricción $g(x_1, x_2, \ldots, x_k) \leq C$ está ***inactiva o no saturada***. Interpretación económica: si $g(x_1, x_2, \ldots, x_k) \leq C$ es una restricción presupuestaria y en el óptimo es $g(x_1, x_2, \ldots, x_k) = C$ ello significa que para alcanzar el óptimo hay que gastar todo el presupuesto disponible.
6. Si la función objetivo f es lineal y las restricciones $g_j$ son todas funciones lineales, entonces el problema (P) se conoce con el nombre de ***problema de programación lineal***. Para este tipo de problemas existen métodos específicos que no veremos en el curso, pues también se pueden resolver, como los problemas de programación no lineal, por el método que se expone a continuación.

El *método general* establece condiciones necesarias para la existencia del óptimo, pero las mismas no son suficientes: los puntos raíces del sistema pueden ser óptimos, pero también pueden ser puntos de silla. Por otra parte, la resolución del sistema de ecuaciones e inecuaciones exige una importante cantidad de trabajo.

Por los motivos expuestos, y con la intención de simplificar la tarea de encontrar solución en los problemas de optimización con restricciones con desigualdad, vamos a considerar algunos casos particulares para los cuales las condiciones de Kuhn-Tucker garantizan la obtención del óptimo. Los casos particulares refieren a la concavidad / convexidad[24] de las funciones f y $g_j$ y a la no negatividad de las variables $x_i$.

**Problema 1** MINIMIZAR $f(x_1, x_2, \ldots, x_k)$

$$sujeto\ \ a\ \ las\ \ condiciones\ \ (A)\ \ \begin{cases} g_j(x_1, x_2, \ldots, x_k) \leq C_j \quad con \quad j = 1,2,\ldots,r \\ \\ x_i \geq 0 \quad con \quad i = 1,2,\ldots,k \end{cases}$$

*Caso particular de Kuhn-Tucker*

H) f, $g_1, g_2, \ldots, g_r$ son diferenciables y ***convexas***

$$F(x_1, x_2,\ldots, x_k, \lambda_1, \lambda_2,\ldots, \lambda_r) = f(x_1, x_2, \ldots, x_k) + \sum_{j=1}^{r} \lambda_j . \left[ g_j(x_1, x_2, \ldots, x_r) - C_j \right]$$

[24] El mismo análisis, con casos un poco más generales, implican analizar la cuasiconcavidad / cuasiconvexidad de las funciones objetivo y de restricciones (Ver SYDSAETER y HAMMOND, obra citada en la bibliografía del curso).

$\left(x_1^*, x_2^*, \ldots\ldots, x_k^*\right)$ es un punto estacionario de F que verifica las condiciones (A) y las condiciones (B):

$$(B)\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x_i} = 0 \quad i = 1,2,\ldots\ldots,k \\ \lambda_j.\left[g_j(x_1, x_2, \ldots, x_k) - C_j\right] = 0 \quad j = 1,2,\ldots\ldots,r \\ \lambda_j \geq 0 \quad j = 1,2,\ldots\ldots,r \end{cases}$$

T) $\left(x_1^*, x_2^*, \ldots\ldots, x_k^*\right)$ es el mínimo absoluto de f sujeto a las restricciones.

Para aplicar el método de Kuhn-Tucker al Problema 1 es necesario:
- verificar que las funciones f, $g_1$, $g_2$, … , $g_r$ son diferenciables y ***convexas***
- encontrar los puntos que satisfacen las condiciones (A) y (B).

*Observación*
Cuando el problema es de minimización, el planteo de la función lagrangiana exige que en el paréntesis recto se registre $g_j(x_1, x_2, \ldots , x_k) - C_j$, y no con los signos cambiados, tal como registramos en los problemas de optimización con restricciones de igualdad.

**Problema 2** MAXIMIZAR $f(x_1, x_2, \ldots , x_k)$

$$\textit{sujeto a las condiciones} \quad (A) \begin{cases} g_j(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_k) \leq C_j \quad con \quad j = 1,2,\ldots,r \\ \\ x_i \geq 0 \quad con \quad i = 1,2,\ldots,k \end{cases}$$

Obsérvese que el problema MAX f es el mismo problema que MIN (-f). Entonces el Problema 2 se puede transformar en un Problema 1, lo que exige verificar que (-f), $g_1$, $g_2$, … , $g_r$ son diferenciables y ***convexas***.

Ejemplo 1: Minimizar la función $f(x, y) = (x - 4)^2 + (y - 4)^2$ sujeto a las restricciones $\begin{cases} 2.x + 3.y \geq 6 \\ 3.x + 2.y \leq 12 \end{cases}$, x e y no negativas.

En primer lugar, vamos a llevar el problema a la forma (P). Para ello, la primera restricción se trasforma en: $- 2.x - 3.y \leq - 6$. En segundo lugar analicemos si f, $g_1$ y $g_2$ son funciones diferenciables y convexas. $g_1$ y $g_2$ lo son porque se trata de funciones lineales. Para saber si f lo es:

$f_x = 2.(x - 4)$
$f_y = 2.(y - 4)$
$f_{xx} = 2$
$f_{xy} = 0$
$f_{yy} = 2$

f es diferenciable por ser un polinomio y también es convexa porque el determinante de la matriz hessiana es positivo, $\left|H_f\right| = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 > 0 \; \forall(x,y)$ y la traza de

$H_f$ también es positiva: $H_f = 4 \geq 0 \ \forall(x,y)$. Ahora se trata de encontrar los puntos (x, y) que satisfagan a la vez las condiciones (A) y (B) según el teorema de Kuhn-Tucker. La forma habitual de trabajo consiste en analizar las condiciones con signo de igualdad, y luego, para los puntos obtenidos, verificar que se cumplan las condiciones con signo de desigualdad.

Definimos: $F(x, y, \lambda_1, \lambda_2) = (x - 4)^2 + (y - 4)^2 + \lambda_1.(-2.x - 3.y + 6) + \lambda_2.(3.x + 2.y - 12)$. El mínimo absoluto debe satisfacer todas las condiciones siguientes.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} = 2.(x-4) - 2.\lambda_1 + 3.\lambda_2 = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} = 2.(y-4) - 3.\lambda_1 + 2.\lambda_2 = 0 \\ \lambda_1.(-2.x - 3.y + 6) = 0 \\ \lambda_2.(3.x + 2.y - 12) = 0 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ \lambda_1 \geq 0 \\ \lambda_2 \geq 0 \\ 2.x + 3.y \geq 6 \\ 3.x + 2.y \leq 12 \end{cases}$$

Se observa que la resolución del sistema de ecuaciones e inecuaciones si se trabaja en forma ordenada analizando los siguientes casos exhaustivos y excluyentes:

CASO 1: $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0$
CASO 2: $\lambda_1 = 0, \lambda_2 \neq 0$
CASO 3: $\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 = 0$
CASO 4: $\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 \neq 0$

CASO 1: $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0$
Sistema de ecuaciones (las inecuaciones se verifican a posteriori)

$$\begin{cases} 2.(x-4) = 0 \\ 2.(y-4) = 0 \end{cases}$$

Se obtiene la raíz única: $(x, y, \lambda_1, \lambda_2) = (4, 4, 0, 0)$, la cual no verifica la condición: $3.x + 2.y \leq 12$.

CASO 2: $\lambda_1 = 0, \lambda_2 \neq 0$

$$\begin{cases} 2.(x-4) + 3.\lambda_2 = 0 \\ 2.(y-4) + 2.\lambda_2 = 0 \\ 3.x + 2.y - 12 = 0 \end{cases}$$

Se obtiene la única raíz: $\left(\dfrac{28}{13}, \dfrac{36}{13}, 0, \dfrac{16}{13}\right)$ que verifica todas las condiciones dadas por las inecuaciones del sistema.

CASO 3: $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 = 0$

$$\begin{cases} 2.(x-4) - 2.\lambda_1 = 0 \\ 2.(y-4) - 3.\lambda_1 = 0 \\ 2.x + 3.y - 6 = 0 \end{cases}$$

Resulta en la única raíz $\lambda_1 < 0$, y por tanto no verifica todas las condiciones del sistema.

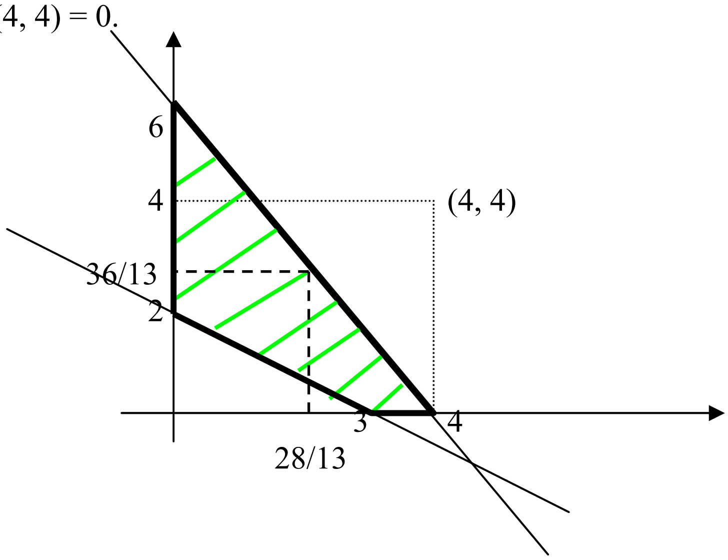
CASO 4: $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 \neq 0$

$$\begin{cases} 3.x + 2.y - 12 = 0 \\ \\ 2.x + 3.y - 6 = 0 \end{cases}$$

Resulta que en la única raíz es $y = -6/5 < 0$, y por tanto no verifica todas las condiciones del sistema.

Entonces, la solución del problema es $(x, y, \lambda_1, \lambda_2) = \left(\frac{28}{13}, \frac{36}{13}, 0, \frac{16}{13}\right)$. El valor mínimo de la función objetivo es: $f\left(\frac{28}{13}, \frac{36}{13}\right) = \left(\frac{28}{13} - 4\right)^2 + \left(\frac{36}{13} - 4\right)^2 = \frac{832}{169} = \frac{64}{13} \cong 4{,}9$.

Interpretación geométrica: la función $f(x, y) = (x - 4)^2 + (y - 4)^2$ representa en el espacio de tres dimensiones un parabaoloide cuyo vértice se ubica sobre el plano xy, en el punto (4, 4). Como la función es $f(x, y) \geq 0 \ \forall(x, y)$, por ser suma de cuadrados, el mínimo de la función sin restricciones se encuentra en (4, 4) y el valor mínimo de la función es f(4, 4) = 0.




Las restricciones determinan un dominio restringido para f en forma de cuadrilátero con vértices en los puntos (3, 0), (4, 0), (0, 2) y (0, 6). El paraboloide crece en todas las direcciones a medida que se aleja del punto (4, 4). El paraboloide encuentra su mínimo en el dominio restringido en el punto (28/13, 36/13), que es un punto frontera, dado por la restricción $3.x + 2.y \leq 12$, el más “cercano” al punto (4, 4).

Si el problema del Ejemplo 1 fuera de maximización en lugar de minimización, ¿cómo se podría resolver? ¿Se trata de un problema del tipo **Problema 2**? La respuesta es negativa, porque la función (- f) en este caso no es convexa. Entonces, para resolver el problema de maximizar $f(x, y) = (x – 4)^2 + (y – 4)^2$ sujeto a las condiciones del ejemplo, sólo podría resolverse aplicando los resultados del caso general. En tal caso, la función lagrangiana es:

$$F(x, y, \lambda_1, \lambda_2) = (x – 4)^2 + (y – 4)^2 + \lambda_1.(- 6 + 2.x + 3.y) + \lambda_2.(12 - 3.x - 2.y) + \lambda_3.x + \lambda_4.y$$

Los dos últimos multiplicadores corresponden a las restricciones $x \geq 0$, $y \geq 0$, que en el caso general deben incorporarse en la función objetivo. Al resolver este problema se encuentra que el máximo de la función es 20 y que hay dos puntos de máximo: en (0, 2) y en (0, 6).

Ejemplo 2: El costo de producción de un producto industrial depende exclusivamente de la horas de trabajo utilizadas y del capital disponible para la producción (capital fijo más capital de giro). Las cifras refieren a un mes de producción. Los costos unitarios son:

| | |
|---|---|
| (t) = Horas de trabajo | $p_t$ = U\$S 4, precio de la hora de trabajo |
| (k) = Capital en miles | $p_k$ = U\$S 8, costo de U\$S1.000 de capital en un mes |

Se quiere minimizar el costo mensual de producción, $C(t, k) = 4.t + 8.k$. La función de producción es del tipo Cobb-Douglas. La cantidad de unidades a producir (Q) se expresa mediante la fórmula $Q(t, k) = 5.t^{0,4}.k^{0,6}$. Si se deben producir por lo menos 1.000 unidades por mes (por ejemplo, porque los clientes exigen ese mínimo mensual), entonces las restricciones del problema son:

$$5.t^{0,4}.k^{0,6} \geq 1.000$$
$$t \geq 0$$
$$k \geq 0$$

Se trata de saber cuál es la dotación de capital y de trabajo a contratar para minimizar el costo de producción. Se trata entonces de un problema de optimización con restricciones de desigualdad. Veamos si es del tipo del **Problema 1**.

Función objetivo: $C(t, k) = 4.t + 8.k$

Restricciones: $5.t^{0,4}.k^{0,6} \geq 1.000$
$$t \geq 0$$
$$k \geq 0$$

La función objetivo es diferenciable y convexa por ser una función lineal. La función $Q(t, k) = 5.t^{0,4}.k^{0,6}$ es diferenciable a condición que $t > 0$ y que $k > 0$, lo que no genera ningún problema desde el punto de vista de la interpretación: si no hay capital o trabajo se supone que no hay producción. Sin embargo, estaríamos en problemas si la solución implicara $t = 0$ o bien $k = 0$. Para que el problema sea del tipo 1 la primera restricción la trasformamos así: $- 5.t^{0,4}.k^{0,6} \leq - 1.000$. Entonces la función $g$ de la primera restricción es $g(t, k) = - 5.t^{0,4}.k^{0,6}$. ¿Es convexa?

$g_t(t, k) = - 2.t^{-0,6}.k^{0,6}$ $\quad$ $g_{tt}(t, k) = 1,2.t^{-1,6}.k^{0,6}$ $\quad$ $g_{tk}(t, k) = - 1,2.t^{-0,6}.k^{-0,4}$
$g_k(t, k) = - 3.t^{0,4}.k^{-0,4}$ $\quad$ $g_{kk}(t, k) = 1,2.t^{0,4}.k^{-1,4}$

Resulta $|H_g| = 1{,}44.\ t^{-1,2}.k^{-0,8} \geq 0$ para todo $t > 0$, $k > 0$, y $\text{Traza}(H_g) = 1{,}2.t^{-1,6}.k^{0,6} + 1{,}2.t^{0,4}.k^{-1,4}$ también no negativo para todo $t > 0$, $k > 0$. Entonces, g es una función convexa. Estamos en las hipótesis del **Problema 1**.

$F(t, k, \lambda) = 4.t + 8.k + \lambda.[- 5.t^{0,4}.k^{0,6} - (-1.000)]$

El método conduce al sistema:

$$\begin{cases} 4 - \lambda.2.t^{-0,6}.k^{0,6} = 0 \\ 8 - \lambda.3.t^{0,4}.k^{-0,4} = 0 \\ \lambda.\left(1.000 - 5.t^{0,4}.k^{0,6}\right) = 0 \\ 5.t^{0,4}.k^{0,6} \geq 1.000 \\ t > 0 \\ k > 0 \\ \lambda \geq 0 \end{cases}$$

El sistema tiene la raíz dada por $t = 200.(4/3)^{0,6} \cong 237{,}68$ y $k \cong 178{,}26$ con $\lambda \cong 2{,}38$. El mínimo de la función objetivo es $C(237{,}68;\ 178{,}26) = $ U\$S2.376,80. La cantidad a producir en el óptimo es Q = 1.000 unidades. La producción de 1.000 unidades a costo mínimo requiere contratar por mes unas 238 horas de trabajo y disponer de un capital de U\$S178.260.

# Repartido Práctico 21.1: Optimización con restricciones de igualdad (Lagrange)

**Ejercicio 1**

**En los siguientes casos hallar los extremos absolutos de las funciones, condicionados por las restricciones que se indican.**

| **Función** | **Restricciones** | |
|---|---|---|
| a) $f(x,y) = x^2 + 4y^2 + 6$ | $2x - 8y = 20$ | |
| b) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ | $2x + y - z = 9$ | |
| c) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ | $x + y + z = 1$ | $x - y + z = 1$ |
| d) $f(x,y,z) = x.y.z$ | $x + y + z = 12$ | $x + y - z = 0$ |
| e) $f(x,y) = 4x^2 - 4xy + y^2$ | $X + y = 2$ | |

**Ejercicio 2**

**Para cumplir con un pedido de 100 automóviles, una fábrica decide distribuir la producción entre sus dos plantas de montaje. La función de costos es:**

$$C(q_1,q_2) = 2q_1^2 + 140q_1 + 300q_2 + 20.000$$

donde: $q_1$ = cantidad de automóviles a producir en la planta 1
$q_2$ = cantidad de automóviles a producir en la planta 2.

Determinar el número de automóviles a producir en cada planta de montaje de forma de minimizar el costo de producción.

**Ejercicio 3**

La función de producción de una empresa es: $f(t,k) = 12t + 20k - t^2 - 2k^2$. Los costos de una unidad de trabajo (t) y capital (k) son respectivamente 4 y 8.

a) Si el presupuesto de la empresa es 88, determinar la combinación de factores que maximiza la producción.
b) Calcular la producción máxima dada por la restricción.
c) Si la restricción fuera una desigualdad, del tipo Presupuesto $\leq$ 88, ¿se podría obtener una producción aún mayor que la determinada en el punto anterior a menor costo?

**Ejercicio 4**

Una empresa tiene un presupuesto para publicidad de \$60.000 por mes, a repartir entre radio y televisión. Si se gastan "x" pesos en radio y "y" pesos en televisión, se estima que las ventas mensuales ascenderán a $V = 90.x^{1/4}.y^{3/4}$. ¿Cómo se deben asignar los \$60.000 del presupuesto publicitario para maximizar las ventas?

# Repartido Práctico 21.1: Optimización con restricciones de igualdad (Lagrange)

**Ejercicio 5**

La función de producción de un fabricante es: $q = (1/16).[65 - 4(t-4)^2 - 2(k-5)^2]$, con un costo de \$4 por unidad de trabajo (t) y \$8 por unidad de capital. El precio de venta del producto es \$32 por unidad.

a) Expresar la Utilidad en función de t y k.
b) Hallar el máximo relativo de la función de utilidad.
c) Maximizar la utilidad como función de q, t y k, mediante el método de los multiplicadores de Lagrange, asumiendo como restricción la relación dada por la función de producción.
d) El máximo relativo hallado en b), ¿es también el máximo absoluto?

**Ejercicio 6**

Un consumidor dispone de 48 unidades monetarias para gastar en cine y teatro en el año. La entrada de cine cuesta 2 u. m. y la de teatro 3 u. m. La función de utilidad del consumidor, en relación con estos productos es $U(x,y) = x^3.y^3$, donde x = número de entradas de cine a consumir en el año y y = número de entradas de teatro en el año. ¿Cómo debe distribuir su presupuesto el consumidor para maximizar la utilidad?

**Ejercicio 7**

Sea $U = f(x,y)$ una función de utilidad sujeta a la restricción presupuestaria $C = x.p_X + y.p_y$. Demostrar que para maximizar la satisfacción es necesario que:

$$\lambda = \frac{f_x(x,y)}{p_x} = \frac{f_y(x,y)}{p_y}$$

donde $f_x(x,y)$ y $f_y(x,y)$ son las utilidades marginales de los productos X e Y. Se deduce de lo anterior que la satisfacción máxima se obtiene cuando el consumidor distribuye su presupuesto de forma que la utilidad marginal por unidad monetaria de X sea igual a la utilidad marginal por unidad monetaria de Y. λ se denomina la *utilidad marginal del ingreso.*

# Repartido Práctico 21.2: Optimización con restricciones de desigualdad (Kuhn-Tucker)

**Ejercicio 1**

Sea la función objetivo a minimizar: $f(x,y) = 4.x^2 + y^2$
sujeta a las restricciones: $x + 2.y \leq 4$, $x \geq 0$, $y \geq 1$.

a) Probar que f es una función convexa
b) Hallar el mínimo absoluto de f sujeto a las restricciones.

**Ejercicio 2**

Sea la función objetivo a maximizar: $f(x,y) = 20 - 4.x^2 - y^2$
sujeta a las restricciones: $x + 2.y \leq 4$, $x \geq 0$, $y \geq 1$.

a) Probar que -f es una función convexa.
b) Hallar el máximo absoluto de f sujeto a las restricciones.

**Ejercicio 3**

Sea la función de costos: $C(t,k) = t^2 + k^2$, sujeta a las restricciones: $t + k \geq 2$, $t \geq 0$ y $k \geq 0$. Hallar la combinación de factores de costo mínimo.

**Ejercicio 4**

**Retomar el Ejercicio 3 del Repartido Práctico 20.1. Maximizar la función de producción, aplicando Kuhn-Tucker, utilizando la restricción presupuestaria con el signo "≤".**

## 22. INTEGRALES DEFINIDAS MÚLTIPLES

Consideremos en primer lugar el caso de funciones que dependen de dos variables.

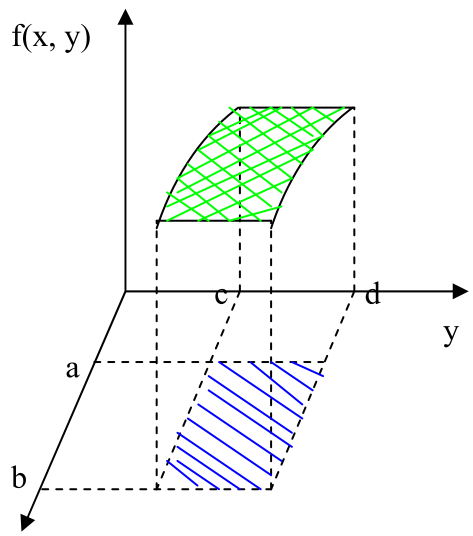
El problema de las derivadas parciales consiste en encontrar unas funciones $f_x$ y $f_y$ a partir de una función $f$ dada. Podemos pensar en el problema inverso, que consiste en encontrar alguna función cuya derivada parcial es $f_x$ ó $f_y$.

Ejemplo: Sea $f_x(x, y) = 2.x.y + x^2 + y^2$. ¿Es posible encontrar alguna función $f$ tal que $f_x(x, y) = 2.x.y + x^2 + y^2$? La respuesta es afirmativa, pero la solución no es única. Por ejemplo, $f(x, y) = x^2.y + x^3/3 + x.y^2$ es una respuesta al problema. Pero $f(x, y) = x^2.y + x^3/3 + x.y^2 + 5$ es otra respuesta posible, y $f(x, y) = x^2.y + x^3/3 + x.y^2 + P(y)$, donde $P(y)$ es un polinomio cualquiera (que depende de "y" pero no de "x") es otro conjunto de respuestas posibles.

Entonces, las funciones de dos variables admiten varias primitivas respecto de una variable y todas ellas <u>no difieren en una constante</u> tal como ocurre con funciones de una sola variable.

La integral doble de una función $f$ en un intervalo cerrado [a, b] para la variable "x", y un intervalo cerrado [c, d] para la variable "y" se simboliza $\int_a^b \int_c^d f(x, y) dy.dx$. Obsérvese que para identificar cuál es el intervalo de integración que corresponde a cada variable, los límites de integración se escriben en un orden y los diferenciales en el orden inverso. Así, la integral doble también admite la notación: $\int_a^b \left[ \int_c^d f(x, y) dy \right] dx$.

Consideremos el caso particular: $a < b$, $c < d$ y $f(x, y) \geq 0$ $\forall (x, y)$ del rectángulo $\{a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$. Desde el punto de vista geométrico, la integral doble de la función en el rectángulo representa el volumen de un *prismoide* limitado por debajo por el plano xy, lateralmente por los cuatro planos $x = a$, $x = b$, $y = c$, $y = d$, y en la parte superior por el gráfico de la función f.



El procedimiento de cálculo de la integral doble en un rectángulo sigue las siguientes reglas.

1º) Primitivar la función f(x, y) respecto de una de las variables (la que se indica en el paréntesis recto o la primera que aparece en el orden de los diferenciales) tomando la otra variable como constante. Sea F(x, y) tal que $F_y(x, y) = f(x, y)$.

2º) Evaluar la primitiva F en y = c y en y = d: $F(x,y)\Big|_{y=c}^{y=d} = g(x)$.

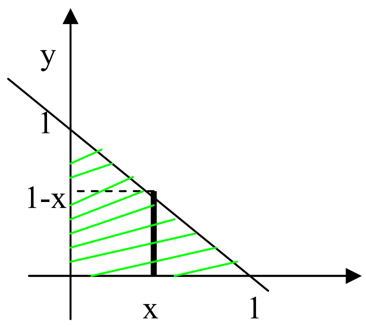
3º) Calcular $\int_a^b g(x).dx$.

*Observaciones*

1. En condiciones muy generales es $\int_a^b \left[ \int_c^d f(x,y)dy \right] dx = \int_c^d \left[ \int_a^b f(x,y)dx \right] dy$. De manera que el cálculo se puede realizar primitivando primero respecto de "y" y luego de "x" o viceversa.
2. El resultado de la integral doble en el rectángulo es un número. Si a < b, c < d y f(x, y) ≥ 0, entonces dicho número se puede interpretar geométricamente como el volumen de un prismoide.
3. La integral doble puede calcularse también si no se cumple alguna de las condiciones a < b, c < d ó f(x, y) ≥ 0. En tales casos, la interpretación geométrica no es tan obvia.
4. La existencia de la integral doble depende, como en el caso de integrales en una sola variable, de la existencia de primitivas. El cálculo de la integral doble depende de la factibilidad de encontrar primitivas, porque aún cuando existan, a veces no es posible explicitarlas.
5. Las integrales dobles se pueden calcular en cualquier dominio de integración. El rectángulo {(x, y): a ≤ x ≤ b, c ≤ y ≤ d}es sólo un caso particular.

Ejemplo 1: Calcular la integral doble de $f(x, y) = (x - y)^2$ en el dominio de integración {(x, y): x ≥ 0, y ≥ 0, x + y ≤ 1}.

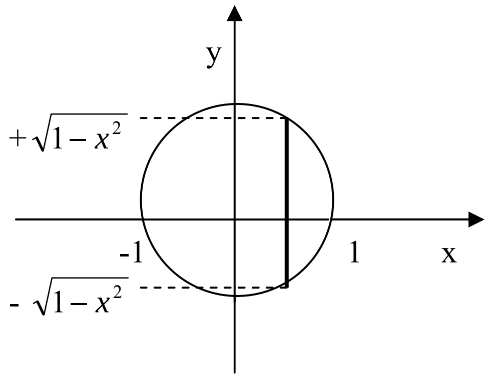
La base del prismoide es ahora un Triángulo. Cuando la "x" toma valores en intervalo [0, 1], la "y" toma valores en el intervalo [0, 1-x]. Entonces la integral $\int_0^1 \left[ \int_0^{1-x} (x-y)^2 dy \right] dx$ resuelve el problema.



Obsérvese que $\int_0^1 \left[ \int_0^{1-y} (x-y)^2\, dx \right] dy$ también resuelve el problema. En este caso el cálculo tiene el mismo grado de dificultad en cualquiera de las dos soluciones planteadas. En otros ejemplos, una solución podría resultar más sencilla que otra. Calculemos la integral propuesta en primer lugar como solución del problema.

$$\int_0^1 \left[ \int_0^{1-x} (x-y)^2\, dy \right] dx = \int_0^1 \left[ -\frac{(x-y)^3}{3} \Bigg|_{y=0}^{y=1-x} \right] dx = \int_0^1 \left[ -\frac{(2.x-1)^3}{3} + \frac{x^3}{3} \right] dx = -\frac{(2.x-1)^4}{24} + \frac{x^4}{24} \Bigg|_0^1 = \frac{1}{12}$$

Ejemplo 2: Se trata de calcular el volumen de un cilindroide, cuya base es un círculo de centro (0, 0) y radio 1 y que tiene por "tapa" el plano z = 1 + x + y. El dominio de integración es el conjunto $\{(x, y): x^2 + y^2 \leq 1\}$. Para plantear el problema se puede utilizar la notación: $\iint_{x^2+y^2\leq 1} (1+x+y)\, dx.dy$. Para calcular la integral es necesario explicitar los límites de integración para cada variable.




Obsérvese que si se hace variar la "x" en el intervalo [-1, +1], entonces la variable "y" varía entre $-\sqrt{1-x^2}$ y $+\sqrt{1-x^2}$. Entonces, el cálculo de la integral doble procede así:

$$\int_{-1}^{1} \left[ \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{+\sqrt{1-x^2}} (1+x+y)\, dy \right] dx = \int_{-1}^{1} \left[ y + xy + \frac{y^2}{2} \Bigg|_{y=-\sqrt{1-x^2}}^{y=\sqrt{1-x^2}} \right] dx = \int_{-1}^{1} \left[ 2.\sqrt{1-x^2} + 2.x.\sqrt{1-x^2} \right] dx$$

Observando que el primer sumando del integrando es una función par y que el segundo es impar, y que el intervalo de integración es simétrico, entonces la integral es igual a: $= \int_0^1 2.\sqrt{1-x^2}\, dx$. Esta integral puede resolverse mediante el método de sustitución utilizando el cambio de variable x = sen t. El resultado es π/4: $\iint_{x^2+y^2\leq 1} (1+x+y)\, dx.dy = \frac{\pi}{4}$.

No hay inconveniente en generalizar el cálculo de las integrales dobles a dominios infinitos. Las técnicas de primitivación se combinan con el cálculo de límites, tal como en integrales de funciones con una sola variable. Ejemplos: $\int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-x-y}\, dy.dx;\ \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{2} \frac{x}{y^2+1} dx.dy$.

El cálculo de integrales triples o con un número mayor de variables utiliza las mismas técnicas de las integrales dobles: primitivación de la función integrando respecto de una variable, tomando las demás como constantes. Por ejemplo, la integral triple $\int_0^2 \int_3^5 \int_{10}^{12} \left(x^2 - y.z + 4.x.y\right) dz.dy.dx$ se debe entender así: primero se debe primitivar respecto de la "z" y evaluar en el intervalo [10, 12], luego primitivar respecto de la "y" y evaluar en el intervalo [3, 5], y finalmente primitivar respecto de la "x" y evaluar en [0, 2].

# Repartido Práctico 22: Integrales Múltiples

## Ejercicio 1

**Calcular las siguientes integrales definidas.**

$a)\int_1^2\int_0^2 4.x.y\ dydx$ $\quad b)\int_{-1}^1\int_1^3 y\ dydx$ $\quad c)\int_0^1\int_0^1 4x\ dxdy$ $\quad d)\int_0^2\int_0^3 8x^3\ dydx$ $\quad e)\int_{-2}^2\int_0^2 (x+2y)dydx$

$f)\int_0^3\int_0^t (x^2+xy)dxdy$ $\quad g)\int_0^3\int_0^x (3.x^2+2.xy)dydx$ $\quad h)\int_0^2\int_0^{\sqrt{4-y^2}} x\ dxdy$ $\quad i)\int_{-2}^2\int_{-x}^x (x+y)dydx$

$j)\int_0^2\int_1^3 e^{x+y}\ dxdy$ $\quad k)\int_0^2\int_1^y e^{x+y}\ dxdy$ $\quad m)\int_0^1\int_0^2\int_0^3 12.x.y^2.z^2\ dxdydz$

## Ejercicio 2

En Estadística, una función de densidad conjunta z = f(x,y), definida en una región del plano Oxy, se representa por una superficie en el espacio de tres dimensiones. Dicha función permite calcular probabilidades en cualquier rectángulo del plano Oxy, (a ≤ x ≤ b, c ≤ y ≤ d), mediante la fórmula:

$$P(a \le x \le b, c \le y \le d) = \int_c^d\int_a^b f(x,y)\ dx\ dy$$

La cual representa el volumen comprendido entre la superficie, el plano xy, y los cuatro planos perpendiculares al xy determinados por: x=a, x=b, y=c, y=d.

a) Hallar P(0 ≤ x ≤ 1/2, 1/2 ≤ y ≤ 3/4) si f(x,y) = 1 definida en el cuadrado (0 ≤ x ≤ 1, 0 ≤ y ≤ 1). Interpretar el resultado a partir del gráfico.
b) Hallar P(0 ≤ x ≤ 2, 1 ≤ y ≤ 2) si f(x,y) = $e^{-x-y}$ definida en el primer cuadrante del plano xy.
c) Hallar P(3 ≤ x ≤ 4, 0 ≤ y ≤ 2) si f(x,y) = $12.e^{-4x-3y}$ definida en el primer cuadrante del plano xy.
d) Hallar P(x ≥ 1, y ≥ 2) si f(x,y) = $12.e^{-4x-3y}$ definida en el primer cuadrante del plano xy.

## SOLUCIONES

## REPARTIDO PRACTICO 1: TEORIA DE CONJUNTOS

## EJERCICIO 1

a) A = { 3,4,5,6,7 }
b) B = { 8,9,10,11,12 }
c) C = { (4,1) , (5,2) , (6,3) , (7,4) , (8,5) }
d) (10, 7) $\in$ C
e) E = { x/y / x es entero, y es entero , y > x , y $\neq$ 0 }
f) F = { x / 10/x $\in$ N} por extensión F= { 1,2,5,10 }
g) G = { (A, Ju) , ( Ju ,A) , ( A, Jo ) , ( Jo, A ) , ( A, P ) , ( P, A ) , ( A, L ) , ( L, A ) , ( Ju,J ) , ( J, Ju ) , ( Ju, P ) , ( P, Ju ) , ( Ju, L ) , (L, Ju ) , ( A, J ), (A,A) , (Ju,Ju) }
h) No
i) D = { 2,3,4} E = { 2,3,4,5,6,7,8,9 } D $\subset$ E
j) F = $\phi$

## EJERCICIO 2

a) i) C
ii) B
iii) N
iv) $\phi$
v) B
vi) { x/x = 3 e impar }
vii) $\phi$
viii) A

A = { x / x = 2 }
B = { x / x = 3 }
C = { x / x = 6}
D = { x / x es impar }

b) i) D
ii) A
iii) ( N ) = $\phi$
iv) ( $\phi$ ) = N

## EJERCICIO 3

**REPARTIDO PRACTICO 2: RELACIONES Y FUNCIONES**

**EJERCICIO 1**

a) A x B = { ( M, P), (M,R), ( M, B) , (J,P), ( J, B) , (L,P), (L,R) , (L,B), ( A, P) , (A,R), ( A, B) }

**EJERCICIO 2**

a) AxB = { (1,0) , (1,2),(1,4),(1,6),(3,0),(3,2),(3,4),…………….(7,6)}
b) No
c) R1= { (1,29,(1,4),(1,6),(3,4),(3,6),(5,6)}
d) R2 = o
e) R3 = {(1,2),(3,6)}
f) R4= {(1,0),83,0),(3,4),(3,6),(5,0),(5,2),(5,4),(5,6),(7,0),(7,2),(7,4),(7,6)}

**EJERCICIOS 3 Y 4**

a) Función biyectiva
b) Función sobreyectiva , no es función inyectiva
c) d) e) No función

f) g) h) i)

**EJERCICIO 5**

Casos 1, 2, 3, 4, 5 - Si función
Casos 6, 7, 8 – No función

**EJERCICIO 6**

**REPARTIDO PRACTICO 3.1: OPERACIONES CON NÚMEROS.**

**EJERCICIO 1**

| | V | F |
|---|---|---|
| a - | x | |
| b - | x | |
| c - | | x |
| d - | | x |
| e - | | x |
| f - | x | |
| g - | | x |
| h - | x | |
| i - | x | |
| j - | | x |
| k - | x | |
| l - | x | |
| m - | | x |
| n - | x | |
| o - | x | |
| p - | x | |

**EJERCICIO 2**

a - 1.73
b - 1.73
c - 0.38
d - 1.51
e - 0.75
f - -1.5
g - 1
h - 0.04
i - 1.19
j - 1.62
k - 1.08
l - 1.61
m - 0.62
n - 1.36
o, p - 1
q - 4
r - 6.79

**REPARTIDO PRACTICO 3.2: SUMATORIAS, COTAS Y EXTREMOS DE UN CONJUNTO.**

**EJERCICIO 1**

1. $\sum_{i=1}^{6} pi \cdot qi = 1057$
2. $\sum_{i=1}^{6} ci \cdot qi = 752$
3. $\sum_{i=1}^{6} (pi - ci)\, qi = 305$
4. pi - ci

   | | |
   |---|---|
   | leche | 1 |
   | vino | 4 |
   | carne | 10 |
   | pan chico | 1 |
   | queso | 18 |
   | yerba | 5 |

5. (pi – ci) / pi (%)

   | | |
   |---|---|
   | leche | 17 |
   | vino | 20 |
   | carne | 33 |
   | pan chico | 50 |
   | queso | 37.5 |
   | yerba | 20 |

**EJERCICIO 2**

1. $\sum_{i=1}^{k} pi \cdot qi$
2. $\sum_{i=1}^{k} ci \cdot qi$
3. $\sum_{i=1}^{20} pi \cdot qi$
4. $\sum_{i=k-16}^{k} ci \cdot qi$
5. $\sum_{i=1} (pi - ci)\, qi$
6. $\sum_{i=1}^{6} (pi - ci) / pi$
7. 0.89

**EJERCICIO 3**

a) 78 ; b) 285 ; c) 112

**EJERCICIO 4**

a) $\sum_{i=1}^{50} 2i$

b) $\sum_{i=1}^{38} (2i - 1)$

c) $\sum_{i=0}^{10} 2i$

d) $\sum_{i=4}^{12} (4i + 1)$

e) $\sum_{i=1}^{10} (-2)i$

f) $\sum_{i=0}^{11} ½\, i$

g) $\sum_{i=0}^{\infty} ½\, i$

h) $\sum_{i=1}^{100} 1/i$

i) $\sum_{i=0}^{\infty} 2i/i!$

**EJERCICIO 5**

| | Inferior | superior |
|---|---|---|
| A | 1 | 101 |
| B | 1 | 2 |
| C | 0 | 2 |
| D | 2 | no existe |
| E | 1 | 36 |
| F | 0 | 35 |
| G | -3 | 1 |
| H | no existe | no existe |

**EJERCICIO 6**

Area del hexágono = 0.072 $L^2$ ; Area cuadrado = 0.062 $L^2$

## REPARTIDO PRACTICO 4: POLINOMIOS Y EXPRESIONES ALGEBRAICAS

### EJERCICIO 1

a. $2x^3 - 2x^2 + 3x – 4$
b. $-2x^2 - 4x + 6$; $\frac{1}{2} x^2 + x – 3/2$
c. $6x^3 - 15x^2 - 9x + 15$
d. $- 7x^2 + 7x – 1$
e. $2x^5 + x^4 - 11x^3 + 10x^2 - 5x + 3$

### EJERCICIO 2

a. $x^4 - 4x^3 + 4x^2$
b. $4x^6 - 4x^4 + x^2$
c. $x^6 + 3/2\, x^5 + \frac{3}{4}\, x^4 + 1/8\, x^3$
d. $x^4 - 4x^2$

### EJERCICIO 3

a. $(x + 1) / x^2$
b. $1 / x\,(x – 1)$
c. $(2x^2 – 1) / (x + 1)\, x$
d. $(x^2 – x + 1) / (x^2 - 1)$

### EJERCICIO 4

a. raíces: $x = 1$, $x = -3$; sgn (desde la derecha): + - +
b. raíces: $x = 0$, $x = 2$; sgn (desde la derecha): + + +
c. raíces: $x = \pm 2$, $x = \pm 1$; sgn (desde la derecha): + - + - +

### EJERCICIO 5

a. $16x^4 + 32x^3 + 24x^2 + 8x + 1$
b. $x^{12} - 12x^{11} + 60x^{10} - 160x^9 + 240x^8 - 192x^7 + 64x^6$

## REPARTIDO PRACTICO 5: ECUACIONES Y SISTEMAS DE ECUACIONES

### EJERCICIO 1

a. I = 180
b. M = 1180
c. t = 6.5 (6 meses y medio)

### EJERCICIO 2

t = 50

### EJERCICIO 3

a. M = 1425.76
b. t = 13.71 (13 meses y 22 dias)
c. no se igualan nunca

### EJERCICIO 4

A = 120

### EJERCICIO 5

H = 5

### EJERCICIO 6

| | d Young | d Cowling |
|---|---|---|
| a. | 1.2 | 1.125 |
| b. | 1 | 1.083 |

c. E ≅ 10 y 1

### EJERCICIO 7

x = 86.8;   x = 33.2

### EJERCICIO 8

a. t = 2
b. t = 1 (h = 25)
c. t = 1.5

### EJERCICIO 9

a. año 1 = 11.6 %;   año 2 = 8.7 %;   año 3 = 5.6 %
b. i = 8.7 %

**EJERCICIO 10**

DIC 97 = 1 canasta/salario
DIC 98 = 1.014
DIC 99 = 0.967

**EJERCICIO 11**

x = 275

**EJERCICIO 12**

x = 1

**EJERCICIO 13**

x = 0.34
Ancho = 9.66
Largo = 4.66

**EJERCICIO 14**

x = 60

**EJERCICIO 15**

CV = 3000
CF = 20000

**EJERCICIO 16**

x = 100

**EJERCICIO 17**

No contesta = 50

**EJERCICIO 18**

comisión = 2 % sobre ventas
salario fijo = 5000

**EJERCICIO 19**

## REPARTIDO PRACTICO 6: INECUACIONES

### EJERCICIO 1

raíces: $x = 3$, $x = 2$; sgn (desde la derecha): + - +
solución = $\{ x / x < 2 \text{ o } x > 3 \}$

### EJERCICIO 2

$RP = 6P + 8L = 600$; a) $p \cong 47$; b) $p = 0$; c) $p = 100$

### EJERCICIO 3

raíces: $x = -1$, $x = 0$, $x = 1$; sgn (desde la derecha): + - - +
solución = $\{ x / -1 \leq x \leq 1 \}$

### EJERCICIO 4

raíces: $x = \pm 2$, $x = \pm 3$; sgn (desde la derecha): - + - + -
solución = $\{ x / -3 \leq x \leq -2 \text{ o } 2 \leq x \leq 3 \}$

### EJERCICIO 5

raíces: $x = 1$, $x = 2$; sgn (desde la derecha): + - +
solución = $\{ x / x < 1 \text{ o } 2 \leq x \}$

### EJERCICIO 6

raíces: $x = -1$, $x = 7$; sgn (desde la derecha): + - -
solución = $\{ x / -7 < x < -1 \text{ o } x > -1 \}$

### EJERCICIO 7

$e^x > x + 1 \quad \forall x$

## PRACTICO 7: MATRICES Y DETERMINANTES

### EJERCICIO 1

a) $A^2 = \begin{bmatrix} -1 & -4 \\ 8 & 7 \end{bmatrix}$

$A^3 = A*A^2 = \begin{bmatrix} -9 & -11 \\ 22 & 13 \end{bmatrix}$

$A*B = \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}$

b) det (A) = 5; det (B) = -2; det (A+B) = -3; det (A-B) = 9; det (A*B) = -10

c) det (C) = 5; det (C') = 5; det (5C) = 625

### EJERCICIO 2

a) $X = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -4 \end{bmatrix}$

b) $X = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$

c) $X = \begin{bmatrix} 1/2 & 1 \\ 3/2 & 2 \end{bmatrix}$

d) $X = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$

e) $X = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -5/2 & 3/2 \end{bmatrix}$

f) $X = \begin{bmatrix} 7/2 & -3/2 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$

g) $X = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{bmatrix} = A^{-1}$

### EJERCICIO 3

Se cumplen las propiedades conmutativa y distributiva del producto escalar de vectores por cumplirse las propiedades en los números

### EJERCICIO 4

$B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ matrices que cumplan: a = c y b = d

### EJERCICIO 5

det (A) = -2; det (B) = -2; det (A)*det (B) = 4 = det (A*B)

### EJERCICIO 6

$\det(A*A^{-1}) = \det(A)*\det(A^{-1}) = \det(I) \Rightarrow \det(A)*\det(A^{-1}) = 1 \Rightarrow$
$\det(A^{-1}) = 1 / \det(A)$

**EJERCICIO 7**

$A^2 = ½ * \begin{bmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -1 \end{bmatrix}$

$A^3 = A * A^2 = I$ ; $A^{-1} = A^2$

**EJERCICIO 8**

$T^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$

**EJERCICIO 9**

a) $A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ det (A) = 1

$A^3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

b) $A^3 - 2A^2 + A – I = 0$

c) $A^{-1} = (A – I)^2$

d) $P = (A – I)^{-1}$ ; también verifica $P = -(A – I)^{-1}$

**EJERCICIO 10**

a) $M * M' = \begin{bmatrix} 21 & 11 \\ 11 & 10 \end{bmatrix}$ det (M * M') = 89

$(M * M')^{-1} = 1/89 \begin{bmatrix} 10 & -11 \\ -11 & 21 \end{bmatrix}$

b) se demuestra que no es una coincidencia; se verifica en matrices mxn y sus inversas

**EJERCICIO 11**

a) $A^2 = P D^2 P^{-1}$ ; se demuestra haciendo $A^2$

b) $A^n = P D^n P^{-1}$ ; se demuestra haciendo $A^{n+1}$

**EJERCICIO 12**

$C^2 + C = I$; $C^3 - 2C + I = 0$ ; $C + I = C^{-1}$

**EJERCICIO 13**

**EJERCICIO 14**

a) det (D)*det (D + I) = 1 $\Rightarrow$ det (D) $\neq 0 \Rightarrow \exists D^{-1}$

$D^{-1} (D^2 + D) = D^{-1} I \Rightarrow D + I = D^{-1}$

b) $D^3 = -I + 2D$; $D^4 = 2I - 3D$

**EJERCICIO 15**

a) A es idempotente ($A = A^2$); se demuestra haciendo $A^2$
b) A es idempotente en el caso particular

**EJERCICIO 16**

a) matriz de Leontief $\quad M = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.4 \\ 0.3 & 0.2 \end{bmatrix}$

b) $X_A = 5000$; $X_B \cong 3333$

**EJERCICIO 17**

a) det (A) = 6; det (B) = -6; det (C) = 1; det (D) = 1; det (E) = 0
b) r(A) = 3; r(B) = 3; r(C) = 4; r(D) = 4; r(E) = 1

**EJERCICIO 18**

a) si $\alpha \neq 6 \Rightarrow \det(A) \neq 0 \Rightarrow r(A) = 2$
si $\alpha = 6 \Rightarrow \det(A) = 0 \Rightarrow r(A) = 1$
b) si $\alpha \neq 2 \Rightarrow \det(B) \neq 0 \Rightarrow r(B) = 3 \quad \forall\beta$
si $\alpha = 2 \Rightarrow \det(B) = 0 \Rightarrow r(B) = 2 \quad \forall\beta$

## PRACTICO 8: ESPACIOS VECTORIALES

### EJERCICIO 1

Es un EV porque la suma de matrices verifica las propiedades asociativa, conmutativa, existencia de neutro y opuesto; y el producto por un escalar verifica la asociativa, la existencia de neutro y la distributiva (respecto a la suma de escalares y a la suma de matrices)

### EJERCICIO 2

$\lambda_1 = ½$; $\lambda_2 = 1$; $\lambda_3 = -2$; $\lambda_4 = -3$

### EJERCICIO 3

a) por ej: $v_1 = (1\ \ 1\ \ 1\ \ 1)$; $v_2 = (-1\ \ -1\ \ -1\ \ -1)$; $v_3 = (0\ \ 0\ \ 0\ \ 0)$; $v_4 = 2v_1$; $v_5 = 3v_1$
b) $v_1 = (1\ \ 0\ \ 1)$ combinación lineal (cl) de U; sistema compatible indeterminado (SCI)
c) si
d) no, todo vector de $R^3$ es cl de U; SCI; U es generador de $R^3$

### EJERCICIO 4

Si, con $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ y $\lambda_3 \neq 0$

### EJERCICIO 5

a) U es LI; sistema compatible determinado (SCD) con $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$
b) U continua siendo LI (teorema)

### EJERCICIO 6

U es LD (puede ser $\lambda \neq 0$)

### EJERCICIO 7

U es LD

### EJERCICIO 8

a) SCD con $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = -1$
b) U no es LI
c) SCI, vectores de W c.l. de U
d) W es un EV
e) si
f) no (porque es LD)
g) sacando vectores de U (hasta que sea LI)

**EJERCICIO 9**

a) SCD, con $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 5$ y $\lambda_3 = -3$
b) U' es LI; SCD con $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$
c) SCI $\forall$a b y c; U' es generador
d) $D(R^3) = 3$
e) U' es LI y generador $\Rightarrow$ U' es base

**EJERCICIO 10**

a) generador de $V_1 = \{x^2, x, 1\}$
b) generador de $V_2 = \{ A, B, C, D \}$

$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

c) $V_1 = \{ x^2, x, 1\}$ es LI (SCD) $\Rightarrow$ base de $V_1 = \{ x^2, x, 1\}$; $D(V_1) = 3$
d) $V_2 = \{ A, B, C, D \}$es LI (SCD) $\Rightarrow$ base de $V_2 = \{ A, B, C, D \}$; $D(V_2) = 4$

**EJERCICIO 11**

a) V' es un SEV
b) U = {( 1 0 -1), ( 0 1 -1)} es generador de V' y es LI $\Rightarrow$ U base de V' (D(V') = 2)
c) 2
d) 2

**EJERCICIO 12**

a) U = { ( 1 -1) } es generador de W y es LI $\Rightarrow$ U base de W
b) D(W) = 1

**EJERCICIO 13**

a) P es SE de M
b) SCI si se cumple b + c = 0 (condición que define el SE) $\Rightarrow$ A generador de P
c) SCI; es LI; D(P) = 4

## PRACTICO 9: VALORES Y VECTORES PROPIOS. DIAGONALIZACION. FORMAS CUADRATICAS

### EJERCICIO 1

a) $(A^{-1})^T = (A^{-1})^{-1}$
b) $A^T * A = A * A^T$
c) $(A*B)^T = (A*B)^{-1}$
d) $\det(A) = \pm 1$

### EJERCICIO 2

$u = (1 \ \ 2 \ \ -1)$; con $a = \pm 1/\sqrt{6}$ se normaliza
$u = (3 \ \ 4 \ \ 0)$; con $a = \pm 1/5$ se normaliza
$u = (1 \ \ 0 \ \ 0)$; con $a = \pm 1$ se normaliza

### EJERCICIO 3

a) La matriz Q es ortogonal
b) con:
$a = \pm 1/\sqrt{5}$ se normaliza el primer y segundo elemento del primer vector columna respectivamente
$a = \pm 1$ se normaliza el primer y segundo elemento del segundo vector columna respectivamente

### EJERCICIO 4

a) valores propios: $\lambda_1 = 0$; $\lambda_2 = 5$
b) vectores propios normalizados: asociado a $\lambda_1 = 0$ : $v_1 = x_2\,(2 \ \ 1)$
asociado a $\lambda_2 = 5$ : $v_2 = x_1\,(1 \ \ -2)$
c) matriz Q diagonal: las columnas son los vectores propios normalizados

### EJERCICIO 5

Matriz de la forma cuadrática $X^T A X$

a) $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$

b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

c) $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

### EJERCICIO 6

a) $x_1^2 - 2\,x_1 x_2 + 4x_2^2 = 0$
b)

## EJERCICIO 7

a) definida +
b) definida +
c) definida -
d) definida -
e) semidefinida +
f) semidefinida +
g) indefinida

## EJERCICIO 8